目　录

第一章　引　　言

地震学是以地震图的资料为基础的一门科学。地震图是地球的机械振动的记录。这些振动可以用爆破人为地产生，也可以由地震和火山喷发等天然原因产生。地震和火山喷发这两种自然现象，若干世纪以来一直强烈吸引着人类的注意，甚至在今天仍引起恐惧和神秘的感觉以及智力上的好奇。

在过去许多年中，主要是由于取得稳步改善的资料，使地震学得到了巨大进展。这个进展过程中的主要阶段，都是由在数学物理方面受过良好基础训练的科学家们开创的。每一代地震学家都做了旨在得到定量结果的工作，计算上的障碍先是被机械的手摇计算机、而现今又被数字微处理技术的进步所克服。在过去二十年中，计算机已变得足以有效地处理地震图中包含的大部分信息。所以，现代地震学的定量图象，包括高质量数据、详细的震源机制模型以及地球内部结构模型之间深刻的相互影响。

现代地震学应用于结构工程，以帮助设计抗震建筑。还应用于矿产勘探以及探测石油和天然气。其它应用则起因于范围广泛的一些政治、经济和社会问题，这些问题同核爆炸（将它们与天然地震相区分）以及同帮助大动力装置和大坝避开不安全地点从而减少危险有关。最近，地震学的一些进展，使准确的地震预报成为可以预见的目标。地震学家们从事这方面的课题是受到很大压力的，由以下事实就可以看到：中华人民共和国有24万以上的人死于1976年7月28日的地震；1976年2月4日危地马拉地震造成的经济损失，相当于这个国家的年国民生产总值；即便相对来说较小的1971年2月9日加利福尼亚圣费尔南多地震所造成的损失，估计大概也在五亿五千万美元以上。诸如这些情

形，使准确的地震预报变得如此重要，以致于地震学的主题本身，似乎要在未来的十年中发生相当大的变化和发展，正如它在本世纪六十年代为了美苏之间监督禁止核试验条约的需要而发展一样。（第一个全球标准化地震仪台网以及若干大孔径台阵，就是当初为改善使用地震学方法检测和识别地下核试验的能力而建立的。）本章末尾的阅读文献，包括现代地震技术广泛应用的书籍和论文。

地震学处于一系列地球科学的一个极端位置。首先，它只同地球的力学性质和动力学有关。其次，它提供一种手段，使对地球内部的研究能进行到最大的深度，并且具有高于任何其他地球物理分支所能达到的分辨力和精度。它所以能达到这种高分辨力和精度，是因为在穿过地球内部结构而被调制之后所能观测到的各种波中，地震波的波长最短。同其他地球物理观测量如地热流、静位移、应变、重力、或者电磁现象等等相比，地震波受到的波形畸变最小，振幅衰减也最小。

地震学的第三个独有特点是，它给予我们的只是地球内部现状的知识。由于它着重于现在的构造活动，所以，地震学相当直接地吸引着社会的关注。

象其他地球物理学方法一样，地震学方法可应用于极大的尺度范围。这些范围可以按照震源（人工的和天然的两种）大小和地震台网大小进行分类。地震研究中所用到的爆炸量，其大小的范围从小于一克到大于一百万吨(倍数为 10^{12})。天然地震的范围甚至更大，从最小的可检测的微震，到象 1960 年 5 月 22 日智利地震那样的大地震，用等效点源强度(地震矩)来算，它们可以相差大约 10^{18}倍。地震台网的线度，从工程地基测量所需用的几十米，直到全球地震观测台阵所用的一万公里，相差 10^6 倍。

地震图的解释以通常的科学方式取得了进展。从一个初步猜想开始，然后用新资料检验它的推论，使这个猜想得到支持或修正。通过人为地将震源效应和介质效应分开，来简化解释地震图

问题。在历史上，对于震源的认识和对于地球介质的认识，是以反复深化的方式发展起来的。例如，在一个阶段，对震源可能比对介质了解得多些，此时假定震源为已知，新资料就用来改进对于介质的认识。在下一个阶段，新资料又同已改进的对于介质的认识综合起来，修改我们对于震源的认识。

象在所有其它地球物理学分支中一样，地震学中的震源效应和介质效应是紧紧连结在一起的。震源中和介质中的双重谬误，可以产生一种同观测相一致的结果。这就需要深入理解物理本质，以免受表面一致的诱惑。这种双重谬误的一段趣闻，是关于鉴别P和S波的。在地震学早期，一个有争论的问题是，地方震的主要运动，究竟是由纵波还是由横波造成的。主要运动被叫做S震相，因为它是第二个到达波 (secondary arrival)。在它前面有个较小的P震相，所以叫做P震相，是因为它是最先的即第一个到达波 (primary arrival)。1906 年，日本的地震学创始人大森房吉 (F. Omori)，利用当时世界上最好的地方台网记录到的一次地震的地震图，研究了这个问题。利用他自己关于S和P的到时差同震中距离的关系式，还利用在几个台上的相对到时，他定出震中是在本州海岸以南大约 500 公里。然后他发现S震相的质点运动主要是在南北方向——即S震相显然是纵偏振。如果那时他坚持S震相应当是剪切波，质点运动垂直于波传播方向，那么，他就能够正确地把地震的震源深度放在本州之下大约 500 公里，来消除这个矛盾。可是不然，他错误地得出结论说，S震相不是剪切波。这个错误同当时关于震源和地震波的主导思想实际上是谐调的。那时，地壳均衡的概念已众所周知地被用来解释重力观测，没有谁去设想震源会深到当时被认为地球的柔软部分中去。关于S震相的这个结论，同认为震中区的主要运动由纵波所引起的所谓 Mallet 学说也是谐调的。Robert Mallet 根据对地震破坏的结构进行的最早的科学的现场研究，得出了这个学说。他在 1857 年那波利地震的震中区，考察了这些结构。他也是第一个在野外

用爆破测定地震波速度的人。

在 1906 年大家就已知道固体中存在纵波和横波。自 1660 年发现 Hooke 定律之后，弹性理论的主要进展是由 Navier 在1821 年关于一般平衡方程和振动方程的研究、以及 Fresnel 所做的解释给出的，这个解释认为，光是由通过以太传播的横偏振波构成的。在这个解释之前，一般认为只有纵波能在无限的连续体内传播。此后取得弹性波传播理论进展的学者是 Cauchy（他在 1822 年前发展了六个独立应力分量和六个独立应变分量的概念）和 Poisson(他使用了 Newton 物体内分子间作用力的概念，从而假定，一对分子间的力正比于离开它们平衡间隔的距离)。Poisson 发现了两种类型的、我们现在称之为 P 和 S 的波，并且对于他的限定模型得出结论说，P 波速率是 S 波速率的 $\sqrt{3}$ 倍。比较坚实的理论基础是 Green 奠定的。他引进一个应变能函数。对于任意非各向同性体，这个函数具有 21 个独立系数。对于各向同性体，系数减少为两个。

Love 在其经典教科书（1892 年出版，1944 年重印）的引言中，极好地概述了弹性理论发展的历史。另一方面，Dewey 和 Byerly(1969)很好地描述了观测地震学的早期历史。

在弹性体自由表面传播的 Rayleigh 波的解释（Rayleigh, 1887)，是紧接着地震波的第一张记录而出现的。Lamb(1904)对于掩埋在均匀半空间中的点脉冲源，做出了第一张理论地震图。在半空间表面上所得到的地震图，是由相应于 P，S 和 Rayleigh 波的三个相继脉冲构成的，同观测记录相比，这是太简单了。

当十九世纪八十年代的早期记到第一张地震图时，地震学家们感到困惑的是，为什么振动持续了这么久。我们将看到，Rayleigh 波能够发生频散（即不同频率的波，以不同的速率传播)，并且这是长时间持续振动的一个原因。但是，在 P 和 S 波到达之后与面波（例如 Rayleigh 波)到达之前，也有振动。Jeffreys (1931) 审查并否定了许多解释之后，得出的结论是，“能存在下来的唯一

意见是，这些振动是由最初的脉冲在表面各层内的反射引起的。”当 1969 年从月球得到第一张月震图时，地震学家们再次为振动持续时间的极长所困惑。所做的解释似乎仍然是由于不均匀性造成的波的散射。

Lamb 方法对地球中实际地震和爆破的应用，一直拖延到大约 1960 年。这时，由于 Hugo Benioff, Maurice Ewing, Frank Press 和其他人的努力，高质量的长周期地震波资料已可使用。长周期波平均掉了地球的短波长非均匀性，于是，地球的表现就如同它是一个等效的均匀体。震源过程在长周期部分也比较简单。因此，Lamb 问题的极为简单的模型，在解释长周期地震图中可以具有实际用途。

本书中考虑的地球模型是非常简单的。在大多数情况下，介质是均匀的，或只在一个方向上不均匀，例如分层的半空间或球体，其中物质的性质只沿竖向或径向变化。

地震学中的模型，是一个将观测资料通过模型参数与地球内部建立关系的数学框架。例如，若将一个均匀、无限、各向同性的弹性体作为地球模型来解释地震图，那么，从这样的解释可以得到的参数，最多也不过是 Lamé 常数 λ 和 μ，以及恒定的密度 ρ。另一方面，当模型为竖向不均匀时，则我们可以确定作为深度函数的 $\lambda(z)$，$\mu(z)$和 $\rho(z)$。当然，三维非均匀的和任意各向异性的介质，是最需要的模型，但计算起来费的力气太大了，所以很不实际。此外，它含有的参数，比我们从现有的资料所能希望阐明的参数要多。迄今为止，最多见的模型是一个竖向不均匀的半空间或球体。本书的中心放在这种模型中的面波(第七章)、自由振荡(第八章) 和体波(第九章)。

为了使读者对这几章有所准备，我们从基本的和有实际用途的原理 [例如互易定理和表示定理 (第二章)] 开始，这些定理可以应用于一般的弹性动力学问题。在第三章，我们求出集中内震源的表达式，并以此为出发点，发展地球中地震运动的理论。震源

机制比较专门的方面，放在后面的第十四章和第十五章。

对于一个地震震源最有用的表示方法就是跨越一个内表面两边的位移间断，这叫做位错模式。我们还要考虑转换的应变被规定在一个体积内的体源。

在第四章给出均匀介质中点位错源引起的地震运动的完整描述。利用固定在几何射线路径上的曲线坐标，把分析扩大到平稳变化的介质。这一章提供由体波确定地震断层面解的基础，还有一些其他的内容。

平面波的性质，例如在平界面上的反射和透射、相移、非均匀的波（很快消失的)、衰减、以及物理频散，在第五章详尽地讨论。在第六章，我们要解 Lamb 问题，其中点源产生的球面波同一个平面相互作用。由于这种相互作用，产生了三种类型的波：从界面直接反射的或穿过界面的波；沿着界面从源传向接收点的波(首波)；振幅随着离分界面的距离呈指数减小的 Rayleigh 型或 Stoneley 型的波。我们利用 Cagniard 方法和 Fourier 变换方法研究这些波，以便为第七章至第九章打下基础。第七章至第九章给出计算竖向非均匀结构中地震图的实际方法。

关于竖向非均匀介质的这三章的编排顺序(面波、自由振荡、体波)，反映了地震图的波动理论分析的历史发展以及分析的困难程度。基阶的 Love 波和 Rayleigh 波是最早用实际地球模型和地震的参数来定量理解其全部记录的波。体波的分析比较困难，部分原因是我们不能在波的路径上任意需要的位置上建立地震台，而只能建在其终点上。自由振荡的完全分析也比面波困难，但此时的困难是，处理包含几百个振型的长记录时，工作量很大。对于这三章中描述的一维非均匀地球模型，计算地震图的方法现已完全建立。

我们在第一卷中的最后一个问题是如何取得地震数据。在第十章，我们叙述了地震仪的原理，同时还描述了对于很大变化范围的频率、震源、震源一接收点距离的地震讯号和噪声，以便有

助于筹划一个给定实验的测试设备。最后这一章，对于任何具有某些经典物理知识（摆的性质和基础电路理论）的人，都是可以理解的。

第一卷是想作为现代地震学基本原理的独立著述。第二卷的五章涉及到种种专门问题，它们以第一卷为基础，包括现在用于资料分析的主要方法、反演理论、三维非均匀结构中的波传播、以及震源的运动学和动力学。

建议进一步阅读的文献

地震工程

Lomnitz, C., and E. Rosenblucth (editors). *Seismic Risk and Engineering Decisions*. Amsterdam:Elsevier, 1976.

Newmark, N. M., and E. Rosenbluth. *Fundamentals of Earthquake Engineering*, Englewood Cliffs, New Jersey: Prentice-Hall, 1971.

地震勘探

Dix, C. H. *Seismic Prospecting for Oil*. New York: Harper & Row, 1952.

Grant, F. S., and G. F. West. *Interpretation Theory in Applied Geophysics*. New York: McGraw-Hill, 1965.

Telford, W. M., L. P.Geldart, R. E. Sheriff, and D. A. Keys. *Applied Geophysics*. Cambridge Univ. Press, 1976.

用地震方法检测和识别核爆破

Bolt, B. A. *Nuclear Explosions and Earthquakes: The Parted Veil*. San Francisco: W. H. Freeman and Company, 1976.

Dahlman, O., and H. Israelson. *Monitoring Underground Nuclear Explosions*. Amsterdam: Elsevier Scientific Publishing Co., 1977.

Rodean, H. C. *Nuclear-Explosion Seismology*. Washington, D. C.: U. S. Atomic Energy Comm., 1971.

Thirlaway, H. I. S. Forensic scismology, *Quarterly Journal of the Royal Astronomical Society*, 14, 297-310, 1973.

地震预报

Panel on Earthquake Prediction of the Committee of Seismology. *Predicting Earthquakes: A Scientific and Technical Evaluation-with Implications for Society* Washington, D. C.: National Academy of Sciences 1976.

Panel on the Public Policy Implications of Earthquake Prediction. *Earthquake Prediction and Public Policy*. Washington, D. C.: National Academy of Sciences, 1975.

Press, F. Earthquake prediction. *Scientific American*. May 1975.

Rikitake, T. *Earthquake Prediction*. Amsterdam: Elsevier Scientific Publishing Co., 1976.

White, G. F., and J. E. Haas. *Assessment of Research on Natural Hazards*. Cambridge: MIT Press, 1975.

第二章　动力弹性学的基本定理

研究地球中地震运动的分析框架，至少必须包括下面三部分：震源的描述；运动一旦在某处发生便能传播出去的运动方程；把震源描述结合到为运动方程找出的特定解中去的理论。如果充分利用我们关于地震运动的各种设想而能使理论简化（尽管当这些设想不能成立时，这样一种理论可能把使用者引入歧途），那将是有益的。例如，有一个设想是，两组很小的运动可以叠加而相互没有非线性干涉。另一个设想是，某种物理源引起的地震运动，应当由该源和波传播介质的联合性质唯一地确定。这些和许多其他一般被地震学家们假定为正确的设想，都是关于具有线性应力-应变关系弹性介质的经典连续介质力学中无穷小运动性质的；这个理论几乎为整个这部教科书提供数学的框架。

地震学主要是一门观测科学，所以，解释地震图的能力是前进的基础。由于这个原因，需要知道关于在一部分介质运动中的哪些信息，就足以唯一地确定在另一部分介质中的可被观测到的运动。作为一个实际例子，我们常常需要知道如何表征震源（爆破或天然断层运动）和如何考虑地球自由表面上的边界条件，以便确定在一系列接收器的地方所造成的运动。幸好，对于弹性介质，这个问题有确定的解，因为给定的源条件（用体力）和边界条件，可以很容易地写成这样的形式以使得所产生运动只有一种。在给出问题的提法（即建立记法；定义位移、应变、引力、体力和应力；以及阐明对运动的限制）之后，我们要证明唯一性和互易性两个基本定理。互易性同 Green 函数一起，被用来获得以体力和边界条件来表示的介质中任一点运动的公式。这个表示方法在弹性动力学中是相当新的，这要归功于 Knopoff (1956) 和 De

Hoop(1958)，但在复数理论、势论和均匀介质的标量波动方程理论中也有许多熟知的类似情况。

用一般的正交曲线坐标系来表示弹性运动方程，常常是很有用的，这是因为，在许多情况下，(弯曲的)坐标面正是要在它上面惯常给定某种边界条件的面。利用一般正交系中位移、应力和应变的物理分量，我们给出位移-应力关系式和应变-位移关系式的推导。

初看来，本章似乎主要包括一些形式结果，即为了证明后面各章评述的特定解题方法的合理性，而必须马上建立的一些论证。但是，希望培养一种能力，能按自己的愿望去解决应用地震学问题的读者，将立刻面对着的问题是如何“建立”问题，也就是如何把震源的物理描述——以及计算在近处和（或）远处接收点产生的运动的一般问题——变为特定的数学问题。在大部分情况下，建立这类问题的能力，将取决于对通过方程（2.41)—(2.43）和(3.1)—(3.3)以各种形式给出的表示定理的掌握。在后面的各章中，我们将经常提到这些方程。

补充 2.1

表示定理实例

1. 如果$f(z)$是复变量z的一个解析函数，则

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\oint\frac{f(\zeta)d\zeta}{\zeta-z},$$

其中回路积分沿包围z点的任意路径C进行（在C内不许有f的奇点)。这个公式就是函数f的一个表示，它使我们只要知道f在C本身上的值，便能够求出C内任意处的f。

2. 如果$\phi(x, y, z)$满足 Poisson 方程$\nabla^2\phi=-4\pi\rho$，则

$$\phi(x)=\iiint_V\frac{\rho(\xi)dV(\xi)}{|x-\xi|},$$

其中V是包括所有对ϕ有贡献的密度分布ρ的体积。这也是ϕ的一个表示，但它不含有ϕ本身的值。

弹性动力学的表示定理，包含上面两种表示类型，并且还要体现对时间的依赖关系。

2.1 问题的建立

在描述连续介质中的运动和运动力学时，有两种不同的方法被广泛采用，这就是 Lagrange 描述法和 Euler 描述法。前者着重研究由其在某参考时间的初始位置所规定的特定质点的情况，后者着重研究无论哪一个质点所占据的特定空间位置。对于地震学中的大多数应用来说，线性弹性理论用 Lagrange 描述法来开展，在概念上比较简明，所以，它是我们几乎一直要采用的框架。最后，地震图是地球特定部分（即地震仪在设置期间所紧靠着的质点）运动的记录，所以，它直接是 Lagrange 运动的记录。

在本章我们将以笛卡尔坐标系(x_1, x_2, x_3)为工具，并且这里的所有张量都是笛卡尔张量。我们将位移这个词看作空间和时间的函数，并写作 $\mathbf{u}=\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$，它表示一质点在时间 t 相对于它在某个参考时间 t_0 所占据位置 $\mathbf{x}$ 的矢量距离。既然 $\mathbf{x}$ 不随时间改变，于是，质点速度是 $\partial \mathbf{u}/\partial t$，而质点加速度是 $\partial^2 \mathbf{u}/\partial t^2$。

不管介质是固体的还是液体的，弹性的还是非弹性的，我们都用应变张量来分析它的变形。如果最初在位置 $\mathbf{x}$ 的质点移到位置 $\mathbf{x}+\mathbf{u}$，则关系式 $\mathbf{u}=\mathbf{u}(\mathbf{x})$就用来描述位移场。为了审查最初在 $\mathbf{x}$ 附近的那部分介质的变形，我们需要知道最初在 $\mathbf{x}+\delta\mathbf{x}$ 的质点的新位置。这个新位置是 $\mathbf{x}+\delta\mathbf{x}+\mathbf{u}(\mathbf{x}+\delta\mathbf{x})$。任何变形都可能改变线元 $\delta\mathbf{x}$ 两端点间的相对位置。如果该变化为 $\delta\mathbf{u}$，则 $\delta\mathbf{x}+\delta\mathbf{u}$ 是新的矢量线元。将其端点间的差写出来，我们得到

$$\delta\mathbf{x}+\delta\mathbf{u}=\mathbf{x}+\delta\mathbf{x}+\mathbf{u}(\mathbf{x}+\delta\mathbf{x})-(\mathbf{x}+\mathbf{u}).$$

既然$|\delta\mathbf{x}|$为任意小，所以可把 $\mathbf{u}(\mathbf{x}+\delta\mathbf{x})$ 展开为 $\mathbf{u}+(\delta\mathbf{x}\cdot\nabla)\mathbf{u}$ 再加上可忽略的$|\delta\mathbf{x}|^2$项。于是，$\delta\mathbf{u}$ 通过下式而同 $\mathbf{u}$ 的梯度和初始线元 $\delta\mathbf{x}$ 有关，

$$\delta\mathbf{u}=(\delta\mathbf{x}\cdot\nabla)\mathbf{u} \text{ 或 } \delta u_i=\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\delta x_j. \tag{2.1}$$

补充2.2

记法

我们将用黑体字(如 $\mathbf{u}$, $\boldsymbol{\tau}$)表示矢量和张量场，而用脚标(如 u_i, τ_{kl})表示矢量和张量在直角坐标系中的分量。Jeffreys 1965 年的书，和 Jeffreys 与 Jeffreys 1972 的书的第 3 章，是关于笛卡尔张量性质的有用参考资料。

对于单位矢量(除去 $\boldsymbol{\nu}$, $\mathbf{l}$, $\mathbf{n}$, $\mathbf{b}$)，使用表示声调的符号(如 $\hat{\mathbf{x}}$)，标量乘积写作 $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}$，矢量乘积写作 $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$。

上面加点表示时间微商(如 $\dot{\mathbf{u}}=\partial\mathbf{u}/\partial t$, $\ddot{\mathbf{u}}=\partial^2\mathbf{u}/\partial t^2$)，脚标之间的逗号表示空间微商(如 $u_{i,j}=\partial u_i/\partial x_j$)。

本书完全遵守用重复脚标表示求和的约定，(如 $a_ib_i=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3=\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}$)，还经常使用 Kronecker 符号 δ_{ij} 和具有分量 ε_{ijk} 的轮换张量，

$$\delta_{ij}=0 \qquad 当 i\neq j,$$

$$\delta_{ij}=1 \qquad 当 i=j,$$

$$\varepsilon_{ijk}=0 \qquad 当 i, j, k 中任两个相等,$$

此外，

$$\varepsilon_{123}=\varepsilon_{312}=\varepsilon_{231}=-\varepsilon_{213}=-\varepsilon_{321}=-\varepsilon_{132}=1.$$

这些符号的最重要性质是

$$a_i=\delta_{ij}a_j,$$

$$\varepsilon_{ijk}a_jb_k=(\mathbf{a}\times\mathbf{b})_i,$$

并且它们有以下的关系：

$$\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{ilm}=\delta_{jl}\delta_{km}-\delta_{jm}\delta_{kl}.$$

只有当 $\varepsilon_{ijk}t_{jk}=0$ 时，二阶张量 $\mathbf{t}$ 才是对称的。

但是，若确定 $\mathbf{x}$ 附近的真实变形，并非张量 $u_{i,j}$ 的所有 9 个独立的分量都是需要的，因为一部分运动仅仅是由 $\mathbf{x}$ 附近的无穷小刚体转动产生的。所以，根据恒等式

$$(u_{i,j}-u_{j,i})\delta x_j=\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{jlm}u_{l,m}\delta x_k,$$

方程 (2.1)可写为

$$\delta u_i = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i})\,\delta x_j + \frac{1}{2}(\mathrm{curl}\,\boldsymbol{u} \times \delta \boldsymbol{x})_i, \qquad (2.2)$$

刚体转动的量为$\frac{1}{2}\mathrm{curl}\,\boldsymbol{u}$。

若$|u_{i,j}| \ll 1$，就能够把(2.2)式中的最后一项解释为刚体转动。如果位移梯度不是这个不等式意义下的"无穷小"，那我们就将不得不分析有限转动对$\delta \boldsymbol{u}$的贡献——这要困难得多，因为有限的转动既不能交换，也不能表示为矢量。

利用无穷小应变张量，按照定义它的分量为

$$e_{ij} \equiv \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}). \qquad (2.3)$$

这时，在任一线元δx_i上真实变形的效应，是将其端点的相对位置改变了$e_{ij}\delta x_j$。转动不影响线元的长度，而新长度是

$$\begin{aligned}
&|\delta \boldsymbol{x} + \delta \boldsymbol{u}| \\
&= (\delta \boldsymbol{x} \cdot \delta \boldsymbol{x} + 2\,\delta \boldsymbol{u} \cdot \delta \boldsymbol{u})^{\frac{1}{2}} \qquad (\text{略去 } \delta \boldsymbol{u} \cdot \delta \boldsymbol{u}) \\
&= (\delta x_i \delta x_i + 2\,e_{ij}\delta x_i \delta x_j)^{\frac{1}{2}} \qquad \left(\begin{array}{l}\text{这是根据(2.2)，并利用} \\ (\mathrm{curl}\,\boldsymbol{u} \times \delta \boldsymbol{x}) \cdot \delta \boldsymbol{x} = 0\end{array}\right) \\
&= |\delta \boldsymbol{x}|(1 + e_{ij}\nu_i\nu_j),
\end{aligned}$$

其中$\boldsymbol{\nu}$是单位矢量$\delta \boldsymbol{x}/|\delta \boldsymbol{x}|$。于是，初始时在$\boldsymbol{\nu}$方向的线元伸长应变是$e_{ij}\nu_i\nu_j$。

为了分析连续体内相邻质点间相互作用的内力，我们使用牵引力和应力张量概念。牵引力是个矢量，是作用于连续体内部某个面的单位面积上的力，数值上等于该面(单位面积)一边的质点作用于另一边质点的接触力。对于内部面上的一给定点，考虑作用于面上无穷小面积δS上的无穷小力$\delta \boldsymbol{F}$，并取当$\delta S \to 0$时$\delta \boldsymbol{F}/\delta S$的极限，我们把它定义为牵引力（参看图 2.1）。关于面S的单位法线$\boldsymbol{n}$，我们采用惯例，即$\delta \boldsymbol{F}$具有从$\boldsymbol{n}$所指一边物质作用于$\boldsymbol{n}$所由伸出一边物质的力的方向；这个牵引力表示为$\boldsymbol{T}(\boldsymbol{n})$。所以，在液体中，压力是$-\boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{T}(\boldsymbol{n})$。对于固体，剪切力可以穿过内部面而起作用，所以，$\boldsymbol{T}$不一定平行于$\boldsymbol{n}$。此外，牵引力的大小

当力为 $+\vec{n}\cdot\vec{T}(\vec{n})$ 时，为张力，叫牵引力.
当力为 $-\vec{n}\cdot\vec{T}(\vec{n})$ 时，为压力.

和方向依赖于承受接触力的面元 δS 的空间取向（但液体中某点的压力在所有方向上都一样）。为了理解某点的牵引力对空间取向的依赖关系，可考虑在房子外表面上的一点 P，如图 2.2 所示。对于在 P 点的墙面上的面积元，牵引力 $T(n_1)$ 为零（忽略大气压和风）；但对于在 P 点的墙内水平面积元，牵引力 $T(n_2)$ 可以很大。

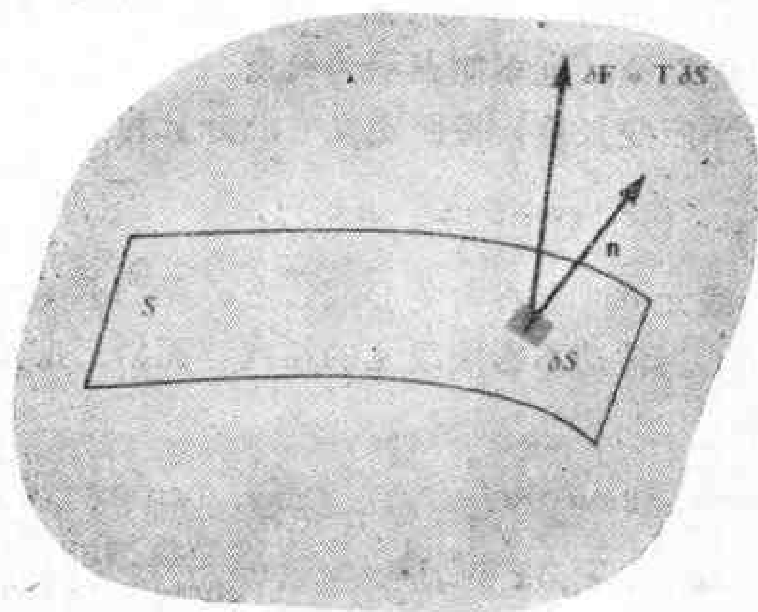


图 2.1

通过以 n 为法线的内部面 S 而作用于某点的牵引力 T 的定义。对于液体介质，压力应为 $-n\cdot T$

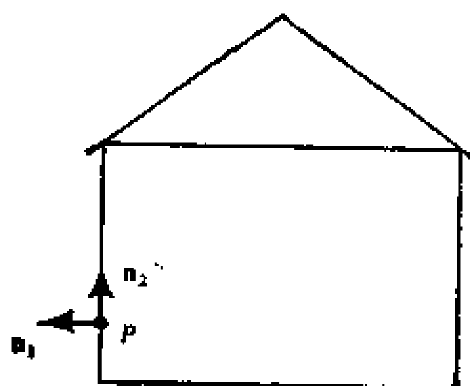


图 2.2

$T(n_1)\neq T(n_2)$

作用于固体或液体介质内质点上的力，不仅有相邻质点间的接触力，而且还有 (i) 不相邻质点间的力和 (ii) 由外部施加于介质本身的物理过程所产生的力。地球内质点间相互作用的引力，可以作为 (i) 类的例子。类型 (ii) 可用当一块磁铁在含铁介质外边移动时，它作用在掩藏于内部的铁质点的力来说明。我们把这些非接触力叫做体力，并用记号 $f(\boldsymbol{x},t)$ 表示作用于在某个参考时间处在初始位置 $\boldsymbol{x}$ 的单位体积质点的体力。考虑在 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\xi}$ 和 $t=\tau$ 作用于特定质点的脉冲力，常常是很有用的。(如果这个力是在 x_n 轴方向，则 $f_i(\boldsymbol{x},t)$ 比例于三维的 Dirac 函数 $\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\xi})$，它规定着脉冲的空间位置；比例于一维的 Dirac 函数 $\delta(t-\tau)$，它规定着脉冲的时间；而且比例于 Kronecker 函数 δ_{in}，它表示方向性，即当 $i\neq n$ 时，$f_i=0$。因此，体力分布由下式给定：

$$f_i(\boldsymbol{x},t)=A\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\xi})\delta(t-\tau)\delta_{in}, \qquad (2.4)$$

其中 A 是给定脉冲强度的常数。注意 f_i, $\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\xi})$ 和 $\delta(t-\tau)$ 的量纲分别是单位体积的力，1/单位体积和 1/单位时间。Kronecker 函数是无量纲的，所以 A 就有着一个脉冲的正确物理量纲（力×时间）。)

现在我们可以讨论作用在具有表面 S 的整个体积 V 的加速度、体力和牵引力的约束条件了（图2.3）。V 的质点的动量变化率等于作用在这些质点的力。我们得到

$$\frac{\partial}{\partial t}\iiint_V \rho\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t}dV=\iiint_V \boldsymbol{f}dV+\iint_S \boldsymbol{T}(\boldsymbol{n})dS. \qquad (2.5)$$

这个关系是建立在 Lrgrange 描述基础上的，V 和 S 随质点一起移动。因为质点的质量 ρdV 不随时间改变，所以左边可写为 $\iiint_V \rho\left(\frac{\partial^2 \boldsymbol{u}}{\partial t^2}\right)dV$。

(2.5) 的第一个用途是得到函数关系 $\boldsymbol{T}=\boldsymbol{T}(\boldsymbol{n})$ 的明确形式和引进应力张量。设介质内某一质点 P 的加速度、体力和牵引力，

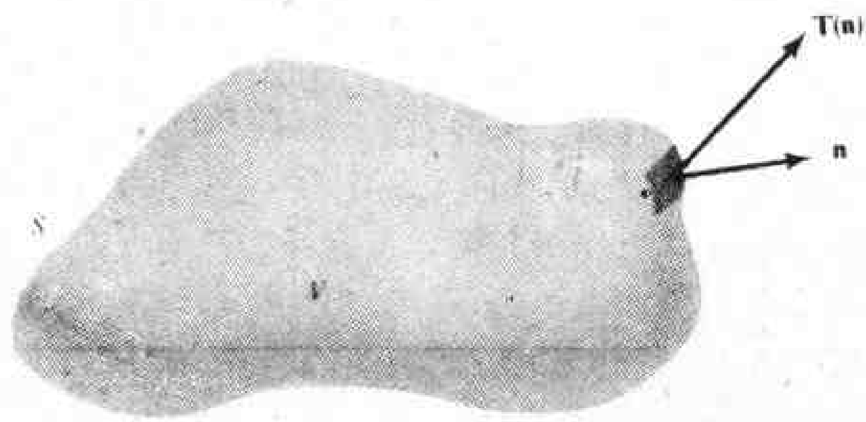


图 2.3
以 S 为表面、体积为 V 的连续介质

都是非奇异的。用一小体积ΔV 包围这个质点。我们来考虑随着ΔV 收缩至P，(2.5) 中三项的相对大小。体积分将具有ΔV 的量级，而面积分具有在 ΔV 的表面所取的量级$\iint_s dS$。一般说，这个积分的量级为 $(\Delta V)^{2/3}$，比ΔV 趋于零要慢些。用$\iint_s dS$ 除 (2.5)，于是有

$$\frac{\left|\iint \boldsymbol{T} dS\right|}{\iint dS} = O(\Delta V^{1/3}) \to 0, \quad 当\Delta V \to 0. \tag{2.6}$$

现在假定ΔV 是一圆盘，其相反两个面朝外的法线为 $\boldsymbol{n}$ 和$-\boldsymbol{n}$（见图 2.4），边缘的面积可以忽略。这时，方程 (2.6) 意味着下列结果：

$$\boldsymbol{T}(-\boldsymbol{n}) = -\boldsymbol{T}(\boldsymbol{n}). \tag{2.7}$$

然后，假定ΔV 是一个小四面体，它的三个面在坐标面内（见图 2.5），第四个面向外的法线为 $\boldsymbol{n}$。这时，方程 (2.6) 意味着，当$\Delta V \to 0$ 时，有

$$\frac{\boldsymbol{T}(\boldsymbol{n})ABC + \boldsymbol{T}(-\hat{x}_1)OBC + \boldsymbol{T}(-\hat{\boldsymbol{x}}_2)OCA + \boldsymbol{T}(-\hat{x}^3)OAB}{ABC+OBC+OCA+OAB} \to 0, \tag{2.8}$$

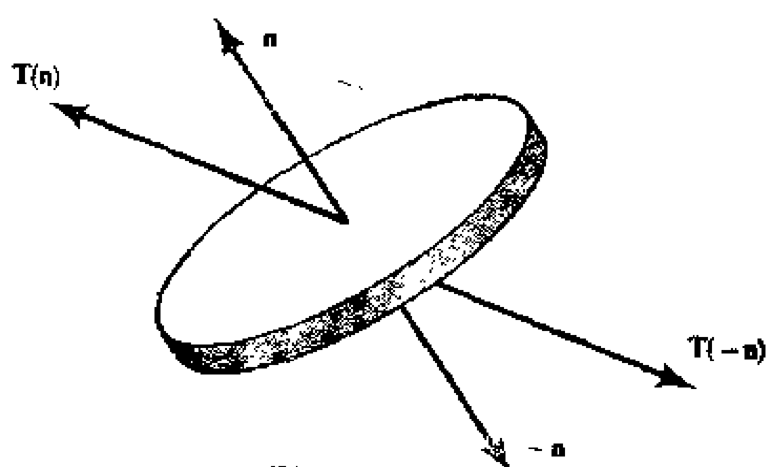


图 2.4
受有应力的介质内小圆盘

在这里 ABC 等符号代表三角形的面积。可以从几何上证明，$\boldsymbol{n}$ 的分量由 $(n_1, n_2, n_3) = (OBC, OCA, OAB)/ABC$ 给出。因此，(2.7) 和 (2.8) 给出

$$\boldsymbol{T}(\boldsymbol{n}) = \boldsymbol{T}(\hat{\boldsymbol{x}}_j) n_j, \tag{2.9}$$

这个牵引力 $\boldsymbol{T}(\boldsymbol{n})$ 与 $\boldsymbol{n}$ 之间的一个特殊而重要的关系式，是用作用于坐标面上的三个牵引力表示的。(2.7) 和 (2.9) 的性质对静态介质是无关紧要的，但我们已证明，即使在加速过程中，它们也是正确的。

应力张量是通过定义 9 个量

$$\tau_{kl} = T_l(\hat{\boldsymbol{x}}_k)$$

引进的，τ_{kl} 是垂直于 k 轴的平面上的牵引力的 l 分量，它是由 x_k 较大一边的物质作用于 x_k 较小一边的物质而产生的。所以，

$$T_i = \tau_{ji} n_j. \tag{2.10}$$

(2.5) 的第二个用途是求一般质点的运动方程。应用 (2.10) 和 Gauss 散度定理，得

$$\iint_S T_i dS = \iint_S \tau_{ji} n_j dS = \iint_V \tau_{ji,j} dV, \tag{2.11}$$

我们知道，对一般体积有

$$\iiint_V (\rho \ddot{u}_i - f_i - \tau_{ji,j}) dV = 0. \tag{2.12}$$

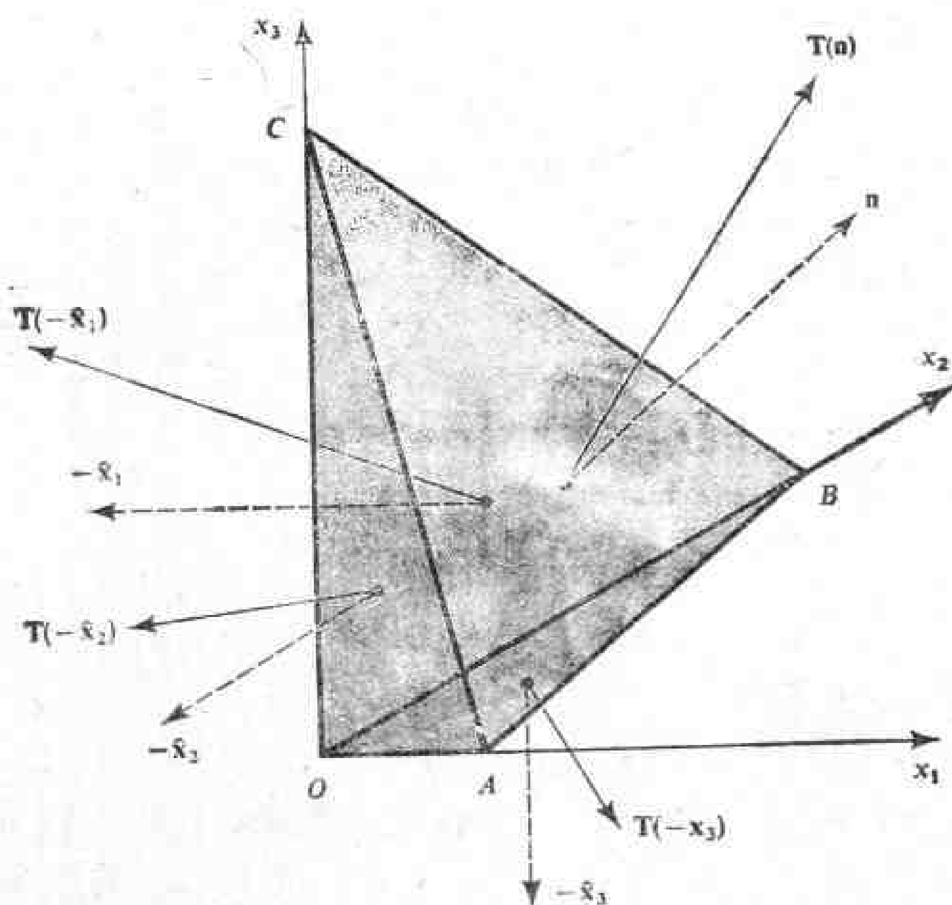


图 2.5

小四面体 $OABC$ 的三个平面在坐标面内，向外的法线为 $-\hat{x}_j$ ($j=1$, 2,3)，第四个面的法线为 n

这个被积函数必须在任何连续处都为零，否则，就会找到一个体积V违反（2.12），因此，

$$\rho\ddot{u}_i = f_i + \tau_{ji,j}, \tag{2.13}$$

这是我们的第一种形式的运动方程。

对运动力学的另一个约束是，使相对于坐标原点的角动量的变化率等于作用在V内质点上的力矩。于是

$$\frac{\partial}{\partial t}\iiint_V \boldsymbol{X}\times\rho\dot{\boldsymbol{u}}\,dV = \iiint_V \boldsymbol{X}\times\boldsymbol{f}dV + \iint_S \boldsymbol{X}\times\boldsymbol{T}dS, \tag{2.14}$$

其中 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{x}+\boldsymbol{u}$。由于 $\partial\boldsymbol{x}/\partial t$，$\dot{\boldsymbol{u}}\times\dot{\boldsymbol{u}}$ 以及 $\partial(\rho dV)/\partial t$ 都是零，故左边为 $\iiint_V \boldsymbol{X}\times\rho\ddot{\boldsymbol{u}}\,dV$。利用在补充 2.3 中发展的（2.13）的

严格解释，有

补充 2.3

Euler 还是 Lagrange?

仔细审查一下 Gauss 定理在（2.11）中的应用，就看到我们的 Lagrange 方法不适于（2.11）至（2.13）中的空间微分。一般说，在时间 t，构成 S 的那些质点已经移开了它们在参考时间 t_0的位置，使得

$$\iint_S \tau_{ji} n_j dS = \iiint_V \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{X}} \tau_{ji} dV,$$

其中 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{x}+\boldsymbol{u}$，对 V 中的点在时间 t 必须进行的空间微分运算是 $\frac{\partial}{\partial X_j}$。因此，对于有限运动，连续体中的精确运动方程用我们的记号是

$$\rho \frac{\partial^2}{\partial t^2} u_i = f_i + \frac{\partial}{\partial X_j} \tau_{ji}. \qquad \text{((2.13)的严格形式)}$$

而 Euler 方法则把场变量直接作为 $\boldsymbol{X}$ 和 t 的函数进行讨论（取 $\boldsymbol{u}$ 为在 $\boldsymbol{X}$ 和 t 的质点，离开其在 t_0时的位置 $\boldsymbol{x}$ 的位移），τ_{ji}应是在$(\boldsymbol{X},t)$ 的应力分量。这样做有个优点，使人能用独立变量进行演算，这些独立变量对解释运动方程的右边是很自然的。但它也有缺点，即在表示质点特性的变化率时，很繁。例如，在 $(\boldsymbol{X},t)$ 的质点速度 $\boldsymbol{V}$ 很难用位移场 $\boldsymbol{u}=\boldsymbol{u}(\boldsymbol{X},t)$ 来表示：设想在时间 δt内走过的距离是

$$\boldsymbol{V}\delta t=\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{V}\delta t,\ t+\delta t)-\boldsymbol{u}(\boldsymbol{X},t),$$

因而

$$U_i=\left(\frac{\partial u_i}{\partial t}\right)_{X\,\text{固定}}+U_j\left(\frac{\partial u_i}{\partial X_j}\right)_{t\,\text{固定}},$$

这是个求解 $\boldsymbol{V}$ 的隐式方程（$\boldsymbol{V}$ 的分量出现在方程的两边），一旦质点速度求出，则在 $(\boldsymbol{X},t)$ 处的加速度由导数 $\partial \boldsymbol{V}/\partial t+(\boldsymbol{V}\cdot\nabla)\boldsymbol{V}$ 所决定。

在地震学中，Lagrange 方法和 Euler 方法间的区别，很少需要去考虑，因为位移、应变、加速度和应力的空间起伏的波长远远大于质点位移的幅度。在此情况下，究竟是在固定位置上（Euler 方法）还是对于特定质点（Lagrange 方法）来求空间梯度，并无实际差别。我们愿意着重于 Lagrange 方法，部分原因是，这样做使质点速度和

质点位移间的关系简单一些，$V=\frac{\partial}{\partial t}u(x,t)$。在流体力学中，将质点位移作为场变量兴趣不大，所以 Euler 方法比较有用。

最后要说明，"Euler 方法"和"Lagrange 方法" 都是由 Leonhard Euler 发展起来的。

$$\iiint_V e_{ijk}X_j\frac{\partial}{\partial X_l}\tau_{lk}dV=\iiint_V e_{ijk}X_j(\rho\ddot{u}_k-f_k)dV$$

$$=\iint_S e_{ijk}X_jT_kdS \qquad (据(2.14))$$

$$=\iint_S e_{ijk}X_j\tau_{lk}n_ldS. \qquad (据(2.10))$$

将散度定理应用于这个面积分，并利用 $\partial X_j/\partial X_l=\delta_{jl}$，我们得到，对任何体积$V$都有

$$\iiint_V e_{ijk}\tau_{jk}dV=0,$$

这意味着处处有 $e_{ijk}\tau_{jk}=0$，因此，应力张量是对称的：

$$\tau_{kj}=\tau_{jk}. \tag{2.15}$$

用这个基本结果，我们可把牵引力分量的公式最后表述为

$$T_i=\tau_{ij}n_j, \tag{2.16}$$

而运动方程为

$$\rho\ddot{u}_i=f_i+\tau_{ij,j}. \tag{2.17}$$

这里的空间微商应当对于 X_j进行，但（如在补充 2.3 中所讨论的）对于 x_j的微商，在地震学中通常是足够的，所以，以后我们就这样假定。

2.2 应力-应变关系和应变能函数

如果一种介质具有自然状态（应变和应力都为零），并且当取消施加的力时，它将恢复到这种状态，我们就说它是弹性的。在加载影响下，应力和应变一起变化，而它们之间的关系——本构

关系，是介质的一个重要特征。下面我们用热力学论据证明这一关系的存在。这个关系本身，是可以用实验测定的，三百多年前Robert Hooke的“弹性物体”测量，曾导致他得出应力正比于应变的结论。他关于这个问题的提法有点含混不清，因为牵引力和张量的现代概念那时还不存在。在十九世纪初期，Augustin Cauchy第一个发展了我们现代关于牵引力的许多概念，显然他理解许多今天用张量比较容易表达的结果。直到本世纪，张量才普遍应用。Hooke定律的现代推广是，应力张量的每个分量是应变张量的所有分量的线性组合，即存在常数 c_{ijkl}，使得有

$$\tau_{ij}=c_{ijpq}e_{pq}. \tag{2.18}$$

遵从本构关系（2.18）的物体，叫做线性弹性体。量 C_{ijkl} 是四阶张量的分量，并有对称性：

$$c_{jipq}=c_{ijpq} \quad (\text{因为 } \tau_{ji}=\tau_{ij}), \tag{2.19}$$

$$c_{ijqp}=c_{ijpq} \quad (\text{因为 } e_{qp}=e_{pq}). \tag{2.20}$$

根据热力学论据，$c_{pqij}=c_{ijpq}$ 也是正确的，我们现在来证明。

设想一弹性体具有以 S 为表面的体积 V。热力学第一定律说，物体具有的内能可以随物体的变形而改变，能量平衡为

$$\text{做机械功的速率}+\text{加热的速率}=(\text{运动能}+\text{内能})\ \text{增加的速率}. \tag{2.21}$$

让我们把每一项都分开来进行分析。

(1) 机械功的速率由下式给出：

$$\iiint_V \boldsymbol{f}\cdot\dot{\boldsymbol{u}}\,dV+\iint_S \boldsymbol{T}\cdot\dot{\boldsymbol{u}}\,dS$$

$$=\iiint_V [f_i\dot{u}_i+(\tau_{ij}\dot{u}_i)_{,j}]dV$$

［据（2.16）和Gauss散度定理］

$$=\iiint_V (\rho\dot{u}_i\ddot{u}_i+\tau_{ij}\dot{u}_{i,j})dV \quad [\text{据}(2.17)]$$

$$=\frac{\partial}{\partial t}\iiint_V \frac{1}{2}\rho\dot{u}_i\dot{u}_i dV+\iiint_V \tau_{ij}\dot{e}_{ij}dV$$

（根据 τ_{ij} 和 e_{ij} 对称）. (2.22)

(2) 令 $\boldsymbol{h}(\boldsymbol{x},t)$ 为热流，于是 $\boldsymbol{h}\cdot\boldsymbol{n}$ 是沿 $\boldsymbol{n}$ 方向通过垂直于 $\boldsymbol{n}$ 的面积元的热传导（每单位面积）速率。令每单位体积的热量输入为 $\mathscr{Q}=\mathscr{Q}(\boldsymbol{x},t)$，这时，加热的速率由下式给出

$$-\iint_S \boldsymbol{h}\cdot\boldsymbol{n}dS=\frac{\partial}{\partial t}\iiint_V \mathscr{Q}dV, \tag{2.23}$$

并且显然 $\dot{\mathscr{Q}}=-\nabla\cdot\boldsymbol{h}$。

(3) 运动能增加的速率由下式给出：

$$\frac{\partial}{\partial t}\iiint_V \frac{1}{2}\rho\dot{u}_i\dot{u}_i dV. \tag{2.24}$$

(4) 令 $\mathscr{U}$ 为每单位体积的内能。根据 (2.21) 至 (2.24)，我们得到

$$\dot{\mathscr{U}}=-h_{i,i}+\tau_{ij}\dot{e}_{ij},$$

或

$$\dot{\mathscr{U}}=\dot{\mathscr{Q}}+\tau_{ij}\dot{e}_{ij}. \tag{2.25}$$

如果 $\mathscr{U}$，$\mathscr{Q}$ 和 e_{ij} 是作为偏离于热力学平衡态的小扰动而测量的，则 (2.25) 等效于

$$\begin{aligned}d\mathscr{U}&=d\mathscr{Q}+\tau_{ij}de_{ij}\\&=\mathscr{T}d\mathscr{S}+\tau_{ij}de_{ij}\ （对可逆过程），\end{aligned} \tag{2.26}$$

其中 $\mathscr{S}$ 是单位体积的熵，$\mathscr{T}$ 是绝对温度。方程 (2.26) 意味着，熵和应变分量是用以完全而唯一地确定内能的状态变量。特别是，内能不依赖于应变随时间变化的历史。

有时利用应变分量的函数 $\mathscr{W}$，是有益的。在这种情况下，应力为

$$\tau_{ij}=\frac{\partial\mathscr{W}}{\partial e_{ij}}. \tag{2.27}$$

具有这种性质的函数，叫做应变能函数。根据 (2.26)，可写出形式结果

$$\tau_{ij}=\left(\frac{\partial \mathscr{U}}{\partial e_{ij}}\right)_{\mathscr{S}}. \tag{2.28}$$

等式 $\tau_{ij}=(\partial\mathscr{F}/\partial e_{ij})_{\mathscr{T}}$ 也是正确的，其中 $\mathscr{F}=\mathscr{U}-\mathscr{T}\mathscr{S}$ 是单位体积的自由能（$d\mathscr{F}=-\mathscr{S}d\mathscr{T}+\tau_{ij}de_{ij}$）。如果变形过程发生得很慢，可以作为恒温过程，就象在某些构造过程中那样，则由自由能的变化形成 τ_{ij} 是很自然的。这时可以选取 $\mathscr{W}=\mathscr{F}$。

但是，如果变形过程是个绝热过程，使得 $h=0$ 和 $\dot{\mathscr{Q}}=0$，则伴随有应变变化的实际 $\mathscr{U}$ 变化，发生在恒熵下，这样我们就可以选取 $\mathscr{W}=\mathscr{U}$，并应用（2.28）。这通常是地震学中对于所有大于几毫米的波长的情形，因为这时岩石热扩散的时间常数（距离^2/扩散系数）比地震波的周期（波长/速度）长得多。若不另外加以说明，我们总是假定绝热条件，以使应变能函数的存在得到保证。

把应变能函数的性质同 Hooke 定律结合起来，我们求得

$$\frac{\partial\mathscr{W}}{\partial e_{ij}}=\tau_{ij}=c_{ijpq}e_{pq}, \tag{2.29}$$

它意味着

$$c_{pqij}=c_{ijpq}\qquad\left(据\frac{\partial^2\mathscr{W}}{\partial e_{ij}\partial e_{pq}}=\frac{\partial^2\mathscr{W}}{\partial e_{pq}\partial e_{ij}}\right). \tag{2.30}$$

由于 $\mathscr{W}$ 的所有一次微商都是应变分量的（一阶）齐次方程，并且可以把自然状态的 $\mathscr{W}$ 取为零，所以，$\mathscr{W}$ 本身一定是下列形式的（二阶）齐次方程

$$\mathscr{W}=d_{ijpq}e_{ij}e_{pq}. \tag{2.31}$$

这个二次方程同 $\frac{1}{2}(d_{ijpq}+d_{pqij})e_{ij}e_{pq}$ 是一样的，但是给出 τ_{ij} 的（2.31）的微商表明，$(d_{ijpq}+d_{pqij})=c_{ijpq}$，因此，严格讲，应变能函数为

$$\mathscr{W}=\frac{1}{2}c_{ijkl}e_{ij}e_{kl}=\frac{1}{2}\tau_{ij}e_{ij}. \tag{2.32}$$

在绝热和恒温条件下，除自然状态（此时$\mathscr{W}=0$）外，应变能函数是正的，因而$\frac{1}{2}c_{ijkl}e_{ij}e_{kl}$是个正的有界二次式（由于我们假定自然状态是稳定的，所以$\mathscr{W}\geqslant 0$）。

c_{ijkl}与应变无关，这就是它们被叫做“弹性常数”的原因，但事实上它们是地球中位置的函数。地震学中所用的弹性理论，在很大程度上讨论的是非均匀介质，尤其是各向同性的球对称介质。一般说，(2.19)、(2.20) 和 (2.30)的对称性，把独立分量c_{ijkl}的数目由 81 个减少到 21 个。在各向同性介质情况下，因为$\mathbf{c}$必定是各向同性的，所以，情形大大简化。可以证明（Jeffreys and Jeffreys，1972)，具有像$\mathbf{c}$这样对称性的最一般各向同性四阶张量有下列形式：

$$c_{ijkl}=\lambda\delta_{ij}\delta_{kl}+\mu(\delta_{ik}\delta_{jl}+\delta_{il}\delta_{jk}). \tag{2.33}$$

它只包含两个叫做 Lamé 常数的独立常数λ和μ。

须注意，我们在本节所得的结果，是限定在偏离于应变和应力都为零的参考态的小扰动的情况。在地球内部，自身重力造成的压力高达一百万巴左右。即使假定地球物质处于零应变和零应力状态，由于这个压力产生的应变不是小量，所以，本节的结果也不能直接应用于地震学。使用这个参考态时，必须用应力-应变为非线性关系的有限应变理论进行研究。另外一个办法就是选取地震前的静态平衡形状为参考态，这是地震学中常用的做法。按照定义，参考态是零应变态，但现在初始应力不是零，并且用应变和应力增量之间的线性关系来研究地震运动。所以，应力在零应变时为$\boldsymbol{\sigma}^0$，在非零应变时为$\boldsymbol{\sigma}^0+\boldsymbol{\tau}$，其中$\tau_{ij}=c_{ijkl}e_{kl}$，$\sigma^0_{ij}$可以具有与分量$c_{ijkl}$相同的数量级(约一百万巴)。

现在，我们继续忽略初始应力$\boldsymbol{\sigma}^0$的影响。这个简化的正确性在第八章进行证明，在那里正确地考虑了初始应力并简要评述了需要修正的理论问题（见补充 8.5)。为定量表示自身重力的效应，在第八章我们将采用 Euler 方法。

2.3 唯一性定理和互易性定理

很自然，我们要转入唯一性讨论（对于以 V 为体积、以 S 为表面的物体内位移场 $\boldsymbol{u}$）和关于可以引起运动的方法的某些一般说明。由于位移在体积 V 内必须满足(2.17)，所以施加的体力将引起位移场，正如施加在表面 S 上的牵引力将引起位移场一样。我们要证明，给定 V 内的体力和整个 S 上的牵引力，便足以唯一地确定将在 V 内由给定的初始条件所发展起来的位移场。另一种方法来给定 S 对位移的影响是给定（S 上）位移本身而不是牵引力的边界条件，例如，S 可以是刚性的。首先，S 上的牵引力和 S 上的位移，看来似乎是 V 内位移场的两种独立的性质，其实不然。为了直观地理解 2.3 节至 2.5 节，重要的是能够理解，S 上的牵引力决定 S 上的位移，反之亦然。

唯一性定理

在时间 t_0 之后，以 S 为表面的体积 V 内的位移 $\boldsymbol{u}=\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},t)$，由 V 内 t_0 时质点的初始位移和速度值，以及所有 $t\geqslant t_0$ 时的 (i)施加于整个 V 上的体力 $\boldsymbol{f}$ 和热 $\mathscr{Q}$；(ii)S 的任一部分 S_1 上的牵引力 $\boldsymbol{T}$ 和(iii)S的其余部分 $S_2=S-S_1$ 上的位移（S_1或 S_2 都可以是整个 S)的数值，唯一地确定。

证明

设 $\boldsymbol{u}_1$ 和$\boldsymbol{u}_2$ 是满足同样初始条件、并由同样(i)—(iii)的值引起的 $\boldsymbol{u}$ 的任意解，则$\boldsymbol{U}=\boldsymbol{u}_1-\boldsymbol{u}_2$ 是有零初始条件，由零体力、零供热、S_1 上零牵引力和S_2 上 $\boldsymbol{U}=0$ 所引起的位移。剩下的就是证明，对于 $t>t_0$，在整个体积 V 内，有$\boldsymbol{U}=0$。

在$t\geqslant t_0$ 时，对 V，S_1 和 S_2 所做机械功的速率显然为零（见(2.22)）。(2.22)的第三个等式可以从 t_0 积分到 t，初始条件为零，并利用应变能函数（$\boldsymbol{U}$ 涉及绝热变化），于是有

$$\iiint_V \frac{1}{2}\rho \dot{U}_i \dot{U}_i dV + \iiint_V \frac{1}{2} c_{ijkl} U_{i,j} U_{k,l} dV = 0 .$$

运动能和应变能都是正的有限值，所以，对于 $t \geqslant t_0$ 有 $\dot{U}_i = 0$，但在 $t = t_0$ 时有 $U_i = 0$，故对于 $t \geqslant t_0$ 的整个体积 V 有 $U_i = 0$。

补充 2.4

"齐次的"一词的用法，它对方程和边界条件的应用

弹性位移方程是 $\boldsymbol{L}(\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{f}$，其中 $\boldsymbol{L}$ 是对于 $\boldsymbol{u}$ 的分量的矢量微分算子：

$$(\boldsymbol{L}(\boldsymbol{u}))_i \equiv \rho \ddot{u}_i - (c_{ijkl} u_{k,l})_{,j} .$$

如果体力不存在，则 $\boldsymbol{u}$ 的方程 $\boldsymbol{L}(\boldsymbol{u}) = 0$ 叫做齐次的。表面 S 上的齐次边界条件是指，或是位移，或是牵引力，在表面的每一点上都是零。

这个术语使人联想起，线性代数中，含有 n 个未知数的一组 n 个方程的形式 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = 0$，也叫做齐次的。这里 $\boldsymbol{x}$ 是列向量，$\boldsymbol{A}$ 是 $n \times n$ 矩阵。大家知道，非平凡解($\boldsymbol{x} \neq 0$)可以存在，但仅仅是当 $\boldsymbol{A}$ 有特殊性质时(即零行列式)。相应的动力弹性学结果是，运动可以在不受体力、并在 V 表面具有齐次边条件的有限弹性体 V 内发生。这就是物体的自由振荡或简正振型，它们只能发生在一定频率上。详见第八章。

互易性定理

我们来叙述并证明弹性体 V 中位移的一对解之间的几个一般关系。

假定 $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}, t)$ 是这些位移场中的一个，并且 $\boldsymbol{u}$ 是由体力 $\boldsymbol{f}$ 和 S 上的边界条件以及 $t = 0$ 时的初始条件所造成的。令 $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}, t)$是由体力 $\boldsymbol{g}$ 和一般来说与 $\boldsymbol{u}$ 的条件不同的边界条件和初始条件(在 $t = 0$)造成的另一个位移场。为区分这两种情况下垂直于 $\boldsymbol{n}$ 的表面上的牵引力，我们用符号 $\boldsymbol{T}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{n})$ 表示相应于位移 $\boldsymbol{u}$ 的牵引力，$\boldsymbol{T}(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{n})$表示相应于位移 $\boldsymbol{v}$ 的牵引力。

首先要写出的 $\boldsymbol{u}$ 和 $\boldsymbol{v}$ 之间的互易关系是

$$\iiint_V (\boldsymbol{f}-\rho\ddot{\boldsymbol{u}})\cdot\boldsymbol{v}\,dV+\iint_S \boldsymbol{T}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{n})\cdot\boldsymbol{v}\,dS$$

$$=\iiint_V (\boldsymbol{g}-\rho\ddot{\boldsymbol{v}})\cdot\boldsymbol{u}\,dV+\iint_S \boldsymbol{T}(\boldsymbol{v},\boldsymbol{n})\cdot\boldsymbol{u}\,dS. \qquad (2.34)$$

这个结果是 Betti 给出的。它可以很容易证明。将(2.17)和(2.16)代入，然后应用散度定理，把左边变为 $\iiint_V c_{ijkl}v_{i,j}u_{k,l}dV$，同样，把右边变为 $\iiint_V c_{ijkl}u_{i,j}v_{k,l}dV$，根据对称性 $c_{ijkl}=c_{klij}$，(2.34)成立。

注意，Betti 定理不涉及 $\boldsymbol{u}$ 或 $\boldsymbol{v}$ 的初始条件。而且，即使 $\boldsymbol{u}$，$\ddot{\boldsymbol{u}}$，$\boldsymbol{T}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{n})$ 和 $\boldsymbol{f}$ 是在 t_1 时赋值，而 $\boldsymbol{v}$，$\ddot{\boldsymbol{v}}$，$\boldsymbol{T}(\boldsymbol{v},\boldsymbol{n})$ 和 $\boldsymbol{g}$ 是在 t_2 时赋值，它仍然是对的。如果我们选取 $t_1=t$ 和 $t_2=\tau-t$，并且在时间范围 0 至 τ 上对(2.34)进行积分，则加速度项变为只依赖于初值和终值的项，因为

$$\int_0^\tau \rho\{\ddot{\boldsymbol{u}}(t)\cdot\boldsymbol{v}(\tau-t)-\boldsymbol{u}(t)\cdot\ddot{\boldsymbol{v}}(\tau-t)\}dt$$

$$=\rho\int_0^\tau \frac{\partial}{\partial t}\{\dot{\boldsymbol{u}}(t)\cdot\boldsymbol{v}(\tau-t)+\boldsymbol{u}(t)\cdot\dot{\boldsymbol{v}}(\tau-t)\}dt$$

$$=\rho\{\dot{\boldsymbol{u}}(\tau)\cdot\boldsymbol{v}(0)-\dot{\boldsymbol{u}}(0)\cdot\boldsymbol{v}(\tau)+\boldsymbol{u}(\tau)\cdot\dot{\boldsymbol{v}}(0)-\boldsymbol{u}(0)\cdot\dot{\boldsymbol{v}}(\tau).$$

如果在某个时间 τ_0 之前，$\boldsymbol{u}$ 和 $\boldsymbol{v}$ 在整个 V 内处处为零(因而对于 $\tau\leqslant\tau_0$，也有 $\dot{\boldsymbol{u}}=\dot{\boldsymbol{v}}=0$)，那么，褶积

$$\int_{-\infty}^{\infty}\rho[\ddot{\boldsymbol{u}}(t)\boldsymbol{v}(\tau-t)-\boldsymbol{u}(t)\ddot{\boldsymbol{v}}(\tau-t)]dt$$

为零。对于其过去为静止的位移场，我们就由 Betti 定理推出一个重要结果，即

$$\int_{-\infty}^{\infty}dt\iiint_V\{\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},t)\cdot\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x},\tau-t)-\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x},\tau-t)\cdot\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x},t)\}dV$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} dt \iint_S \{ \boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}, \tau - t) \cdot \boldsymbol{T}(\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}, t), \boldsymbol{n}) - \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}, t) \cdot \boldsymbol{T}(\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}, \tau - t), \boldsymbol{n}) \} dS. \tag{2.35}$$

补充 2.5

对比

重新整理 Betti 关系式(2.34)，给出

$$\iiint_V [v_i(c_{ijkl}u_{k,l})_{,j} - u_i(c_{ijkl}v_{k,l})_{,j}] dV$$

$$= \iint_S [v_i T_i(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{n}) - u_i T_i(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{n})] ds,$$

这是弹性波动方程中二次空间微商的向量定理，它类似于对于标量和 Laplace 算符的 Green 定理

$$\iiint_V (\psi \nabla^2 \phi - \phi \nabla^2 \psi) \, dV = \iint_S \left(\psi \frac{\partial \phi}{\partial \eta} - \phi \frac{\partial \psi}{\partial \eta} \right) dS.$$

Green 定理是研究象 $\nabla^2 \phi = -4\pi\rho$ 这类非齐次方程的工具。我们将利用 Betti 定理研究弹性波动方程，其中的非齐次性是体力项。

在 Dirichlet 问题(S 上的势为零)与具有刚性边界的弹性问题之间，以及 Neumann 问题(S上的$\frac{\partial \phi}{\partial n}$为零) 与无牵引力的边界之间，有许多更进一步的类似处。

2.4 把 Green 函数引入弹性动力学

本章和下一章的主要目的是，逐步给出典型地出现于地震学中的位移表示式。这种表示式就是用引起运动的量来表示(在空间和时间的一般点上)位移的公式，并且(在唯一性定理中)我们已经看到，这些量是体力和施加于所讨论弹性体表面的牵引力或位移。对于地震断裂，震源的复杂性在于，它展布在有限的断层面(或有限的体积)和有限的时间上，并且一般说来，它引起的 (在震源处) 运动有着变化的方向和强度。我们将发现，表示定理其实只不过

是一种记帐的方法，用这种方法，实际震源模型引起的位移，是由最简单的震源所产生的位移综合而成的，这个震源就是精确地集中在一定的空间和时间上的单一方向单位脉冲。

这种简单源引起的位移场，是弹性动力学的 Green 函数。如果单位脉冲施加于 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\xi}$，$t=\tau$ 和 n 方向（见 (2.4)，取 $A=$ 具有脉冲量纲的单位常数），则我们用 $G_{in}(\boldsymbol{x},t;\boldsymbol{\xi},\tau)$ 表示在一般点 $(\boldsymbol{x},t)$ 的位移的第 i 个分量。显然，这个 Green 函数是张量（我们将始终用笛卡尔张量进行演算，因此不去区分张量与并矢），它依赖于接收点和源点的坐标，并在整个 V 内满足

$$\rho\frac{\partial^2}{\partial t^2}G_{in}=\delta_{in}\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\xi})\,\delta(t-\tau)+\frac{\partial}{\partial x_j}\left(c_{ijkl}\frac{\partial}{\partial x_l}G_{kn}\right). \tag{2.36}$$

我们将一律采用下列初始条件，即对于 $t\leqslant\tau$ 和 $\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{\xi}$ 时，$\boldsymbol{G}(\boldsymbol{x},t;\boldsymbol{\xi},\tau)$ 和 $\frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{G}(\boldsymbol{x},t;\boldsymbol{\xi},\tau)$ 为零。要唯一地规定 $\boldsymbol{G}$，还得说明 S 上的边界条件。在不同的应用中，我们将利用各种不同的边界条件。

如果边界条件不依赖于时间（例如 S 总是刚性的），则时间原点可以任意移动。由(2.36)我们看到，$\boldsymbol{G}$ 只通过组合 $t-\tau$ 而依赖于 t 和 τ。所以

$$\boldsymbol{G}(\boldsymbol{x},t;\boldsymbol{\xi},\tau)=\boldsymbol{G}(\boldsymbol{x},t-\tau;\boldsymbol{\xi},0)=\boldsymbol{G}(\boldsymbol{x},-\tau;\boldsymbol{\xi},-t), \tag{2.37}$$

这是对于源点和接收点时间的互易关系。

如果 $\boldsymbol{G}$ 满足 S 上的齐次边界条件，则 (2.35) 可用来得到对于源点和接收点位置的重要互易关系。取 $\boldsymbol{f}$ 为在 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\xi}_1$ 和 $t=\tau_1$ 施加于 m 方向的单位脉冲，$\boldsymbol{g}$ 为在 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\xi}_2$ 和 $t=\tau_2$ 施加于 n 方向的单位脉冲，则 $u_i=G_{im}(\boldsymbol{x},t;\boldsymbol{\xi}_1,\tau_1)$，$v_i=G_{in}(\boldsymbol{x},t;\boldsymbol{\xi}_2,\tau_2)$，于是，(2.35)直接给出

$$G_{nm}(\boldsymbol{\xi}_2,\tau+\tau_2;\boldsymbol{\xi}_1,\tau_1)=G_{mn}(\boldsymbol{\xi}_1,\tau-\tau_1;\boldsymbol{\xi}_2,-\tau_2). \tag{2.38}$$

选取 $\tau_1=\tau_2=0$，它变为

$$G_{nm}(\boldsymbol{\xi}_2,\tau;\boldsymbol{\xi}_1,0)=G_{mn}(\boldsymbol{\xi}_1,\tau;\boldsymbol{\xi}_2,0), \tag{2.39}$$

这规定着一个纯粹空间的互易性。取（2.38）中的 $\tau=0$，就得到

$$G_{nm}(\boldsymbol{\xi}_2,\tau_2;\boldsymbol{\xi}_1,\tau_1)=G_{mn}(\boldsymbol{\xi}_1,-\tau_1;\boldsymbol{\xi}_2,-\tau_2), \tag{2.40}$$

这规定着一个空间-时间互易性。

弹性动力学 Green 函数的实际计算，本身可以是个很复杂的问题。我们将在第四章对于最简单的弹性体（均匀、无限、各向同性），以及对于非均匀介质中源点和接收点相距很远的情况，处理这个问题。

2.5 表示定理

如果把 Betti 定理的积分形式(2.35)，以 Green 函数应用于一个位移场，则另一个位移场的表示式就可以得到。

特别是，假定我们的兴趣是求由 V 内的体力 $\boldsymbol{f}$ 和 S 上的边界条件共同引起的位移 $\boldsymbol{u}$ 的表达式。将体力 $g_i(\boldsymbol{x},t)=\delta_{in}\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\xi})\delta(t)$ 代入(2.35)，这个体力的相应解是 $v_i(\boldsymbol{x},t)=G_{in}(\boldsymbol{x},t;\boldsymbol{\xi},0)$，于是得出

$$\begin{aligned} u_n(\xi,\tau)=&\int_{-\infty}^{\infty}dt\iiint_V f_i(\boldsymbol{x},t)G_{in}(\boldsymbol{x},\tau-t;\xi,0)dV \\ &+\int_{-\infty}^{\infty}dt\iint_S\{G_{in}(\boldsymbol{x},\tau-t;\boldsymbol{\xi},0)T_i(\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},t),\boldsymbol{n}) \\ &-u_i(\boldsymbol{x},t)c_{ijkl}n_jG_{kn,l}(\boldsymbol{x},\tau-t;\boldsymbol{\xi},0)\}dS. \end{aligned}$$

在给出该式的物理解释之前，将 $\boldsymbol{x}$ 和 $\boldsymbol{\xi}$ 以及 t 和 τ 的符号进行互换是有帮助的。这允许将$(\boldsymbol{x},t)$看做是需要求位移值的一般位置和时间，而这个位移值可看作是以 ξ 为变数的体积分和面积分与时间的褶积。结果是：

$$u_n(\boldsymbol{x},t)=\int_{-\infty}^{\infty}d\tau\iiint_V f_i(\xi,\tau)G_{in}(\xi,t-\tau;\boldsymbol{x},0)dV(\xi)$$
$$+\int_{-\infty}^{\infty}d\tau\iint_S\{G_{in}(\xi,t-\tau;\boldsymbol{x},0)T_i(\boldsymbol{u}(\xi,\tau),\boldsymbol{n})$$
$$-u_i(\xi,\tau)c_{ijkl}(\xi)n_jG_{kn,l}(\xi,t-\tau;\boldsymbol{x},0)\}dS(\xi). \tag{2.41}$$

这是我们的第一个表示定理。它阐述了在某点的位移 $\boldsymbol{u}$，是由于体力 $\boldsymbol{f}$ 在整个 V 内的贡献，加上牵引力 $\boldsymbol{T}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{n})$ 和位移 $\boldsymbol{u}$ 本身在 S 上的贡献。但是，这三个贡献中的每一个进行加权的方法是不能令人满意的，因为每一个都含有源点在 $\boldsymbol{x}$ 而观测点在 $\boldsymbol{\xi}$ 的 Green 函数（注意（2.41）的最后一项包含对 ξ_l 的微商）。我们要 $\boldsymbol{x}$ 作为观测点，使得在此处得到的总位移，可看作每个体元和面元的贡献在 $\boldsymbol{x}$ 处所引起的位移的和(积分)。这就必须要援引 $\boldsymbol{G}$ 的互易性定理，但这将要求关于 Green 函数本身的另外条件，因为方程 $G_{in}(\boldsymbol{\xi},\ t-\tau;\ \boldsymbol{x},\ 0)=G_{ni}(\boldsymbol{x},\ t-\tau;\ \xi,\ 0)$只当 $\boldsymbol{G}$ 满足 S 上的齐次边界条件时才证明过，但是，(2.41)对于由 $\boldsymbol{\xi}=\boldsymbol{x}$ 和 $t=\tau$ 处沿 n 方向的脉冲力引起的任意 Green 函数都成立。

我们来考查两种不同的情况。第一种，假定 Green 函数以 S 作为刚性边界来确定。我们把该函数写为 $\boldsymbol{G}^{刚性}$，对于 S 上的 ξ 有 $G_{in}^{刚性}(\boldsymbol{\xi},\ t-\tau;\ \boldsymbol{x},\ 0)=0$。于是（2.41）变为

$$u_n(\boldsymbol{x},t)=\int_{-\infty}^{\infty}d\tau\iiint_V f_i(\xi,\ \tau)G_{ni}^{刚性}(\boldsymbol{x},t-\tau;\xi,0)dV$$
$$-\int_{-\infty}^{\infty}d\tau\iint_S u_i(\xi,\tau)c_{ijkl}n_j\frac{\partial}{\partial\xi_l}G_{nk}^{刚性}(\boldsymbol{x},t$$
$$-\tau;\xi,0)dS. \tag{2.42}$$

另一种，我们可用 $G^{无}$ 作为 Green 函数，它使 S 上 $\boldsymbol{\xi}$ 处的牵引力 $c_{ijkl}n_j\frac{\partial}{\partial\xi_l}G_{kn}^{无}(\boldsymbol{\xi},t-\tau;\boldsymbol{x},0)$为零，于是得

$$u_n(\boldsymbol{x},t)=\int_{-\infty}^{\infty}d\tau\iiint_V f_i(\xi,\tau)G^{\text{无}}_{ni}(\boldsymbol{x},t-\tau;\xi,0)dV$$

$$+\int_{-\infty}^{\infty}d\tau\iint_S G^{\text{无}}_{ni}(\boldsymbol{x},t-\tau;\xi,0)T_i(\boldsymbol{u}(\xi,\tau),\boldsymbol{n})dS.$$

(2.43)

式(2.41)—(2.43)都是表示定理的不同形式，每个有其特殊用途。把它们放在一起看，似乎含有矛盾，就是，到底 $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},t)$ 依赖于 S 上的位移（见(2.42)），还是依赖于牵引力（见(2.43)）？还是两者都依赖？然而，既然牵引力和位移不能在弹性体表面上独立地规定出来，所以并无矛盾。

本章中，对其上面的牵引力（或位移）值有明确要求的表面，被取作体积 V 的外表面。取此面包括两个相邻的内表面作为一个掩埋断层的相对两面，常常是有用的。这时，可将表示定理写成特殊形式，使得能分析由掩埋断层的活动所产生的地震。这个问题是震源理论的核心，将在下章讨论。

到目前为止，我们只考虑了笛卡尔坐标系。实际上，常常要求地震学家根据特定问题的几何形状利用不同的坐标系，使位移、应力和应变的分量之间的关系简化。我们这样做是因为常常发现某边界条件一定适用于选取某一曲线坐标为常数的表面。在许多教科书中，对于一般正交系，推导了矢量运算梯度、散度、旋度和 ∇^2，但是为分析弹性中所要求的矢量运算，需要更多的东西。

补充 2.6

正交曲线坐标的一般性质

设在矢量位置 $\boldsymbol{x}$ 的某点由三个参数 c^1、c^2 和 c^3 来规定，即 $\boldsymbol{x}$（在某个笛卡尔坐标系中）的三个分量的每一个都是 c^p 的标量函数，

$$x_i=x_i(c^1,\ c^2,\ c^3)\qquad(i=1,\ 2,\ 3).$$

我们假定这些函数 x_i 有连续微商，并存在反函数

$$c^p=c^p(x_1,\ x_2,\ x_3)\qquad(p=1,\ 2,\ 3).$$

或 $$c^p=c^p(\boldsymbol{x}),$$

使得对于每个 p，都可把方程 c^p＝常数看作一个坐标面，并且在这三个面的各交线上，c^1，c^2，c^3 中只有一个是变化的。我们用上标代表做为一般曲线坐标的量。

令 $\boldsymbol{n}^p$ 为坐标面 c^p＝常数的单位法线，假定 $\boldsymbol{x}$ 和 $\boldsymbol{x}+d\boldsymbol{x}$ 都位于该面上。则有 $c^p(\boldsymbol{x})=c^p(\boldsymbol{x}+d\boldsymbol{x})$，因此，利用 $c^p(\boldsymbol{x}+d\boldsymbol{x})$ 的 Taylor 展开，有 $d\boldsymbol{x}\cdot\nabla c^p=0$。因为 $d\boldsymbol{x}$ 是该面内的任一线元，所以 ∇c^p 是 c^p＝常数的法线，从而 ∇c^p 一定平行于 $\boldsymbol{n}^p$。

令矢量 ∇c^p 的长度为 $1/h^p$（一个标量因子），则

$$\boldsymbol{n}^p=h^p\nabla c^p. \tag{1}$$

（我们对于上标不再采用求和惯例，但对于脚标仍照例，因为它们同最初的笛卡尔坐标系有关。）

假定 c^1，c^2，c^3 组成一右手正交坐标系，即

$$\boldsymbol{n}^p\boldsymbol{n}^q=\delta^{pq} \qquad \text{(Kronecker } \delta \text{ 函数)} \tag{2}$$

和

$$\boldsymbol{n}^3=\boldsymbol{n}^1\times\boldsymbol{n}^2.$$

用 n_i^p 表示 $\boldsymbol{n}^p$ 的第 i 个分量，我们现在可以得到一个重要的 $\boldsymbol{n}^p$ 和 $\partial\boldsymbol{x}/\partial c^p$ 之间的关系如下：

$$\boldsymbol{n}^p=n_i^p\hat{e}_i=n_i^p\frac{\partial\boldsymbol{x}}{\partial x_i}=\sum_q n_i^p\frac{\partial\boldsymbol{x}}{\partial c^q}\frac{\partial c^q}{\partial x_i} \qquad \text{(链规则)}$$

$$=\sum_q n_i^p\frac{n_i^q}{h^q}\frac{\partial\boldsymbol{x}}{\partial c^q} \qquad \text{(根据(1))}$$

$$=\sum_q\frac{\delta^{pq}}{h^q}\frac{\partial\boldsymbol{x}}{\partial c^q}, \qquad \text{(根据(2))}$$

因此有

$$\boldsymbol{n}^p=\frac{1}{h^p}\frac{\partial\boldsymbol{x}}{\partial c^p}. \tag{3}$$

位置的微小变化 $d\boldsymbol{x}$ 同每个坐标 c^1，c^2，c^3 的微小变化的关系为 $d\boldsymbol{x}=\sum_p(\partial\boldsymbol{x}/\partial c^p)dc^p$，此变量的大小由下式给出：

$$(dS)^2=d\boldsymbol{x}\cdot d\boldsymbol{x}=\sum_p\frac{\partial\boldsymbol{x}}{\partial c^p}dc^p\cdot\sum_q\frac{\partial\boldsymbol{x}}{\partial c^q}dc^q$$

$$=(h^1dc^1)^2+(h^2dc^2)^2+(h^3dc^3)^2 \quad \text{(据(3)和(2))}. \tag{4}$$

此结果导致实际求标量函数的一个最快方法：与沿 $\boldsymbol{n}^1$ 的增量 dc^1 有关

的 Euclid 距离为 h^1dc^1；对于 h^2 和 h^3，也类同。

在 2.6 节，我们需要以未经求微分的法线表示 $\partial \boldsymbol{n}^r/\partial c^p$ 类型微商的公式。根据(2)和(3)，必须满足的方程为

$$\boldsymbol{n}^p \frac{\partial \boldsymbol{n}^q}{\partial c^r} + \boldsymbol{n}^q \frac{\partial \boldsymbol{n}^p}{\partial c^r} = 0 \quad \text{(18 个不同的标量方程)}$$

$$\frac{\partial}{\partial c^q}(h^p \boldsymbol{n}^p) = \frac{\partial}{\partial c^p}(h^q \boldsymbol{n}^q) \quad \text{(3 个非平凡矢量方程)。} \tag{5}$$

上面是对于 27 个未知标量 $\partial \boldsymbol{n}^p/\partial c^q$ 的 27 个不同的标量方程，因此，正好足以确定解答。这个解的矢量形式为

$$\frac{\partial \boldsymbol{n}^p}{\partial c^q} = \frac{\boldsymbol{n}^q}{h^p}\frac{\partial h^q}{\partial c^p} - \delta^{pq}\left[\frac{\boldsymbol{n}^1}{h^1}\frac{\partial h^p}{\partial c^1} + \frac{\boldsymbol{n}^2}{h^2}\frac{\partial h^p}{\partial c^2} + \frac{\boldsymbol{n}^3}{h^3}\frac{\partial h^p}{\partial c^3}\right], \tag{6}$$

将它直接代回(5)式，便可证明。

2.6 一般正交曲线坐标中的应变-位移关系和位移-应力关系

继续用补充 2.6 中发展的符号，我们首先要求出应变分量 e^{pq} 和位移分量 u^r 之间的关系，这个关系是通常笛卡尔结果 $e_{ij} = \frac{1}{2}(\partial u_i/\partial x_j + \partial u_j/\partial x_i)$ 的推广。所谓 e^{pq}，我们仅仅是指与经过旋转的笛卡尔轴有关的笛卡尔二阶张量 $\boldsymbol{e}$ 的分量，笛卡尔轴（在有关点上）是沿 $\boldsymbol{n}^1$，$\boldsymbol{n}^2$，$\boldsymbol{n}^3$ 方向确定的。因此，我们强调的是应变的物理分量，而不是一般的张量分量（它们甚至可能不具有应变的量纲）。我们的问题是利用也沿 $\boldsymbol{n}^1$，$\boldsymbol{n}^2$，$\boldsymbol{n}^3$ 分解的位移的物理分量的微商（对 c^1，c^2，c^3 取微商）来表示 e^{pq}；出现的困难是由于(a)标度函数 h^1，h^2，h^3 的空间变化和(b)方向 $\boldsymbol{n}^1$，$\boldsymbol{n}^2$，$\boldsymbol{n}^3$ 的空间变化造成的。

旋转后沿 $\boldsymbol{n}^p$ 的笛卡尔轴，相对于笛卡尔轴 $\boldsymbol{x}_1$，$\boldsymbol{x}_2$，$\boldsymbol{x}_3$（它们在任一点都指向同样的固定方向）的方向余弦是(n_1^p，n_2^p，n_3^p)。因此，由笛卡尔矢量和张量的分量的基本变换性质，有

$$u^p = n_i^p u_i, \qquad \text{(对重复脚标求和)} \tag{2.44}$$

$$e^{pq}=n_i^p n_j^q e_{ij}$$

$$=\frac{1}{h^p h^q}\frac{\partial x_i}{\partial c^p}\frac{\partial x_j}{\partial c^q}\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}+\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)$$

（根据补充 2.6 中的(3)；对上标不求和）

$$=\frac{1}{2\,h^p h^q}\left(\frac{\partial x_i}{\partial c^p}\frac{\partial u_i}{\partial c^q}+\frac{\partial x_i}{\partial c^q}\frac{\partial u_i}{\partial c^p}\right)$$

（前一行中链规则的逆运算）

$$=\frac{1}{2\,h^q}\left[\frac{\partial}{\partial c^q}\left(\frac{u_i}{h^p}\frac{\partial x_i}{\partial c^p}\right)-u_i\frac{\partial}{\partial C^q}\left(\frac{1}{h^p}\frac{\partial x_i}{\partial c^p}\right)\right]$$

$$+\frac{1}{2\,h^p}\left[\frac{\partial}{\partial c^p}\left(\frac{u_i}{h^q}\frac{\partial x_i}{\partial c^q}\right)-u_i\frac{\partial}{\partial c^p}\left(\frac{1}{h^q}\frac{\partial x_i}{\partial c^q}\right)\right]$$

$$=\frac{1}{2\,h^q}\frac{\partial u^p}{\partial c^q}+\frac{1}{2\,h^p}\frac{\partial u^q}{\partial c^p}-\frac{1}{2}u_i\left[\frac{1}{h^q}\frac{\partial u_i^p}{\partial c^q}+\frac{1}{h_p}\frac{\partial u_i^q}{\partial c^p}\right]$$

（重复利用补充 2.6 中的(3)和(2.44)）

$$=\frac{1}{2\,h^q}\frac{\partial u^p}{\partial c^q}+\frac{1}{2\,h^p}\frac{\partial u^q}{\partial C^p}-2\,\boldsymbol{u}\cdot\left[\frac{1}{h^q}\frac{\partial \boldsymbol{n}^p}{\partial c^q}+\frac{1}{h^p}\frac{\partial \boldsymbol{n}^q}{\partial c^p}\right].$$

以此形式，我们可利用补充 2.6 中的最后方程，求得

$$e^{pq}=\frac{1}{2}\left[\frac{h^p}{h^q}\frac{\partial}{\partial e^q}\left(\frac{u^p}{h^p}\right)+\frac{h^q}{h^p}\frac{\partial}{\partial e^p}\left(\frac{u^q}{h^q}\right)\right]+\frac{\delta^{pq}}{h^q}\left[\frac{u^1}{h^1}\frac{\partial h^p}{\partial c^1}+\frac{u^2}{h^2}\frac{\partial h^p}{\partial c^2}+\frac{u^3}{h^3}\frac{\partial h^p}{\partial c^3}\right], \tag{2.45}$$

其中所有以笛卡尔坐标系 (x_1，x_2，x_3) 为参考系的量，最后都消去了。对于非对角线分量 ($p\neq q$)，只有第一个方括号是需要的，但对典型的对角线分量，(2.45)就简化为：

$$e^{11}=\frac{1}{h^1}\frac{\partial u^1}{\partial c^1}+\frac{u^2}{h^1h^2}\frac{\partial h^1}{\partial c^2}+\frac{u^3}{h^3h^1}\frac{\partial h^1}{\partial c^3}. \tag{2.46}$$

为得到关于 $\boldsymbol{u}$ 和 $\boldsymbol{\tau}$ 的一般正交分量的位移-应力关系，我们采取类似于在 2.1 节给出的对固定的笛卡尔方向推导 $\rho\ddot{u}_i=\tau_{ij,j}$ 的步骤。主要困难在于解释作用于以 V 为体积的 S 表面上的牵引力积分 $\iint_S \boldsymbol{T}dS$。以 $\boldsymbol{\nu}$ 作为 dS 上向外法线，

$$T_i(\boldsymbol{v})dS = \tau_{ij}\nu_j dS$$

$$= \sum_{p,q} \tau^{pq} n_i^p n_j^q \nu_j dS \quad \text{（变换到旋转后的笛卡尔坐标系中的分量）}$$

$$= \sum_{p,q} \tau^{pq} n_i^p \nu^q dS,$$

其中 ν^q 是 dS 的法线沿 $\boldsymbol{n}^q$ 的分量。

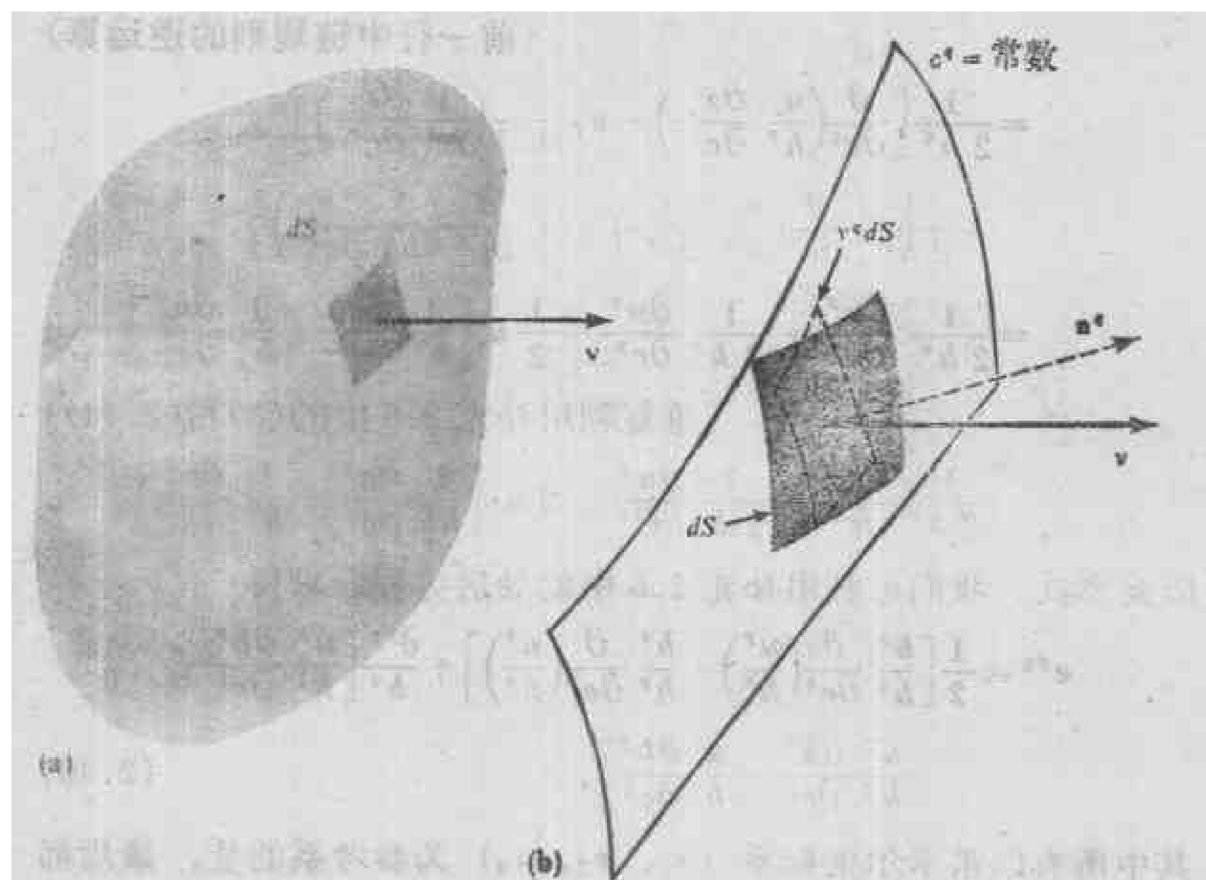


图 2.6　dS 在面 c^q = 常数上的投影

在坐标面上形成的面积为 $\nu^q dS$。(a) dS 是 V 的表面的一部分。

(b) 虚线轮廓是 dS 在坐标面 c^q = 常数上的投影

现在 $\nu^q dS$ 是 dS 在面 c^q = 常数上的投影，因此 $\nu^1 dS = h^2 h^3 \times dc^2 dc^3$；同样也可写出 $\nu^2 dS$ 和 $\nu^3 dS$。于是

$$\iint_S T_i dS = \sum_p \iint [\tau^{p1} n_i^p h^2 h^3 dc^2 dc^3 + \tau^{p2} n_i^p h^3 h^1 dc^3 dc^1 + \nu^{p3} n_i^p h^1 h^2 dc^1 dc^2]$$

$$= \sum_p \iiint_V \left[\frac{\partial}{\partial c^1} (\tau^{p1} n_i^p h^2 h^3) + \frac{\partial}{\partial c^2} (\tau^{p2} n_i^p h^3 h^1) \right.$$

$$\left. + \frac{\partial}{\partial c^3} (\tau^{p3} n_i^p h^1 h^2) \right] dc^1 dc^2 dc^3.$$

而物理体元 dV 是 $h^1h^2h^3dc^1dc^2dc^3$，因而，根据类似于在 2.1 节所给的证明步骤，我们这里得到

$$\rho \frac{\partial^2 \boldsymbol{u}}{\partial t^2} = \boldsymbol{f} + \frac{1}{h^1 h^2 h^3} \sum_{p,q} \frac{\partial}{\partial c^q} \left(\tau^{pq} \boldsymbol{n}^p \frac{h^1 h^2 h^3}{h^q} \right). \tag{2.47}$$

微商 $\partial \boldsymbol{n}^p / \partial c^q$ 仍是需要的（见补充 2.6 中的(6)），将（2.47）沿方向 $\boldsymbol{n}^1$ 分解，求得

$$\rho \frac{\partial^2 u^1}{\partial t^2} = f^1 + \frac{1}{h^1 h^2 h^3} \left[\frac{\partial}{\partial c^1} (\tau^{11} h^2 h^3) + \frac{\partial}{\partial c^2} (\tau^{12} h^3 h^1) \right.$$

$$\left. + \frac{\partial}{\partial c^3} (\tau^{31} h^1 h^2) \right] + \frac{\tau^{12}}{h^1 h^2} \frac{\partial h^1}{\partial c^2} + \frac{\tau^{31}}{h^3 h^1} \frac{\partial h^1}{\partial c^3}$$

$$- \frac{\tau^{22}}{h^1 h^2} \frac{\partial h^2}{\partial c^1} - \frac{\tau^{33}}{h^3 h^1} \frac{\partial h^3}{\partial c^1}. \tag{2.48}$$

变更（2.48）中的上标，可以得到对于 $\rho \ddot{u}^2$ 和 $\rho \ddot{u}^3$ 的类似结果。

应力-应变关系 $\tau_{ij} = c_{ijkl} e_{kl}$，在各向同性介质中变为

$$\tau_{ij} = \lambda \delta_{ij} e_{kk} + 2 \mu e_{ij}. \tag{2.49}$$

这里我们已经用了（2.33）：λ 和 μ（一般说）是位置的函数，$e_{kk} = e_{11} + e_{22} + e_{33}$ 是体应变。方程（2.49）是利用方向固定的笛卡尔坐标系中的分量来表示的，但对于一般正交坐标系中的物理分量，相应的结果具有同样的形式。它是

$$\tau^{pq} = \lambda \delta^{pq} \sum_r e^{rr} + 2 \mu e^{pq}, \tag{2.50}$$

因为各向同性介质意味着 $c^{pqrs} = c_{pqrs}$，并且我们可以再利用（2.33）。(2.49)和(2.50)形式上的唯一差别是，我们对脚标应用求和规定，但对上标求和并没有用。

(2.46)、(2.48)和(2.50)常应用于球坐标(r, θ, ϕ)，该坐标中的标度函数 h^1，h^2，h^3 分别变为 1，r，$r \sin \theta$；在柱坐标

(r, ϕ, z) 中，标度函数为 1，r，1。在第四章我们将利用与非均匀各向同性介质中的点源发射出的波阵面和射线相联系的正交曲线坐标。我们对上标的规定对于推导 (2.45)—(2.50) 很方便，但在应用中，上标常常用直接指出有关坐标的脚标来代替。因此，如果 (c^1, c^2, c^3) 是球坐标，就把 e^{11} 写作 e_{rr}，把 u^3 写作 u_ϕ，把 n^2 写作 $\hat{\theta}$。

建议进一步阅读的文献

Achenbach, J. D. *Wave Propagation in Elastic Solids*. Amsterdam: North-Holland, 1973.

Fung, Y. C. *Foundations of Solid Mechanics*. Englewood Cliffs, New Jersey: Prentice-Hall, 1965.

Jeffreys, H. *Cartesian Tensors*. Cambridge University Press, 1965.

Love, A. E. H. *A Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity*, New York: Dover Publications, 1944.

Malvern, L. E. *Introduction to the Mechanics of a Continuous Medium*. Englewood Cliffs, New Jersey: Prentice-Hall, 1969.

问　　题

2.1 如果在固定应变下温度升高，物体中的应力将如何？应力遵守 Hooke 定律(2.18)呢，还是必须以某种方式修改？(请记住，式(2.18)在地震学中通常应用于绝热加载情况。)

2.2 我们已经证明，如何唯一地给出一个弹性体的位移场 $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$(例如通过施加体力和牵引力)。试证明，一旦 $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$处处为已知，体力和牵引力便被唯一地给定。("用构图法"来证明是非常快速而简单的。)

2.3 如果应力依赖于应变速率(如对于某一粘滞介质)，关系式

(2.21)—(2.25)改变吗?

2.4 试求作用于以 $\boldsymbol{n}$ 为法线的面元上的位移场 $\boldsymbol{u}$ 所引起的牵引力为下述形式:

$$\boldsymbol{T}(\boldsymbol{u},\ \boldsymbol{n})=\lambda(\nabla\cdot\boldsymbol{u})\,\boldsymbol{n}+\mu\left(2\frac{\partial\boldsymbol{u}}{\partial\boldsymbol{n}}+\boldsymbol{n}\times(\nabla\times\boldsymbol{u})\right),$$

这里 $\dfrac{\partial\boldsymbol{u}}{\partial\boldsymbol{n}}=(\boldsymbol{n}\cdot\nabla)\boldsymbol{u}$.

2.5 前一个问题中的牵引力 $\boldsymbol{T}$, 在下列意义上是位置 $\boldsymbol{x}$ 的函数, 即 $\boldsymbol{T}=\boldsymbol{T}(\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}),\ \boldsymbol{n})$。

a) 修改我们对(2.7)的推导来证明, 在下列意义上牵引力是位置的连续函数, 即

当 $\delta\boldsymbol{x}\to 0$ 时, $\boldsymbol{T}(\boldsymbol{x}+\delta\boldsymbol{x})-\boldsymbol{T}(\boldsymbol{x})\to 0$,假定 $\delta\boldsymbol{x}$ 取为平行于方向 $\boldsymbol{n}$, $\boldsymbol{n}$ 规定着需要求牵引力值的面元的空间取向。

b) 设想一本书放在一个平桌面上, 牵引力是桌面上位置的连续函数, 对吗?

c) 请核查你对 a) 和 b) 的答案并不矛盾。

d) 试证明 τ_{yz}, τ_{zx}, τ_{zz} 在任何介质中都是 z 的连续函数, 但 τ_{zz} 在 x 或 y 方向上不必连续; τ_{xx}, τ_{yy}, τ_{xy} 在 z 方向上不必连续。

2.6 对于流体中压力为 P 的某点, 应力张量是各向同性的, 并且具有分量 $\tau_{ij}=-P\delta_{ij}$。为强调固体中可能的应力与流体中存在的应力之间的差别, 用 $\tau_{ij}=\frac{1}{3}\tau_{kk}\delta_{ij}+\tau'_{ij}$ 定义差应力, 用 $e_{ij}=\frac{1}{3}e_{kk}\delta_{ij}+e'_{ij}$ 定义差应变是方便的。然后试证明, 各向同性弹性介质中的应变能 $\mathscr{U}$ 由下式给出:

$$\mathscr{U}=\frac{1}{2}\left[\left(\lambda+\frac{2}{3}\mu\right)e_{ii}e_{kk}+2\,\mu e'_{ij}e'_{ij}\right].$$

试证明 e_{ii} 是单位体积的体积变化(即体应变)。因此, $\mathscr{U}$ 可

看作膨胀能$\frac{1}{2}\left(\lambda+\frac{2}{3}\mu\right)e_{ii}e_{kk}$与剪切应变能$\mu e'_{ij}e'_{ij}$之和。为什么$\lambda+\frac{2}{3}\mu$(常叫做体积模量，用$\kappa$表示)和$\mu$必为正数？把$\kappa$叫做可压缩性或不可压缩性是合乎道理的吗？

第三章　震源的表示

风、海浪、气流冲击、火箭发射以及大气层爆破——甚至人在地震仪附近散步，都产生地震波。但是，这些都是固体地球外部震源的例子，它们通常可以在施加于地面的随时间变化的牵引力的简单范畴内进行分析。对于许多实际效果来说，其他一些震源也是外部的，包括火山喷发、打眼爆破和剥落(地下爆炸抛起的表层的自由降落)。对于内部震源，如地震和地下爆炸，分析的方式是比较难于发展的，因为支配弹性运动的方程(2.17)—(2.18)不能在全部固体地球中成立。本章就是关于内部源的，并且我们将把它们区分为两个不同的类型：断裂源和体积源。

断裂源是一个同内部的一个面相联系的事件，例如破裂面两侧的相对滑动。体积源是同内部的体积相联系的事件，例如体源区的突然(爆发式)膨胀。我们将看到，两种震源类型的统一处理是可能的，其共同环节是内部面上可以发生位移间断(对于断裂源)或应变间断(对于体积源)的概念。

内部震源的数学处理，经典上是沿两个不同的方向进行的：第一，用施加于包含震源的某介质元上的体力；第二，用位移或应变的某种间断(如跨越发生破裂的断层面或跨越体积源的表面的间断)。第二个方法通常可以被结合到第一个里面去。我们先从对于断层面上的简单剪切，详细地导出等效体力，以表明根本上不同的力系可严格等效于同样的位移间断。以后，按照 Burridge 和 Knopoff(1964)的方法，逐步展开断裂源的一般理论。最后，给出体源理论的轮廓。

地震图上记录到的运动，是传播效应和震源效应二者的结果。所以要对于震源机制较好地理解的一个主要原因，就是为了

把传播效应分离出来，因为它们带有关于地球内部结构的信息。最近，震源机制的研究还被用来描述构造板块运动的途径及理解板块如何被驱动。为了根据附近断层的性质和区域应力分布的地质资料和地球物理资料以预测工程地点的地震危险性，现在正大力发展震源理论。

3.1 内表面的表示定理；等效于牵引力间断和位移间断的体力

如果选取 S 包含体积 V 内的两个相邻的面，则在第二章得到的表示定理，能够在震源理论中非常有帮助。这方面的推动力来自 H. F. Reid 的工作，他于1906年旧金山地震前后，对圣安德烈斯断层的研究，导致普遍承认地震运动是由活动断层的瞬时滑动所辐射的地震波引起的。我们将在 3.2 和 3.3 节比较详细地讨论这个震源机制，而在第十五章讨论它所包含的动力学过程(和其它震源机制)。现在的问题很简单，就是证明掩埋断层上的滑动过程以及由它辐射的地震波，如何能自然地用我们的表示定理进行分析。

为了应用(2.41)—(2.43)，我们将取 V 的表面包括一个外表面 S (见图3.1)和两个相邻的内表面 Σ^+ 与 Σ^-，这两个内表面是断层的相对两面。如果在 Σ 上发生滑动，则位移场在这里是间断的，运动方程在 S 内部不再得到满足。但是，它在 $S+\Sigma^++\Sigma^-$ 的"内部"是得到满足的，所以，对此我们能应用前面的表示结果。

表面 S 不再具有直接意义(它可以是地球的表面)，我们将假定 $\mathbf{u}$ 和 $\mathbf{G}$ 都满足 S 上的齐次边条件。这时有

$$u_n(\mathbf{x},\ t) = \int_{-\infty}^{\infty} d\tau \iiint_V f_p(\boldsymbol{\eta},\ \tau) G_{np}(\mathbf{x},\ t-\tau;\ \boldsymbol{\eta}, 0) dV(\boldsymbol{\eta})$$

$$+\int_{-\infty}^{\infty} d\tau \iint_\Sigma \{[u_i(\boldsymbol{\xi}\tau) c_{ijpq} \nu_j \partial G_{np}(\mathbf{x},\ t-\tau;\ \boldsymbol{\xi},\ 0)/\partial \xi_q]$$

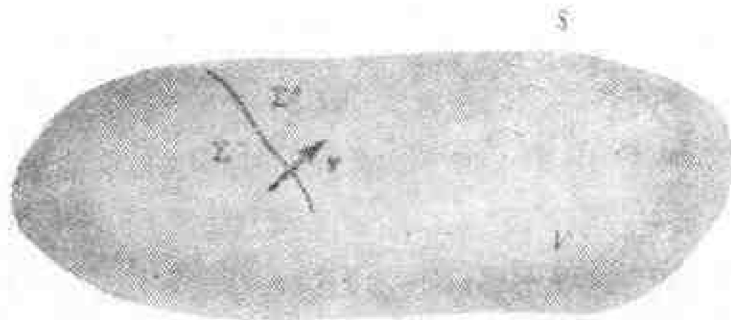


图 3.1

具有体积 V、外表面 S 和内表面Σ(模拟掩埋断层)的有限弹性体。跨越Σ时可出现间断，即在Σ^-一边的位移可以不同于Σ^+一边的位移。Σ的法线为ν(从Σ^-指向Σ^+)，对于Σ上的ξ，位移间断用$[\mathbf{u}(\xi,\tau)]$表示，方括号指的是差$\mathbf{u}(\xi,\tau)|_{\Sigma^+}-\mathbf{u}(\xi,\tau)|_{\Sigma^-}$。一般说，对于牵引力，可构成类似的差(由于外部加于Σ的力)，但对于瞬时破裂，牵引力必定是连续的，故$[\mathbf{T}(\mathbf{u},\nu)]=0$

$$-[G_{np}(\boldsymbol{x},\ t-\tau;\ \xi,\ 0)T_p(\boldsymbol{u}(\xi,\ \tau),\ \boldsymbol{\nu})]\}d\Sigma. \quad (3.1)$$

这个公式用 $\boldsymbol{\eta}$ 作为 V 内的一般位置，ξ 作为Σ上的一般位置。方括号用来表示在Σ^+和Σ^-上的值之差(见图 3.1 的说明)。

到现在为止，对Σ上的边界条件没做任何假定。虽然 $\boldsymbol{u}$ 的选取必须同横跨破裂断层面上位移和牵引力的实际性质相符，但 $\boldsymbol{G}$ 却可以以任何有用的方式来选择。所以，对于 $\boldsymbol{u}$，断层上的滑动导致$[\boldsymbol{u}]$的非零值，但牵引力的连续(参看(2.7)的证明和问题2.5)意味着$[\boldsymbol{T}(\boldsymbol{u},\ \boldsymbol{\nu})]=0$。建立 $\boldsymbol{G}$ 在Σ上的确定性质的最简单和最通用的方法是，取Σ为一个假想面，当穿过该面时，$\boldsymbol{G}$ 及其微商是连续的，使得 $\boldsymbol{G}$ 即使在Σ上也满足运动方程(2.36)。这是最容易对体积 V 进行计算的 Green 函数，并且(当对于 $\boldsymbol{u}$ 不存在体力时)它给出表示式

$$u_n(\boldsymbol{x},\ t)=\int_{-\infty}^{\infty} d\tau\iint_{\Sigma}[u_i(\xi,\ \tau)]c_{ijpq}\nu_j\partial G_{np}(\boldsymbol{x},\ t-\tau;\ \xi,\ 0)/\partial\xi_q d\Sigma. \quad (3.2)$$

毫不奇怪，断层上的位移足以确定各处的位移：由唯一性定理可以预料到(3.2)的这个特征。然而，乍一看很奇怪，传自震源的波的 Green 函数并不需要Σ上的边界条件。可以料想，断层上

发生的运动所产生的波，它们自身被断层面以某种方式衍射。虽然这个相互影响使确定滑动函数$[\boldsymbol{u}(\xi,\tau)]$变得复杂，但它并不参予确定(3.2)中所用的Green函数，并且许多地震学家已经用这个公式来计算由某个假定的滑动函数模式所产生的运动。我们将在第十四章描述这类积分。

等效体力

我们刚描述过的地震模型并不直接包括任何体力，尽管表示式(3.2)给出的$(\boldsymbol{x},t)$处的位移，是对有贡献的Green函数的积分，而每个Green函数都是由一个体力建立的。所以，必定在某个意义上，活动断层面可被看作体力的面分布。

为了确定这个等效体力，我们从(3.1)出发，并仍假定Σ对G是透明的。关于跨越Σ的$[\boldsymbol{u}]$和$[\boldsymbol{T}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{n})]$，不做任何假定(以便牵引力源也是允许的)，我们得到

$$
\begin{aligned}
u_n(\boldsymbol{x},t)=&\int_{-\infty}^{\infty}d\tau\iiint_V f_p(\boldsymbol{\eta},\tau)G_{np}(\boldsymbol{x},t-\tau;\boldsymbol{\eta},0)dV(\boldsymbol{\eta})\\
&+\int_{-\infty}^{\infty}d\tau\iint_\Sigma\{[u_i(\xi,\tau)]c_{ijpq}\nu_jG_{np,q}(\boldsymbol{x},t-\tau;\xi,0)\\
&-[T_p(\boldsymbol{u}(\xi,\tau),\boldsymbol{\nu})]G_{np}(\boldsymbol{x},t-\tau;\boldsymbol{\xi},0)\}d\Sigma(\xi). \quad (3.3)
\end{aligned}
$$

Σ上的间断可通过使用$\delta(\boldsymbol{\eta}-\boldsymbol{\xi})$而被局限于$V$内。例如，$[\boldsymbol{T}]d\Sigma(\boldsymbol{\xi})$具有力的量纲，它的体力分布(即力/单位体积)是$[\boldsymbol{T}]\delta(\boldsymbol{\eta}-\boldsymbol{\xi})d\Sigma$，在$V$内随$\boldsymbol{\eta}$而变化。面此，牵引力间断对位移的贡献为

$$
\int_{-\infty}^{\infty}d\tau\iiint_V\left\{-\iint_\Sigma[T_p(\boldsymbol{u}(\xi,\tau),\boldsymbol{\nu})]\delta(\boldsymbol{\eta}-\boldsymbol{\xi})d\Sigma\right\}\times G_{np}(\boldsymbol{x},t-\tau;\boldsymbol{\eta},0)dV.
$$

由于这个表达式恰恰具有体力贡献的形式(参看(3.3)右边第一项)，所以，Σ上牵引力间断的等效体力由$\boldsymbol{f}^{[T]}$给出：

$$
\boldsymbol{f}^{[T]}(\boldsymbol{\eta},\tau)=-\iint_\Sigma[\boldsymbol{T}(\boldsymbol{u}(\xi,\tau),\boldsymbol{\nu})]\delta(\boldsymbol{\eta}-\xi)d\Sigma(\xi). \quad (3.4)
$$

位移间断比较难于解释，因为位移同力的关系不像牵引力那么简单。我们用 δ 函数的微商 $\partial\delta(\eta-\xi)/\partial\eta_q$ 来限制Σ上的点处于 V 内。这个函数具有下列性质：

$$\frac{\partial}{\partial\xi_q}G_{np}(x,\ t-\tau;\ \xi,\ 0)=-\iiint_V\frac{\partial}{\partial\eta_q}\delta(\eta-\xi)G_{np}$$
$$\times(x,\ t-\tau;\ \eta,0)dV(\eta),$$

使得(3.3)中的位移间断在位置 x 和时间 t 对位移的贡献为

$$\int_{-\infty}^{\infty}d\tau\iiint_V\left\{-\iint_\Sigma[u_i(\xi,\ \tau)]\ c_{ijpq}\nu_j\frac{\partial}{\partial\eta_q}\delta(\eta-\xi)\ d\Sigma\right\}$$
$$\times G_{np}(x,\ t-\tau;\ \eta,\ 0)dV.$$

从这个表达式可以辨认出Σ上的位移间断的等效体力 $f^{[u]}$ 为

$$f_p^{[u]}(\eta,\ \tau)=-\iint_\Sigma[u_i(\xi,\ \tau)]\ c_{ijpq}\nu_j\frac{\partial}{\partial\eta_q}\delta(\eta-\xi)d\Sigma. \tag{3.5}$$

虽然这个积分包含有27项(对 i，j，q 求和)，对于每个 p它们都不一样，但我们将看到一个重要例子，其中只有两项和三项不为零。等效体力(3.4)和(3.5)适用于一般的非均匀各向异性介质，并且它们显然只在断层面本身上依赖于弹性介质的性质。

补充 3.1

关于震源区内有效滑动和有效弹性常数的用法

我们用“断层面”和“断层表面”这些词，标以Σ符号，作为没有厚度的数学实体。然而在世界上的许多地方，地学家们可以直接到达断层地区，并且在那里常发现被挤碎和变形的岩石的地带，也许有几米厚，因而地质学家常称之为“断层泥”和“断层带”。那么，我们所说等效体力只依赖断层面上的弹性常数，指的是什么意思？

断层带的厚度几乎总是远远小于可检测的地震辐射的波长，所以，正是跨越整个断层带的位移变化，才是表现出来的位移间断，产生的波向震源区以外传播。因此，在几乎所有实际情况中，方程(3.2)，(3.3)和(3.5)的弹性常数，都是适于断层带附近强的(未蚀变)岩石的常数。

由于发生在体积V内的断裂是个内部过程，所以，总的动量和总的角动量必然守恒。于是$\boldsymbol{f}^{[u]}$造成的总力和$\boldsymbol{f}^{[u]}$相对于任一固定点的总力矩必然为零。因此，对于所有的τ，有

$$\iiint_V \boldsymbol{f}^{[u]}(\boldsymbol{\eta},\ \tau)dV(\boldsymbol{\eta})=0, \tag{3.6}$$

而对于所有的τ和任一固定的$\boldsymbol{\eta}_o$，有

$$\iiint_V (\boldsymbol{\eta}-\boldsymbol{\eta}_o)\times \boldsymbol{f}^{[u]}(\boldsymbol{\eta},\ \tau)dV(\boldsymbol{\eta})=0. \tag{3.7}$$

为了证明(3.6)，请注意它左边的p分量是$-\iint_\Sigma [u_i]\ c_{ijpq}\nu_j \times \left\{\iiint_V \frac{\partial}{\partial \eta_q}\delta(\boldsymbol{\eta}-\boldsymbol{\xi})dV\right\}d\Sigma(\boldsymbol{\xi})$。这里的体积分是$\iint_S \delta(\boldsymbol{\eta}-\boldsymbol{\xi})n_q \times dS(\boldsymbol{\eta})$，它等于零，因为$S$上的$\boldsymbol{\eta}$永远不能等于$\boldsymbol{\xi}$($S$和$\Sigma$没有共同的点)。

要证明(3.7)，把左边的m分量写为

$$\iiint_V e_{mnp}(\eta_n-\eta_{0n})f_p^{[u]}dV$$

$$=-\iint_\Sigma c_{ijpq}\nu_j[u_i]\left\{\iiint_V e_{mnp}(\eta_n-\eta_{0n})\frac{\partial}{\partial \eta_q}\delta(\boldsymbol{\eta}-\boldsymbol{\xi})dV\right\}d\Sigma$$

(根据(3.5))

$$=+\iint_\Sigma e_{mqp}c_{ijpq}\nu_j[u_i]d\Sigma$$

$$\left(利用\frac{\partial}{\partial \eta_q}(\eta_n-\eta_{0n})=\delta_{nq}\right)$$

$$=0 \qquad (利用对称性\ c_{ijpq}=c_{ijqp}).$$

作为等效于场间断的体力的一个简单例子，我们考虑沿特定方向作用于一点的体力的情况(例如(2.4)所给的对于一个Green函数的体力)。这可以改换而看作应力分量的间断。为得到等效值，取x_3为深度方向，考虑在时间$\tau=0$作用于$(0,0,h)$的强度

为 F 并保持稳定的竖向点力。这时

$$\boldsymbol{f}(\eta,\tau)=(0,0,F)\delta(\eta_1)\delta(\eta_2)\delta(\eta_3-h)H(\tau). \tag{3.8}$$

这也可看作平面 $\xi_3=h$ 的一点上牵引力的间断，有

$$[\boldsymbol{T}(\xi,\tau)]_{\xi=(\xi_1,\xi_2,h^-)}^{\xi=(\xi_1,\xi_2,h^+)}=-(0,0,F)\delta(\xi_1)\delta(\xi_2)H(\tau), \tag{3.9}$$

即 τ_{13}，τ_{23} 是连续的，τ_{33} 有跃变。(3.8)和(3.9)的等效值可直接应用(3.4)得到证明。

地震学中体力等效的最重要例子，是在剪切断裂中找到的，下面我们稍详细地讨论这个问题。

3.2 隐埋断层上滑动的简单例子

断层滑动产生的地震波，同断层上其力矩互相抵消的某种力的分布所产生的地震波一样。这个分布(对于给定的断层滑动)不是唯一的，但在各向同性介质中，它总是可被取为双力偶的面分布。从关于究竟用单力偶还是双力偶来模拟地震这一问题的长期

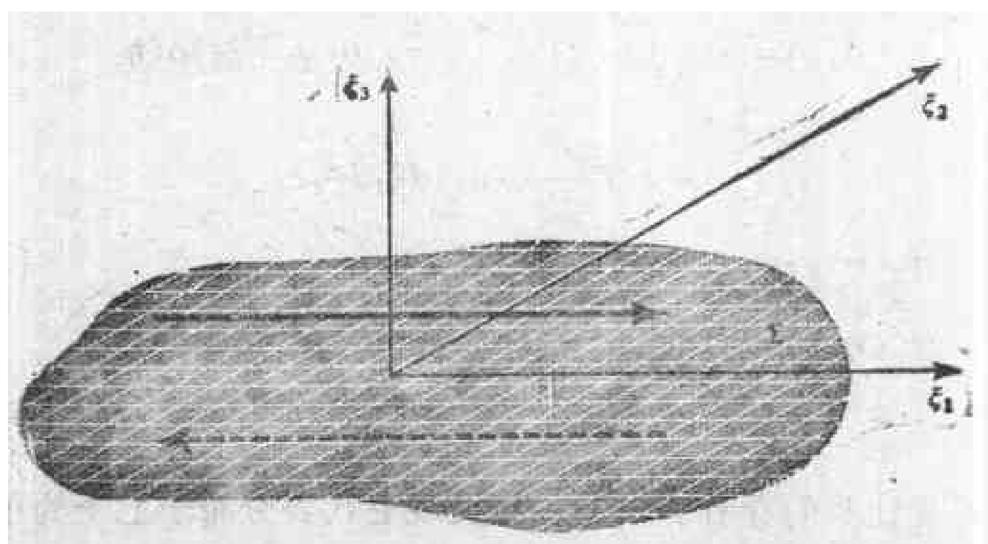


图 3.2

各向同性介质中的断层面位于 $\xi_3=0$ 平面内。假定在Σ上沿 ξ_1 方向发生滑动，如粗箭头所示。在Σ^+一边(即 $\xi_3=0^+$)的运动沿 ξ_1 增大的方向，而Σ^-一边的运动沿 ξ_1 减小的方向

争论中所用的论据来看，这个结论是有讽刺意味的。赞成单力偶理论的人们，认定地震是由断层上的滑动引起的，但他们直觉地以为这等效于单力偶(由相应于断层两边相对运动的两个力组成)。在弹性动力学中，直觉的办法常常是危险的。另一方面，赞成双力偶理论的一些人认为，地震必是在预先存在的剪切应力作用下的体积崩溃。近年来，断层理论(现已认为等效于双力偶)从非常靠近震源处得到的越来越多的资料，得到有力支持，也从在远距离观测到的辐射图案获得了支持。

如图 3.2 所示，我们取断层 Σ 位于 $\xi_3=0$ 平面内，使$[\boldsymbol{u}]$没有 ξ_3 方向的分量(这是我们曾称之为"断层滑动"的情况；即$[\boldsymbol{u}]$平行于Σ)。令 ξ_1 为滑动方向，则$[u_2]=[u_3]=0$ 和 $\nu_1=\nu_2=0$。根据(3.5)，这时的等效体力简化为

$$f_p(\boldsymbol{\eta},\tau)=-\iint_{\Sigma}[u_1(\boldsymbol{\xi},\tau)]c_{13pq}\frac{\partial}{\partial\eta_q}\delta(\boldsymbol{\eta}-\boldsymbol{\xi})\,d\xi_1 d\xi_2.$$

在各向同性(虽然仍可能不均匀)介质中，我们可由(2.33)求得，除$c_{1313}=c_{1331}=\mu$ 外，全部 c_{13pq} 为零。因此，

$$\begin{aligned}
f_1(\boldsymbol{\eta},\tau)&=-\iint_{\Sigma}\mu(\boldsymbol{\xi})[u_1(\boldsymbol{\xi},\tau)]\delta(\eta_1-\xi_1)\delta(\eta_2\\
&\qquad-\xi_2)\frac{\partial}{\partial\eta_3}\delta(\eta_3)\,d\xi_1 d\xi_2,\\
f_2(\boldsymbol{\eta},\tau)&=0,\\
f_3(\boldsymbol{\eta},\tau)&=-\iint_{\Sigma}\mu[u_1]\frac{\partial}{\partial\eta_1}\delta(\eta_1-\xi_1)\delta(\eta_2\\
&\qquad-\xi_2)\delta(\eta_3)\,d\xi_1 d\xi_2.
\end{aligned}\tag{3.10}$$

首先让我们看看 f_1，我们将发现它代表分布于Σ上的单力偶系(力沿$\pm\eta_1$方向，臂沿 η_3 方向，力矩沿 η_2 方向)。上述积分给出

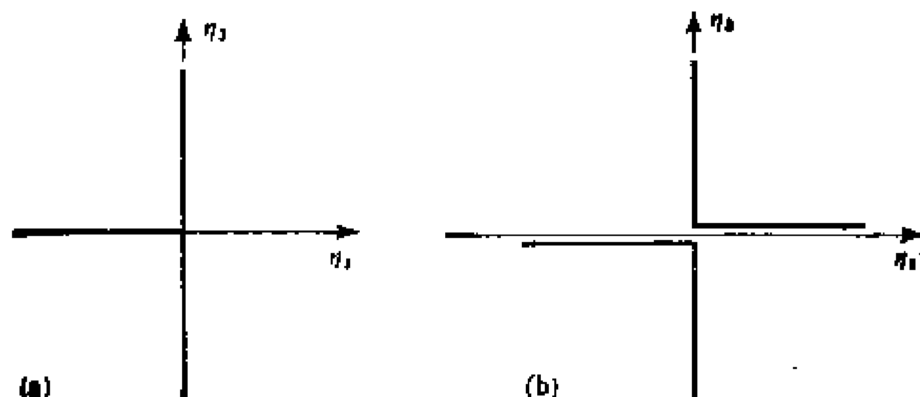
$$f_1(\boldsymbol{\eta},\tau)=-\mu(\boldsymbol{\eta})[u_1(\boldsymbol{\eta},\tau)]\frac{\partial}{\partial\eta_3}\delta(\eta_3).\tag{3.11}$$

如图 3.3 所示，这个分量可看作分布在平面 $\eta_3=0^+$ 上的点力和分布在平面 $\eta_3=0^-$ 上的反向力。

由 f_1 造成的合力为零[参看(3.6)的讨论]，但这个力分量的合力矩却不为零。相对于 η_2 轴的总力矩为

$$\iiint_V \eta_3 f_1 dV = -\iiint_V \eta_3\mu[u_1]\frac{\partial}{\partial\eta_3}\delta(\eta_3)d\eta_1 d\eta_2 d\eta_3$$

$$=\iint_\Sigma \mu[u_1(\xi,\tau)]d\Sigma.$$



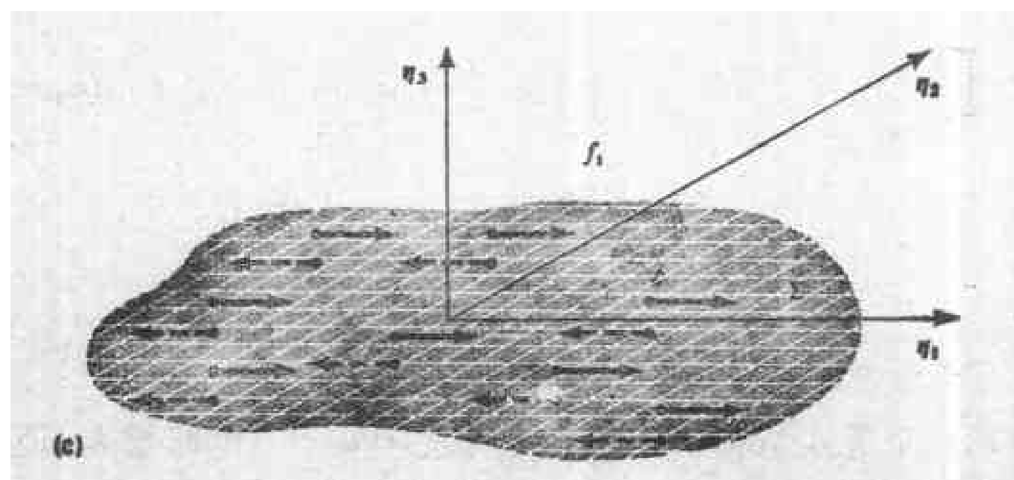


图 3.3

等效于图 3.2 所示类型断层滑动的体力之第一分量 f_1 的解释图。(a) 箭头 $(-\delta(\eta_3),0,0)$ 是按 η_3 画的（即箭头在 $-\eta_1$ 方向作用于 $\eta_3=0$）。(b) 微商 $\left(-\frac{\partial}{\partial\eta_3}\delta(\eta_3),0,0\right)$ 是按 η_3 画的。体力 $(f_1,0,0)$ 与此量成正比[见式(3.11)]。(c) 粗箭头表示 f_1 在 Σ 的 Σ^+ 一边和 Σ^- 一边(虚箭头)的分布。这个体力分量显然是在图 3.2 所示运动的任何体力模型中所期望的

如果在Σ上对滑动取平均，以求得量

$$\bar{u}(\tau)=\frac{\iint_{\Sigma}[u_1(\xi,\tau)]d\Sigma}{A},$$

其中 $A=\iint_{\Sigma}d\Sigma$ 是断层面的面积，如果断层区是均匀的（从而 μ 为常数），则由$f_1(\xi,\tau)$造成的相对于 η_2 轴的合力矩，简单地等于 $\mu\bar{u}A$，它沿 η_2 增大的方向。

(3.10)中所给的等效体力还包括 f_3，我们将发现它代表单力系。把对 η_1 的微商提至积分以外，得到

$$f_3(\eta,\tau)=-\frac{\partial}{\partial\eta_1}\{\mu[u_1(\eta,\tau)]\}\delta(\eta_3). \qquad (3.12)$$

虽然这个分量本身在Σ的每一点上不是我们曾表明 f_1 是力偶那种意义上的力偶，但是横跨Σ的 f_3 的总分布的确有着净力矩。图 3.4 表明在Σ的不同点上 f_3 如何能反向。相对于 η_2轴的合力矩为

$$\begin{aligned}\iiint_V e_{213}\eta_1 f_3 dV &= \iiint_V \eta_1\frac{\partial}{\partial\eta_1}\{\mu[u_1]\}\delta(\eta_3)d\eta_1 d\eta_2 d\eta_3\\ &=\iint_{\Sigma}\xi_1\frac{\partial}{\partial\xi_1}\{\mu[u_1]\}d\xi_1 d\xi_2\\ &=-\iint_{\Sigma}\mu[u_1]d\xi_1 d\xi_2.\end{aligned}$$

（最后这个等式是利用规定沿其周边有$[\boldsymbol{u}]=0$ 的断层表面Σ，由分部积分得到。）在均匀的震源区内，f_3 造成的合力矩是$-\mu\bar{u}A$，这与 f_1 的合力矩大小相等、方向相反。我们以(3.7)的较一般形式得到了这个结果，但在这里已看出，出现两个互相抵消的贡献。

现已证明，断层滑动等效于单力 f_1 的分布加上单力 f_3 的分布，后者的净效应为反力偶。然而，如同丸山在 1963 年对于一

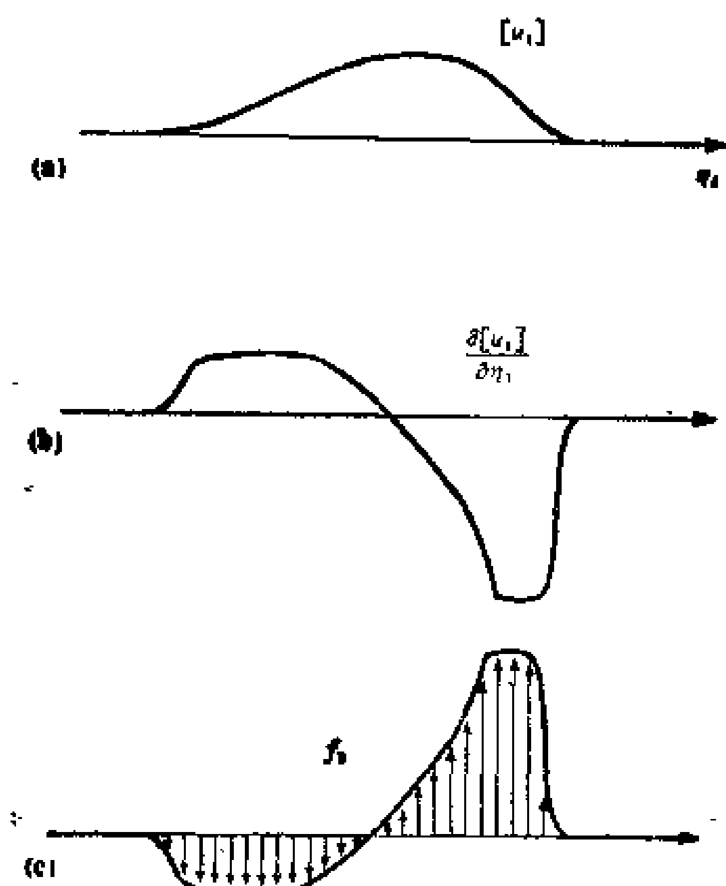


图 3.4

与断层滑动$[u_1]$等效的体力之第三分量f_3的解释图。(a) 假想的滑动$[u_1]$在固定的η_2和τ上随η_1的变化。(b) 相应的微商$\frac{\partial}{\partial\eta_1}[u_1]$。(c) 单力$f_3$随变化的$\eta_1$的分布(见方程(3.12))。这个分布将清楚地给出具有η_2方向力矩的净力偶

个有限断层所首先证明的，经典的等效于断层滑动的力，是Σ上的双力偶分布。事实是，对于一个给定的断层滑动，力等效不是唯一的。看清这一点的直接方法以及为求得双力偶密度以及单力偶(或单力)密度，是对于图 3.2 所描述的断层滑动写出表示式(3.2)。结果是

$$u_n(x,t)=\int_{-\infty}^{\infty}d\tau\iint_{\Sigma}\mu[u_1]\left\{\frac{\partial G_{n1}}{\partial\xi_3}+\frac{\partial G_{n3}}{\partial\xi_1}\right\}d\Sigma. \quad (3.13)$$

这里大括号中的第一项$\frac{\partial}{\partial\xi_3}G_{n1}(x,t-\tau;\xi,0)$是当$\varepsilon\to0$时

$$\frac{(G_{n1}(\boldsymbol{x},t-\tau;\boldsymbol{\xi}+\varepsilon\boldsymbol{\xi}_3,0)-G_{n1}(\boldsymbol{x},t-\tau;\boldsymbol{\xi}-\varepsilon\boldsymbol{\xi}_3,0))}{2\varepsilon}$$

的极限(取 $\boldsymbol{\xi}_i$ 为 ξ_i 方向的单位向量)。这是图 3.5 a 所示的单力偶分布。(3.13)的第二项包含

$$\frac{G_{n3}(\boldsymbol{x},t-\tau;\boldsymbol{\xi}+\varepsilon\boldsymbol{\xi}_1,0)-G_{n3}(\boldsymbol{x},t-\tau;\boldsymbol{\xi}-\varepsilon\hat{\boldsymbol{\xi}}_1,0)}{2\varepsilon}$$

的极限，它是图 3.5 b 所示的单力偶分布。这两个系统构成双力偶分布。我们必定要问，为什么前面导出的一套等效体力(3.10)是由一个单力偶加一个单力组成的。如果(3.13)用分部求积分，给出

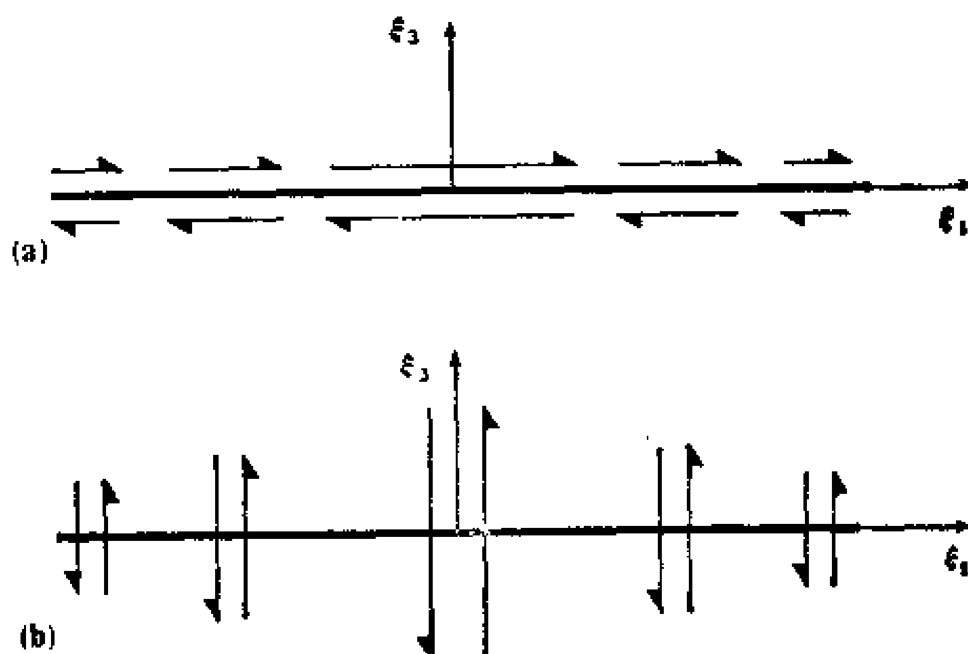


图 3.5

合在一起(在辐射同样的波的意义上)等效于断层滑动的两个单力偶分布。注意，既没有净力偶也没有净力作用在断层面($\xi_3=0$)的任何面积元上

$$u_n(x,t)=\int_{-\infty}^{\infty}d\tau\iint_{\Sigma}\mu\left([u_1]\frac{\partial G_{n1}}{\partial\xi_1}-\left[\frac{\partial u_1}{\partial\xi_1}\right]G_{n3}\right)d\Sigma,\tag{3.14}$$

就可看到答案。这个力系由图 3.6 说明；显然它与我们最初得到

的示于图 3.3 和图 3.4 的力系相同。由和断层面位移(图 3.2) 方

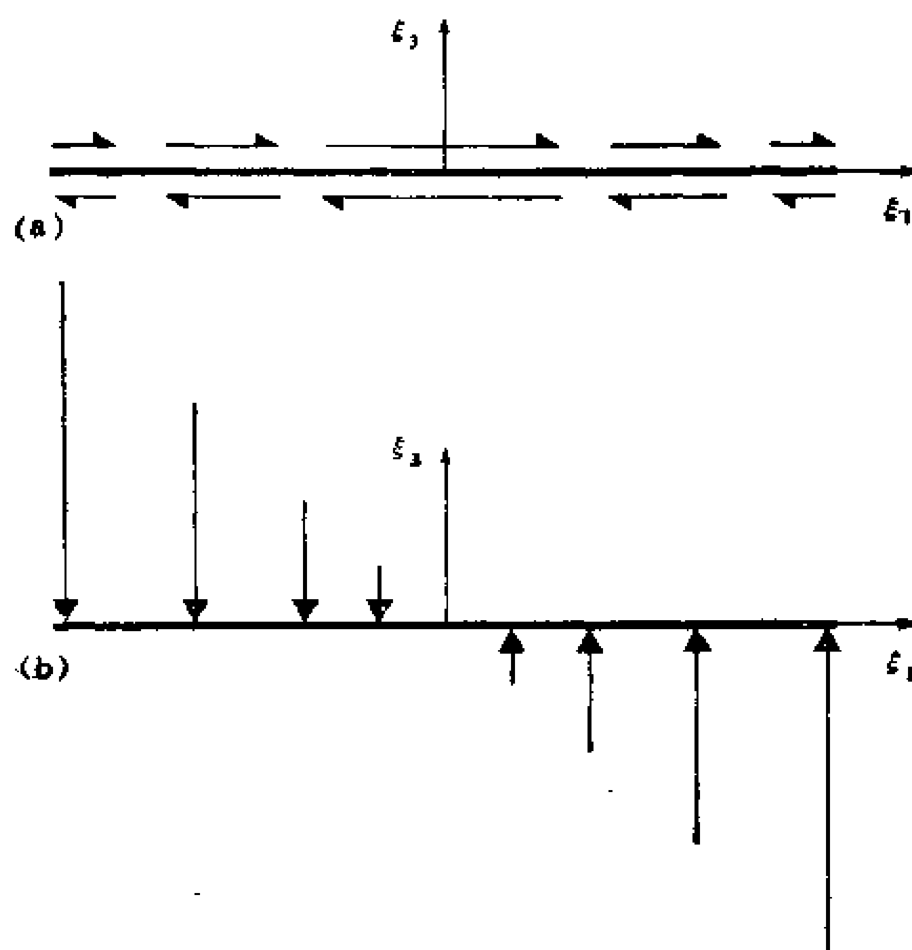


图 3.6

等效于断层滑动的另一力系(同图 3.5 比较)。(a)和(b)组成一个单力偶加单力的系统，对于整个断层面，它们的总力偶和总力为零。但在个别的面积元上，作用有力偶和力

向相同的力组成的单力偶(图 3.3，3.5 a，3.6 a 中的 f_1) 总是存在的。但是要与断层滑动的完全等效，还有单力(图 3.4 和图 3.6 b 中的 f_3)，或单力偶(图 3.5 b)，或者是这两种极端情形的适当线性组合。对于Σ上给定的面积元 $d\Sigma$，这些力系在物理上是完全不同的；根据表示式(3.13)的被积函数，似乎没有力或力矩作用于 $d\Sigma$；但根据(3.14)，则的确有力和力矩作用于 $d\Sigma$，尽管我们前面已证明，f_1 和 f_3 的积分在整个Σ上给出的净力和净力矩为零。

我们已详细阐明了这些结果，因为它们表明力的等效对研究断层滑动动力学的用处是有限的。辐射地震波的是整个断层面，我们不能根据(3.13)或(3.14)估价个别的断层面积元对辐射所做的实际贡献。这在物理上是可以理解的，因为个别的断层面积元并不同断层的其它部分隔离开来进行动力运动。等效力（通常取作双力偶分布）的主要用途只是在滑动函数$[u(\xi,\tau)]$已被确定(或被推测)之后。这时它们的重要性在于使得能够用加权的Green函数来计算辐射。

在离破裂断层非常远处，被观测到的常常只有其波长比作为波源的断层Σ的线度大得多的波。(高频分量即使在震源——参看第十五章——也是比较弱的，并在传播中衰减较快。)在此情况下，Σ作为一个点源在起作用，而滑动被限定为用集中的分布$\bar{u}A\delta(\xi_1)\delta(\xi_2)H(\tau)$代替$[u(\xi_1,\xi_2,\tau)]$，这时，$f_3$以及$f_1$变为单力偶，而等效于断层滑动的双力偶是

$$
\begin{aligned}
f_1(\eta,\tau) &= -M_0\delta(\eta_1)\delta(\eta_2)\frac{\partial}{\partial\eta_3}\delta(\eta_3)H(\tau) \\
f_2 &= 0 \qquad\qquad (3.15) \\
f_3(\eta,\tau) &= -M_0\frac{\partial}{\partial\eta_1}\delta(\eta_1)\delta(\eta_2)\delta(\eta_3)H(\tau),
\end{aligned}
$$

式中

$$M_0=\mu\bar{u}A=\mu\times\text{平均滑动}\times\text{断层面积}. \qquad (3.16)$$

我们把M_0叫做地震矩。它也许是我们可用来测定断层滑动引起的地震的强度的最基本参数。M_0的测定值从大约10^{30}达因·厘米(1960年智利地震，1964年阿拉斯加地震)，直到微震的大约10^{12}达因·厘米，和实验室中加载岩石样品微破裂的10^5达因·厘米。即使对于地球物理学，二十五个数量级也是单一物理变量所跨越的罕见的大变程。关于滑动的有效点源，第一个得到双力偶等价的人是Vvedenskaya(1956)。地震矩的第一次估算，是安艺(1966)用全球标准地震台网记录到的长周期Love波，对

1964 年新潟地震做出的。

我们已定义 M_0 是一个常数，但对某些目的来说，把地震矩看作由 $\mu\bar{u}(t)A$ 给出的时间函数是有用的，其中 $\bar{u}(t)$ 是在时间 t 的平均值。在这些情况下，(3.15)中的 $M_0H(\tau)$ 用 $M_0(\tau)$ 代替，并且我们说"上升时间"(见第十四章中的术语)不为零。

注意，在鉴别同点源双力偶 (3.15) 相联系的断层面时，存在着一个基本的模棱两可的问题。我们进行的讨论，是用断层面垂直于 x_3 方向，而滑动平行于 x_1 方向。如果断层面改为垂直于 x_1 方向，而滑动平行于 x_3 方向，并具有相同的力矩，则等效的体力仍是 (3.15)。于是，在从滑动的有效点源产生的地震辐射中，可以不存在能使我们区分断层面及其辅助面 (即与断层和滑动方向都垂直的平面) 的信息。

3.3 内表面Σ上位移间断的一般分析

在本节我们要引进地震矩张量$\mathbf{M}$。这是一个依赖于震源强度和断层空间取向的量，并且它表征着从波长比Σ的线度大得多的观测波所能了解到的所有震源信息。在此情况下，震源在效果上是一个带有辐射图案的点源，对给定的地震，常常可以在实践中用长周期远震资料，求地震矩张量的值。实际上，地震学家们用的矩张量被限制于仅由力偶给定的等效体力源。这种源包括地质断层 (剪切) 和爆炸 (膨胀)，其 $\mathbf{M}$ 为二阶张量。对于力的高于一次的微分，源可用高阶矩张量来表征。

对于有限大的源，我们将引进地震矩密度张量 $\mathbf{m}$，它常可看作 $d\mathbf{M}/d\Sigma$，或者对于体源看作 $d\mathbf{M}/dV$。

这一节在两方面把 3.2 节推广。第一是所取坐标轴的方向与震源的方向性无关 (这个推广是重要的，因为滑动的方向和断层面的空间取向通常预先不知道，而必须根据辐射的地震波进行推断)。第二是允许垂直于断层面的位移分量有间断，因而视膨胀

或压缩是允许发生的。

我们对位移间断进行一般分析的出发点是式(3.2)，但现在用褶积符号 $*$，所以有

$$u_n(x,t)=\iint_{\Sigma}[u_i]\nu_j c_{ijpq} * \frac{\partial}{\partial \xi_q}G_{np}d\Sigma, \tag{3.17}$$

如果 X_0 是沿 p 方向作用于 ξ 的力的幅度并具有一般时间变化，则褶积 $X_0 * G_{np}$ 给出 ξ 处的变化点力引起的 (x, t) 处位移的 n 分量。更普遍地说，如果作用于 ξ 的力是 $F(\xi,\tau)$，则我们可以对 p 求和，并对 (x, t) 处位移的 n 分量写出 $F_p * G_{np}$。象在(3.17)中一样，也有一个 G_{np} 对震源坐标 ξ_q 的微商。这样一个微商，我们在 3.2 节见到过，可以在物理上看作等效于在 ξ 点的 Σ 上有一单力偶（力臂沿 ξ_q 方向）。

对于力的三个分量和三个可能的力臂方向，有 9 个广义力偶，如图 3.7 所示。因此，对应于一个无穷小面元 $d\Sigma(\xi)$ 的等效面力，可表示为 9 个力偶的组合。一般说，我们需要力和臂在相同方向的"力偶"（图 3.7 中 (1,1)，(2,2)，(3,3)的情况），有时把这些叫做向量偶极子。

由于(3.17)中的 $[u_i]\nu_j c_{ijpq} * \frac{\partial}{\partial \xi_q}G_{np}$ 是 ξ 处的力偶引起的 x 处的场，所以 $[u_i]\nu_j c_{ijpq}$ 是 (p, q) 力偶的强度。$[u_i]\nu_j c_{ijpq}$ 的量纲是单位面积的矩，这是合理的，因为 ξ 的贡献必须是面密度，以无穷小面积元 $d\Sigma$ 加权就给出矩。我们定义

$$m_{pq}\equiv[u_i]\nu_j c_{ijpq} \tag{3.18}$$

为矩密度张量 $\mathbf{m}$ 的分量。用这个依赖于时间的对称张量，对于 Σ 上的一般位移间断 $[\mathbf{u}(\xi, \tau)]$ 引起的 x 处的位移，表示定理是

$$u_n(x,t)=\iint_{\Sigma} m_{pq} * G_{np,q}d\Sigma. \tag{3.19}$$

当对 Green 函数有了更多了解（在第四章）以后，我们将发现，

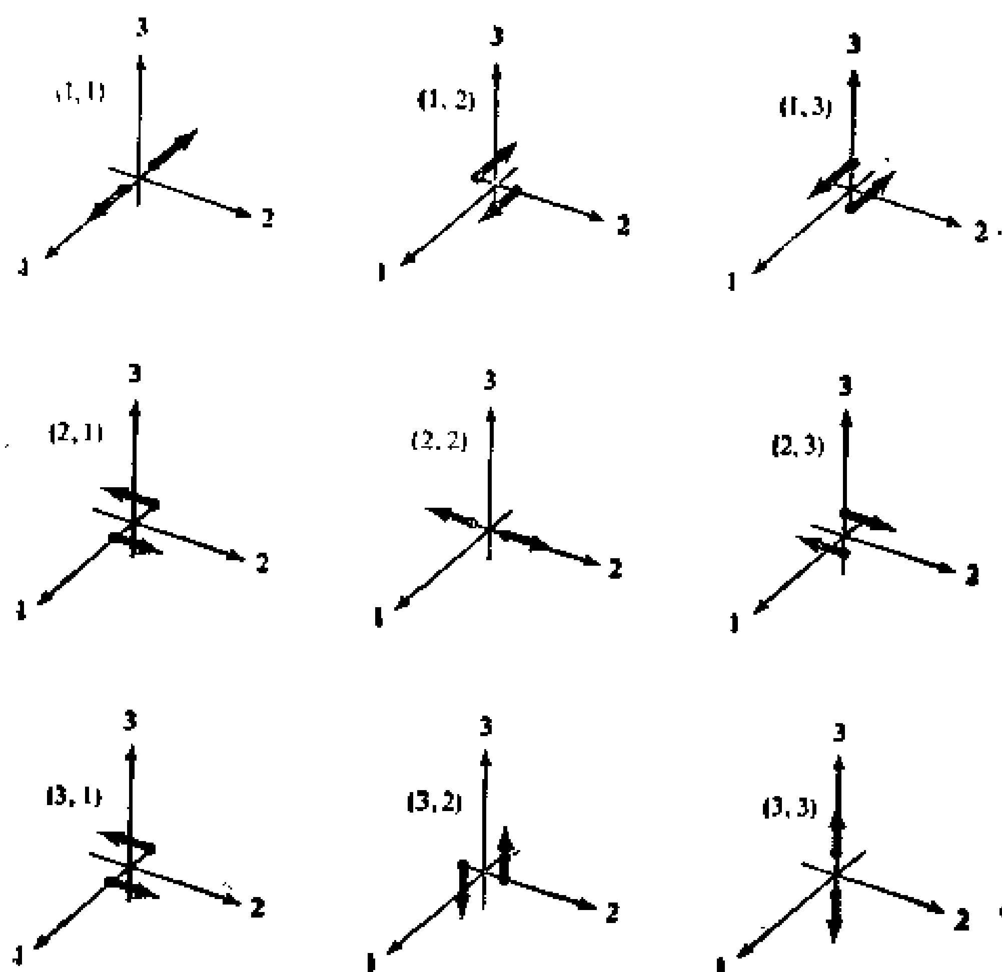


图 3.7

对于各向异性介质中一般取向的位移间断，为得到等效力所需要的9个可能力偶

(3.19)中的被积函数对时间的依赖关系十分简单，因为，如果 x 到 ξ 的距离是波长的许多倍，则与 G 的褶积所给出的 (x,t) 处的场，依赖于 ξ 处在“推迟时间”，即 t 减去 ξ 与 x 之间的某个传播时间，所发生的情况。

对于各向同性体，根据(2.33)和(3.18)有

$$m_{pq}=\lambda\nu_k[u_k(\xi,\tau)]\delta_{pq}+\mu(\nu_p[u_q(\xi,\tau)]+\nu_q[u_p(\xi,\tau)]). \tag{3.20}$$

此外，如果位移间断（或滑动）在 ξ 处平行于Σ，则标量积 $\nu[u]=0$，而

$$m_{pq}=\mu(\nu_p[u_q]+\nu_q[u_p]). \tag{3.21}$$

在Σ位于平面$\xi_3=0$内、滑动只沿ξ_1方向的情况下，我们有3.2节考虑过的震源模型，对此，矩密度张量为

$$\mathbf{m}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & \mu[u_1(\boldsymbol{\xi},\tau)] \\ 0 & 0 & 0 \\ \mu[u_1(\boldsymbol{\xi},\tau)] & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

它是现已熟悉的双力偶.

在$\xi_3=0$平面内出现张裂缝的情况下，只有滑动分量$[u_3]$不为零，据(3.20)我们求得

$$\mathbf{m}=\begin{pmatrix} \lambda[u_3(\boldsymbol{\xi},\tau)] & 0 & 0 \\ 0 & \lambda[u_3(\boldsymbol{\xi},\tau)] & 0 \\ 0 & 0 & (\lambda+2\mu)[u_3(\boldsymbol{\xi},\tau)] \end{pmatrix}.$$

所以，一个张裂缝等效于三个向量偶极子的叠加，其大小之比为$1:1:(\lambda+2\mu)/\lambda$(见图3.8)。

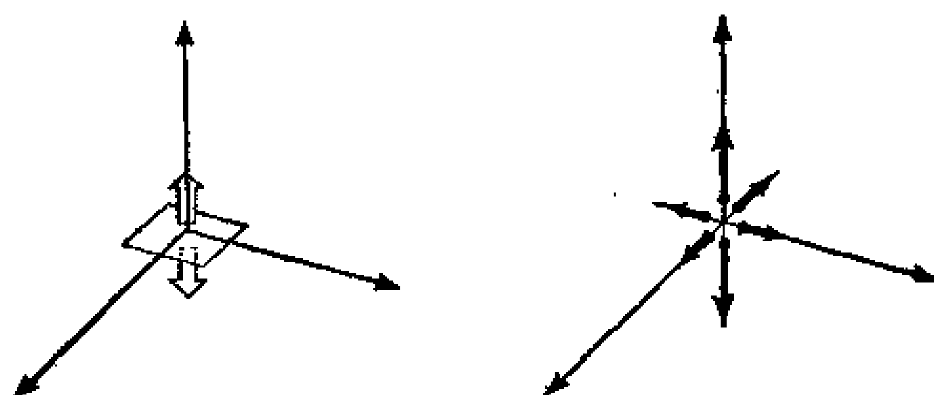


图 3.8

各向同性介质中等效于张裂缝的体力

上述结果是对有限大的断层面Σ推导的，但是事实上，地震学家所有的资料只适用于这种周期，即整个Σ实际上可看成是个点源。对于这些波，不同面元$d\Sigma$的贡献都近似是同位相的，而整个面Σ可以当作处于一点（比如说Σ的中心）的力偶系，其矩张量等于Σ上矩密度的积分。因此，对于一个有效点源，

$$u_n(x,t)=M_{pq}*G_{np,q}, \tag{3.22}$$

式中矩张量的分量为

$$M_{pq}=\iint_{\Sigma} m_{pq}d\Sigma=\iint_{\Sigma}[u_i]\nu_j c_{ijpq}d\Sigma,$$

即
$$m_{pq}=\frac{dM_{pq}}{d\Sigma}. \tag{3.23}$$

(3.22)是本章最重要的方程之一。在本书的后面，我们将估算 Green 函数和它所包含的不同的波。例如，在第四章我们将对 G 使用射线理论，并用由给定的 **M** 激发的体波（式(4.91)）来解释(3.22)。在第七章,我们将求出 **M** 激发的面波(式(7.147)—(7.150))，在第八章将求出整个地球的简正振型(8.37)。

用地震矩 M_0，并选用 3.2 节中给的坐标轴，滑动的有效点源的矩张量是

$$\mathbf{M}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & M_0 \\ 0 & 0 & 0 \\ M_0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{3.24}$$

式（3.23）证明 **m** 的名称"矩张量密度"是正确的。在有限源情况下，我们现在可把式（3.19）解释为点源的面分布，每个点源有矩张量 $\mathbf{m}\,d\Sigma$。

我们以 Brune（1968）提出的关于构造板块运动的"地震矩"的有趣用法来结束本节。这种运动常常导致一种区域地震活动性，其中许多不同的地震共同占有同一断层面（虽然任何一个地震只包含在整个断层面积的一部分上的滑动)。如果 M_0^i 是一系列 N 个地震中第 i 个地震的地震矩，则根据 M_0^i 的定义，整个系列造成的总位移是

$$\Delta U=\frac{\sum_{i=1}^{N}M_0^i}{\mu S}, \tag{3.25}$$

式中 S 是在这个系列中受破坏的总面积。ΔU 是在全 S 上取平均，

(3.25)右边所有的项都是可估算的。如果地震系列包括给定时期ΔT内的所有重要的地震，并且如果ΔT内的地震活动代表着较长时间尺度的板块边缘活动，则$\Delta U/\Delta T$可看作是板块的相对速度的一个估计，它可仅由地震资料获得，这时板块可看作是缓慢运动的刚体。

补充 3.2

"矩"这个词在震源理论中的用法

在转动力学中，对于力偶只要指出它的大小和单一方向，一般就足够了。这时力偶的大小是个标量，叫做矩。但是，在我们的位移间断和等效体力的研究中，"力偶"这个词常意味着比在刚体转动力学中要多的方向性质。对于我们，"力偶"含有力和杠杆臂二者的方向。其结果，"矩"这个量就从标量一跃而为张量。

数学物理中的二阶笛卡尔张量，通常是将一个物理向量同另一个物理向量联系在一起的量[例如式(2.16)中的应力张量，是由面积元的矢量取向得到牵引力的手段；面惯性张量$\mathbf{I}$，通过$h_i=I_{ij}\omega_j$，可由角速度$\boldsymbol{\omega}$给出角动量$\mathbf{h}$]。但是，在震源理论中，矩张量是输入信号而不是滤波器，它是用三阶张量进行运算，以给出矢量位移（参看(3.19)和(3.22))。

补充 3.3

等效体力和地震矩张量

对于Σ上的一般位移间断，根据(3.5)，有

$$f_p=-\frac{\partial}{\partial\eta_q}\{[u_i]\nu_j c_{ijpq}\delta(\Sigma)\},$$

式中我们用$\delta(\Sigma)$表示在Σ以外为零的一维空间的Dirac δ函数。因此，若Σ位于平面$\xi_3=0$内，则对于Σ上的点(η_1, η_2)，有$\delta(\Sigma)=\delta(\eta_3)$。

必须强调$\mathbf{f}$是单位体积的力，并且它是唯一的。(一旦$[u_i]$在Σ上给定，则$\mathbf{u}$在各处都是确定的，且$\mathbf{f}=\mathbf{L}(\mathbf{u})$，其中$\mathbf{L}$在补充2.4中给出。)仅仅当寻求等效面力时，才出现3.2节中所说的含混的情况。因此，上面的f_p公式并不给出力偶和偶极子的分布。只是在位移表示式

$\iiint\limits_V G_{np}\{f_p\}dV$用分部积分积出和$\eta_q$积分被完成而给出（3.17）之后，才出现这样一种分布，这时（3.17）可用等效面力来解释。这些都是不唯一的(见(3.13)和(3.14))，但力偶和矢量偶极子的面分布总是可能的。

我们以$M_{pq}=\iint\limits_\Sigma [u_i]\nu_j c_{ijpq}d\Sigma$的形式引入了地震矩张量，但从上面的体力公式很容易证明

$$M_{pq}=\iiint\limits_V f_p\eta_q dV(\eta).$$

这个结果可用来推广M的定义，因为它可用于任何体力分布，不仅用于同位移间断等效的体力。用这个定义，体力f相对于i轴的矩（在普通转动力学意义上）是$\iiint\limits_V \varepsilon_{ijk}\eta_j f_k dV=\varepsilon_{ijk}M_{kj}$，当矩张量是对称的（例如，在(3.23)中），它就等于零。

补充 3.4

地震断裂释放的应变能

在有初始静态应力场σ^0的介质内，我们假定位移间断在内界面Σ上发展。这导致相对于初态而测定的位移场$\mathbf{u}(\mathbf{x},t)$，从$\mathbf{u}$我们可以确定附加的依赖时间的应变和附加应力$\boldsymbol{\tau}$。这时总应力为$\sigma=\sigma^0+\boldsymbol{\tau}$，而所有运动都停下来以后的新静态应力场是$\sigma^1$。如果定义$\Delta E$为整个介质从其初始静态至终静态的应变能变化，则可证明

$$\Delta E=-\frac{1}{2}\int\limits_\Sigma [u_i](\sigma_{ij}^0+\sigma_{ij}^1)\nu_j d\Sigma, \tag{1}$$

其中[$\mathbf{u}$]是最后的断错。(参看图 3.1 关于[ ]和$\boldsymbol{\nu}$的定义。)式(1)是大家知道的Volterra关系式(Steketee, 1958；Savage, 1969a)。

这个结果(我们在下面推导它)可以用断层面上的牵引力所做的功来简单地重新陈述。根据(1)我们可以说，整个介质的应变能降落$-\Delta E$，是通过假想牵引力的准静态生长得到的正量，牵引力同断错在$0\leqslant U\leqslant[u]$范围内成线性关系(对于牵引力T和位移U的每个分量)：

$$T=T^0+(T^1-T^0)\frac{U}{[u]}.\tag{2}$$

从0到$[u]$进行积分得到在Σ上做的总功，就给出(1)。

关于ΔE同平均应力之间的这个关系，有几点现在需要指出。

释放的能$-\Delta E$，供给在两个面Σ^+和Σ^-上由于互相磨过去实际所做的功，加上在产生破裂过程中所做的功。我们在第十五章讨论这两种功。此外，$-\Delta E$还供给由震源辐射出的地震波能E_s。很自然，我们可定义比值$E_s/(-\Delta E)$作为地震效率η，这时

$$E_s=-\eta\Delta E=\frac{1}{2}\eta\int_{\Sigma}[u_i](\sigma_{ij}^1+\sigma_{ij}^0)\nu_j d\Sigma.\tag{3}$$

如果两个静态牵引力的平均值在Σ上的变化并不大，则对于图 3.2 中所示的剪切滑动型，我们看到 (3) 可以用矩$M_0=\mu\int_{\Sigma}[u_i]d\Sigma$来表示。它给出

$$E_s=\eta M_0\frac{\bar{\sigma}}{\mu},\tag{4}$$

其中$\bar{\sigma}=\frac{1}{2}(\sigma_{13}^0+\sigma_{13}^1)$。

根据可以估计的E_s，M_0和μ，便可能由(4) 估算乘积$\eta\bar{\sigma}$。Wyss和Brune(1968，1977)叫这个乘积为视应力。

由于(3.17) 中的滑动函数$[u(\xi,t)]$决定着整个介质中的全部位移(因而也决定着应变和应力的增量)，所以它也决定着应力降$\sigma^0-\sigma^1$。但是，没有办法能够仅仅根据辐射场$u(x,t)$的观测来计算有关震源区的绝对应力水平。用另外一种说法，利用(1)，可以得到以下的结论。如果在具有不同初应力的两个不同断裂事件中，在Σ上出现相同的滑动函数$[u(\xi,t)]$，则这两个事件的全部地震位移将是相同的；但两个事件释放的应变能可以是大不相同的。

剩下的就是要证明我们的主要结果 (1)。这是个有很大普遍性的公式，正确的推导，事实上可通过我们在(2) 中描述的准静态变形来得到。我们现在将对于一个特殊的情况，即内部应变能u是由一个应变能函数$\mathscr{W}$ (参看2.2节) 所确定，给出一个明确的证明。此外，我们假定存在一个可以达到的零应力和零应变参考状态。在即将断裂之前的初应力和初应变是σ_{ij}^0和e_{ij}^0，u就是从这个状态测量的。

将（2.32）应用于总应力和总应变，我们得到

$$\mathscr{W}=\frac{1}{2}(\sigma_{ij}^0+\tau_{ij})(e_{ij}^0+u_{i,j})\quad（利用\sigma_{ij}的对称性）$$

$$=\mathscr{W}^0+\frac{1}{2}\sigma_{ij}u_{i,j}+\frac{1}{2}c_{ijkl}u_{k,l}e_{ij}^0$$

$$=\mathscr{W}^0+\frac{1}{2}\sigma_{ij}u_{i,j}+\frac{1}{2}\sigma_{kl}^0u_{k,l}\quad（利用(2.30)）.$$

在新静态中内能的增加是

$$\Delta E=\int_V(\mathscr{W}^1-\mathscr{W}^0)dV=\frac{1}{2}\int_V(\sigma_{ij}^1+\sigma_{ij}^0)u_{i,j}dV,\qquad(5)$$

其中V是包括Σ的整个弹性体积（见图3.1）。因为σ_{ij}^0和σ_{ij}^1是静态应力场，所以(2.17)意味着$\sigma_{ij,j}^0=\sigma_{ij,j}^1=0$（我们假定不存在体力）。由(5)我们得到

$$\Delta E=\frac{1}{2}\int_V\{(\sigma_{ij}^0+\sigma_{ij}^1)u_i\}_{,j}dV,$$

对此我们可应用Gauss散度定理，V是$S+\Sigma^++\Sigma^-$的内部。如果S是刚性表面，或者像地球表面那样，是个自由面，则这就给出(1)。

3.4 体积源：理论的轮廓和某些简单例子

为了导出由地下爆破或快速相变产生的地震波的方程，有必要引进体积源的概念。我们将用引入到震源体的转换(或无应力)应变 (transformational strain)来描述这种源，并将导出有关的地震矩张量的性质。

让我们用一组 Eshelby(1957)所描述过的假想的切割、变形和焊接操作来说明这个概念。第一，将震源物质沿其表面Σ切割，并把震源体（“包体”）从它周围物质（“母体”）移开。在这一步，我们假定被移开的物质，在其表面Σ上施加着和切割前母体所施加的同样大小的牵引力，因而保持其原来形状不变。第二，我们令震源物质经受转换应变Δe_{rs}。这意思是说，发生Δe_{rs}但不改变包体内的应力，因而叫做“无应力的应变”。正是这个应

变表示着震源的特征。可以用无应力的应变来描述的过程，包括相变、热膨胀和某些塑性变形。无应力应变是个静力学概念。第三，在外表面施加牵引力以使震源体恢复其原来形状：这将在整个包体内产生附加应力场 $c_{pqrs}\Delta e_{rs}=-\Delta\tau_{pq}$，而作用在它表面$\sum$上的附加牵引力是$-c_{pqrs}\Delta e_{rs}\nu_q$，其中 ν_q 是 $\sum$ 上的向外的法线。由于$\Delta\tau_{pq}$是静态场，故$\Delta\tau_{pq,q}=0$。母体中的应力仍不变，由加于内表面$\sum$上的牵引力使其保持原值，这个牵引力与包体被切掉以前加于母体的牵引力相等。第四，把包体放回到它的孔穴(完全是原来的形状)，并沿切口把物质焊接好。现在$\sum^-$上的牵引力比$\sum^+$上的量大$-c_{pqrs}\Delta e_{rs}\nu_q$，导致（沿$\nu$方向）牵引力间断量$+c_{pqrs}\Delta e_{rs}\nu_q$。这个牵引力是由在震源外部施加的面力造成的，它作用在包体上以维持其正确形状。第五，解除$\sum^-$上施加的面力。因为穿过$\sum$时牵引力实际是连续的，故它等于施加的视牵引力间断$-(c_{pqrs}\Delta e_{rs})\nu_q$。全部过程在母体中产生的弹性场，是由穿过$\sum$的视牵引力间断造成的。

上述步骤可以推广到地震波产生的动力学情况，因为，在任一给定的时间，都能对于无应变的物质，定义一个转换应变Δe_{rs}。在每个时刻，$\Delta\tau_{pq,q}=0$仍然正确。牵引力间断产生的地震位移由(3.3)给出。把$[T_p]=-(c_{pqrs}\Delta e_{rs})\nu_q$代入(3.3)，得到

$$u_n(x,t)=\int_{-\infty}^{\infty}d\tau\iint_{\Sigma}c_{pqrs}\Delta e_{rs}\nu_q G_{np}(x,t-\tau;\xi,0)\,d\Sigma(\xi).\tag{3.26}$$

若被积函数及其对ξ的微商是连续的，就可以应用 Gauss 定理，求得

$$u_n(x,t)=\int_{-\infty}^{\infty}d\tau\iiint_{V}\frac{\partial}{\partial\xi_q}\{c_{pqrs}\Delta e_{rs}G_{np}(x,t-\tau;\xi,0)\}dV(\xi).\tag{3.27}$$

(这里的V仅仅指包体即震源体的体积。)利用$\partial(c_{pqrs}\Delta e_{rs})/\partial\xi_q=\Delta\tau_{pq,q}=0$，可以改写（3.27)，得到

$$u_n(x,t)=\iiint_V c_{pqrs}\Delta e_{rs}*\frac{\partial G_{np}}{\partial \xi_q}dV. \tag{3.28}$$

比较一下这个体积分与（3.17）中的面积分，自然就引进下列矩密度张量：

$$\frac{dM_{pq}}{dV}=c_{pqrs}\Delta e_{rs}, \tag{3.29}$$

其量纲是单位体积中的矩（请与(3.23)比较）。所以

$$u_n(x,t)=\iiint_V \frac{dM_{pq}}{dV}*\frac{\partial G_{np}}{\partial \xi_q}dV. \tag{3.30}$$

注意，$\Delta\tau_{pq}=\frac{dM_{pq}}{dV}$不是应力降（震源区中初平衡态应力与终平衡态应力之差）：从它的定义看，这是很清楚的。应力降不局限于震源体内，但是$\Delta\tau_{pq}$在震源体以外为零。Backus 和 Mulcahy (1976) 把$\Delta\tau_{pq}$叫做"应力过剩（Stress glut)"。

对于长周期波，整个V实际是个点源，所以V可看作位于某点，比如V的中心的力偶系，其矩张量等于矩密度在V上的积分。因此，对于有效点源，(3.22) 是适用的，其矩张量分量为

$$M_{pq}=\iiint_V c_{pqrs}\Delta e_{rs}dV. \tag{3.31}$$

例：若在具有非零的转换应变分量（比如$\Delta e_{13}=\Delta e_{31}$）、体积为$V$的均匀各向同性体内，发生一剪切崩溃，则矩张量为

$$\mathbf{M}=2\mu V\begin{pmatrix}0 & 0 & \Delta e_{13}\\ 0 & 0 & 0\\ \Delta e_{31} & 0 & 0\end{pmatrix}. \tag{3.32}$$

地震辐射与等效于断层滑动的点源相同，只是地震矩M_0由$2\mu\Delta e_{13}V$给定。对于板内地震带中的一组地震，累积应变可能比 (3.25) 所给的累积滑动更有意义。Kostrov(1974) 提出对一给定体积内有相同震源机制的一组地震的矩求和，求得到该体积内的总应变。根据 (3.32)，可估计总应变ΔE_{13}为

$$\Delta E_{13}=\frac{\sum\limits_{i=1}^{N} M_0^i}{2\mu V}, \qquad (3.33)$$

其中M_0^i是第i个地震的矩。

最后，考虑一个经受转换膨胀的半径为a的球体。此情况下无应力应变的分量为$\Delta e_{12}=\Delta e_{13}=\Delta e_{23}=0$，而$\Delta e_{11}=\Delta e_{22}=\Delta e_{33}=\frac{1}{3}\Delta\theta$，其中$\Delta\theta$是体积的相对变化。对于均匀各向同性体，根据（3.31），有

$$\mathbf{M}=\frac{4\pi}{3}a^3\begin{pmatrix}\Delta P & 0 & 0\\ 0 & \Delta P & 0\\ 0 & 0 & \Delta P\end{pmatrix}, \qquad (2.34)$$

式中$\Delta P=\left(\lambda+\frac{2}{3}\mu\right)\Delta\theta$。所以，一个具有转换体积膨胀的球形源，等效于如图3.7所示的三个互相垂直的偶极子。在上面方程中，不要把ΔP同半径为a的球面上的压力跃变（参看问题3.5）弄混淆。

建议进一步阅读的文献

Backus, G., and M. Mulcahy. Moment tensors and other phenomenological descriptions of seismic sources-I. Continuous displacements. *Geophysical Journal of the Royal Astronomical Society*, **46**, 341-361, 1976.

Backus, G., and M. Mulcahy. Moment tensors and other phenomenological descriptions of seismic sources-II. Discontinuous displacements. *Geophysical Journal of the Royal Astronomical Society*, **47**, 301-329, 1976.

Burride, R., and L. Knopoff. Body force equivalents for seismic dislocations. *Rulletin of the Seismological Society of America*, **54**, 1875-1888, 1964.

Eshelby, J. D. The determination of the elastic field of an ellipsodal inclusion and related problems. *Proceedings of the Royal Society*, **A241**, 376-396, 1957.

Kostrov. B. V. The theory of the focus for tectonic earthquakes. *Izvestia*, *Physics of the Solid Earth*, 258-267, April 1970.

Kostrov, B. V., Seismic moment and energy of earthquakes and seismic flow of rock. *Izvestia*, *Physics of the Solid Earth*, 13-21, January 1974.

Maruyama, T. On force equivalents of dynamic elastic dislocations with reference to the earthquake mechanism. *Bulletin of the Earthquake Research Institute, Tokyo University*, **41**, 467-486, 1963.

Nyland, E. Body force equivalents as sources of anelastic processes. *Canadian J. Earth Sci.*, **8**, 1184-1189, 1971.

Press, F., and C. Archambeau. Release of tectonic strain by underground nuclear explosions. *Journal of Geophysical Research*, **67**, 337-342, 1962.

Savage, J. C. Steketee's paradox, *Bulletin of the Seismological Society of America*, **59**, 381, 1969.

Steketee, J. A. Some geophysical applications of the theory of dislocations. *Canadian Journal of Physics*, **36**, 1168-1198, 1958.

问　　题

3.1 方程（3.25）和（3.33）都写作标量方程，是因为在它们的推导中已假定，给定区域（S上或V内）中的地震都有相同取向的矩张量。

对于系列中的地震（在S上或V内）有任意取向的矩张量的情况，试将（3.25）推广为矢量方程，将（3.33）推广为张量方程。[但是，对于（3.35），继续假定每个地震的位移

间断是剪切，S 是平面。]

3.2 在 (3.2) 的推导中，我们假定弹性常数穿过Σ时是连续的，以及 G_{np} 和$\frac{\partial}{\partial \xi_q}G_{np}$ 是连续的。如果它们穿过Σ 时不连续，试把 (3.2) 中被积函数的一部分解释为牵引力，并证明，虽然$\partial G_{np}/\partial \xi_q$ 可能穿过表面时不连续，但式 (3.2) 仍有效。(注意：为确定G，假定Σ是个焊接面。)

3.3 我们已说过，依赖于时间的地震矩，由$M_0(t)=\mu \bar{u}(t)A$ 给出。这里的$\bar{u}(t)$是在时间t已破裂开的面积$A(t)$ 上取平均，还是在所考虑的地震期间最终破裂开的面积$A(\infty)$ 上取平均？

3.4 证明与$\boldsymbol{\xi}$处具有矩张量M_{pq} 的点源等效的体力由下式给出：

$$f_p(\boldsymbol{x},t)=-M_{pq}(t)\frac{\partial}{\partial x_q}\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\xi}).$$

3.5 考虑均匀各向同性体内一个半径为 a 的球形空腔。当在空腔表面作用着均匀压力跃变 ΔP 时，将产生只沿径向有位移分量的球对称波。试证明与此震源等效的点源的矩张量有类似于 (3.34) 的形式，只是系数 4/3 换成 $(\lambda+2\mu)/\mu$。(利用以下关系：径向位移 $u(r,t)=-\frac{\partial}{\partial r}\left[\Psi\left(t-\frac{r}{\alpha}\right)\Big/ r\right]$满足运动方程，其中 r 是到空腔中心的距离，α 是压缩波的速度。)

第四章　点位错源产生的弹性波

从现在开始，我们将在下面的六章中，发展地震波传播的基本特征。在第二和第三章我们看到，地震运动可以用在空间和时间区域上的积分来表示，震源就在该区域中。这个积分[如(3.2)]是在 2.4 节引进的某 Green 函数的位移场的综合。本章所要讨论的是 Green 函数自身的性质，并将导出由一般随时间变化强度的、作用于介质一特定点的单向力，在均匀、各向同性、无限介质中产生的位移的特殊公式(4.23)。这个公式是用弹性位移势的方法得到的。并且 P 波和 S 波可以辨别。

在许多问题中，作用于一点的体力，对于从地震观测到的位移来说，是个合适的源模型。但是，对于断层滑动来说，点体力本身是双力偶[见(3.15)]，而不是单力偶。我们要得出双力偶的位移场，并讨论它在离源点大距离（即"远场"）和小距离（即"近场"）上的辐射图案。

为使这些精确解适于实际应用，需要有方法来估计地球中系统的不均匀性对地震波的聚焦和散焦作用。经典射线理论可用来获得这个问题在远场的近似解，本章的末尾是双力偶产生的振幅和辐射图案(P 和 S)的某些一般结果，该双力偶模拟在具有特定走向和倾角的断层面上沿特定方向的滑动。

4.1　问题的提出：势的引进

我们面临的第一个重要问题是，设在一定点 O 有一随时间而变化强度的单向体力作用于一均匀、无界、各向同性弹性介质中，求解由该力产生的位移 $\mathbf{u}(\mathbf{x},t)$。不失其普遍性，我们取 O 为笛卡尔

坐标原点，x_1轴为体力的方向。待解的 $\boldsymbol{u}$ 方程是(据(2.17)、(2.18)、(2.3)和(2.33))

$$\rho\ddot{u}_i = f_i + (\lambda+\mu)u_{j,ji} + \mu u_{i,jj}$$

或
$$\rho\ddot{\boldsymbol{u}} = \boldsymbol{f} + (\lambda+2\mu)\nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{u}) - \mu\nabla\times(\nabla\times\boldsymbol{u}), \tag{4.1}$$

其中体力 $\boldsymbol{f}$ 由 $f_i = x_0(t)\delta(\boldsymbol{x})\delta_{i1}$ 给定，并具有零初始条件（对于 $\boldsymbol{x}\neq 0$，有 $\dot{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{x},0)=0$；$\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},0)=0$）。

使用前几章的符号，这个位移场的分量为

$$u_n(\boldsymbol{x},t) = x_0 * G_{n1},$$

这个问题由于源点和接收点的方向性细节(在 O 点的 $\hat{\boldsymbol{x}}$ 和在 $\boldsymbol{x}$ 点的 $\boldsymbol{u}$）而复杂化。那么，什么是类似的标量问题（但又没有这种恼人的复杂性)？利用标量问题我们可以着手研究在三维中波由点源向外传播的一般性质。为避免在源点处的方向性，该标量问题必定是球对称的。这就自然地提出了这样的问题：求 $g=g(\boldsymbol{x},t)$，使得

$$\ddot{g} = \delta(\boldsymbol{x})\delta(t) + c^2\nabla^2 g, \tag{4.2}$$

其初始条件为零。

方程(4.2)的解是

$$g(\boldsymbol{x},t) = \frac{1}{4\pi c^2}\ \frac{\delta(t-|\boldsymbol{x}|/c)}{|\boldsymbol{x}|}. \tag{4.3}$$

在补充4.1中证明了的这个意料不到的简单结果，它对于三维波的性质是很有启发性的。我们将用它来形成一系列对弹性动力学问题越来越有用的 Green函数。(4.3)是本书给出的第一个明确的波动解，在以后的使用中，应记住三个主要性质。第一，答案是两个因子的乘积，其中一个因子(δ 函数)的空间起伏很迅速，另一个因子(距离的倒数)的空间起伏却比较慢，至少在离开震源处是如此。一般说，应当有个依赖于从震源至 $\boldsymbol{x}$ 的方向的辐射图案因子，但是，由于球对称性，这个因子在此情况下是个常数。第二，在任何给定的 $|\boldsymbol{x}|$ 处，迅速变化的函数只依赖于相对于"到时"的时间，此处运动开始的到时为 $|\boldsymbol{x}|/c$。显然，c 是波传播的速

度。第三，在任何固定的接收点，波在时间上的变化，同(4.2)中非齐次项的时间变化一样。本来，这只在下述情况下才是对的，即源点处的空间奇异性为 $\delta(\mathbf{x})$(而不是，比如说，偶极子)。但弹性动力学问题(4.1)恰恰就是这样一种情况，所以此处我们也发现，质点位移往往以所加体力中相同的脉冲形状占优势。同(4.2)和(4.3)有关的一个性质是，波[在现在情况下形状为 $\delta(t-\frac{|\mathbf{x}|}{c})$]传播过去以后，在给定的接收点上，$g$ 变为零。

补充 4.1

证明

$$g(\mathbf{x},t)=\frac{1}{4\pi c^2|\mathbf{x}|}\delta(t-\frac{|\mathbf{x}|}{c})$$

是具有零初始条件的 $\ddot{g}=\delta(\mathbf{x})\delta(t)+c^2\nabla^2 g$ 的解。

根据对称性，该解在空间上可以只依赖于到源点的距离 $r=|\mathbf{x}|$，因此我们来寻找函数形式 $g=g(r,t)$。将 ∇^2 表示为球极坐标中的微分算符，则有

$$\nabla^2 g=\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2\frac{\partial g}{\partial r})=\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rg).$$

所以，在除 $r=0$ 的任何地方，rg 都满足一维波动方程 $(rg)''=r\ddot{g}/c^2$ (此处的"$'$"表示 $\partial/\partial r$)，并且它有众所周知的一般解 $rg=f(t-r/c)+h(t+r/c)$。我们知道 $h=0$，因为待求的解是向外传播的，所以，留待证明的是 $f(\tau)=\delta(\tau)/4\pi c^2$，即当在时间区间上进行积分时，$4\pi c^2 f(\tau)$ 具有同 $\delta(\tau)$ 一样的性质。

要得到这个所要求的结果，我们可以研究以下的函数：

$$F(r,\varepsilon_1,\varepsilon_2)\equiv 4\pi c^2\int_{r/c-\varepsilon_1}^{r/c+\varepsilon_2}g(r,t)dt=\frac{4\pi c^2}{r}\int_{-\varepsilon_1}^{\varepsilon_2}f(\tau)d\tau.$$

用 ∇^2 对 F 进行运算，我们必须将积分限和被积函数对 r 进行微分，得到

$$\nabla^2 F=4\pi c\Big[2g'(r,t)+\frac{2}{r}g(r,t)+\frac{\dot{g}}{c}(r,t)\Big]_{t=r/c-\varepsilon_1}^{t=r/c+\varepsilon_2}+4\pi c^2$$

$$\int_{r/c-\varepsilon_1}^{r/c+\varepsilon_2} \nabla^2 g(r,t)dt.$$

代入 $c^2\nabla^2 g=\ddot{g}-\delta(\boldsymbol{x})\delta(t)$，可以进行上述 $\ddot{g}$ 的积分，以便给出上面方括号中包含 $\dot{g}/c$ 的另一项。这时所有这些项都消失，因为 $rg=f(t-r/c)$意味着 $g'=-g/r-\dot{g}/c$，这就只剩下

$$\nabla^2 F=-4\pi\delta(\boldsymbol{x})\int_{\frac{r}{c}-\varepsilon_1}^{\frac{r}{c}+\varepsilon_2}\delta(t)dt.$$

当右边对任何体积 V 进行积分时，不管原点是否在 V 里面，它都给出同 $-4\pi\delta(\boldsymbol{x})\int_{-\varepsilon_1}^{\varepsilon_2}\delta(t)dt$ 的体积分一样的结果。利用 $\nabla^2(\frac{1}{r})=-4\pi\delta(\boldsymbol{x})$，有

$$F(r,\varepsilon_1,\varepsilon_2)=\frac{1}{r}\int_{-\varepsilon_1}^{\varepsilon_2}\delta(t)dt.$$

(F 不包括附加的调和函数，因为这种函数或者在 $r=0$ 处加进另外的奇异性，或者违反 $r\to\infty$ 时 $F\to 0$ 的性质。)由 F 的定义中所给的第二个等式，可以看到，对于所有的$(\varepsilon_1,\varepsilon_2)$都有 $4\pi c^2\int_{-\varepsilon_1}^{\varepsilon_2}f(\tau)d\tau=\int_{-\varepsilon_1}^{\varepsilon_2}\delta(t)dt$，所以，$f(\tau)$是所求的 δ 函数。

在这个阶段，可以提出和解决下面三个问题(始终假定零初始条件)：

i) 如果 $\ddot{g}_1=\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\xi})\delta(t-\tau)+c^2\nabla^2 g_1$，

则

$$g_1(\boldsymbol{x},t)=\frac{1}{4\pi c^2}\frac{\delta\left(t-\tau-\frac{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\xi}|}{c}\right)}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\xi}|}.$$

ii) 如果 $\ddot{g}_2=\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\xi})f(t)+c^2\nabla^2 g_2$，则由 $f(t)=\int_{-\infty}^{\infty}f(\tau)\delta \times(t-\tau)d\tau$，我们用上面的 g_1 得到

$$g_2(\boldsymbol{x},t)=\int_{-\infty}^{\infty}f(t)g_1(\boldsymbol{x},t)d\tau=\frac{1}{4\pi c^2}\frac{f\left(t-\frac{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\xi}|}{c}\right)}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\xi}|}. \tag{4.4}$$

以后将求类似于(4.4)形式的解，但那是对于非均匀介质中的波传播。然而，这些将只是近似值，只在离点源很远的距离上才是精确的(参看图 4.1)。

iii) 如果源是在体积 V 和时间中延伸的，如，

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2}=\frac{\Phi(\boldsymbol{x},t)}{\rho}+a^2\nabla^2\phi. \tag{4.5}$$

(为将来的需要，我们现在用 ϕ 而不用 g_3)，这时

$$\phi(\boldsymbol{x},t)=\int_{-\infty}^{\infty}d\tau\iiint_V\phi(\boldsymbol{\xi},\tau)\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\xi})\delta(t-\tau)dV(\xi).$$

根据叠加，(4.5)的解为

$$\phi(\boldsymbol{x},t)=\frac{1}{4\pi a^2\rho}\iiint_V\frac{\phi\left(\xi,t-\frac{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\xi}|}{a}\right)}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\xi}|}dV, \tag{4.6}$$

它有个重要性质，即$(\boldsymbol{x},t)$处的场只在所谓推迟时间 $t-\frac{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\xi}|}{a}$ 才对于体元 dV(在 $\boldsymbol{\xi}$ 处)的源作用感觉到。按照这个理解，应当再次强调，考虑到所解的方程(4.5)，解(4.6)是非常简单的。这个方程是含有四个变量(三个空间的，一个时间的)的二阶偏微分

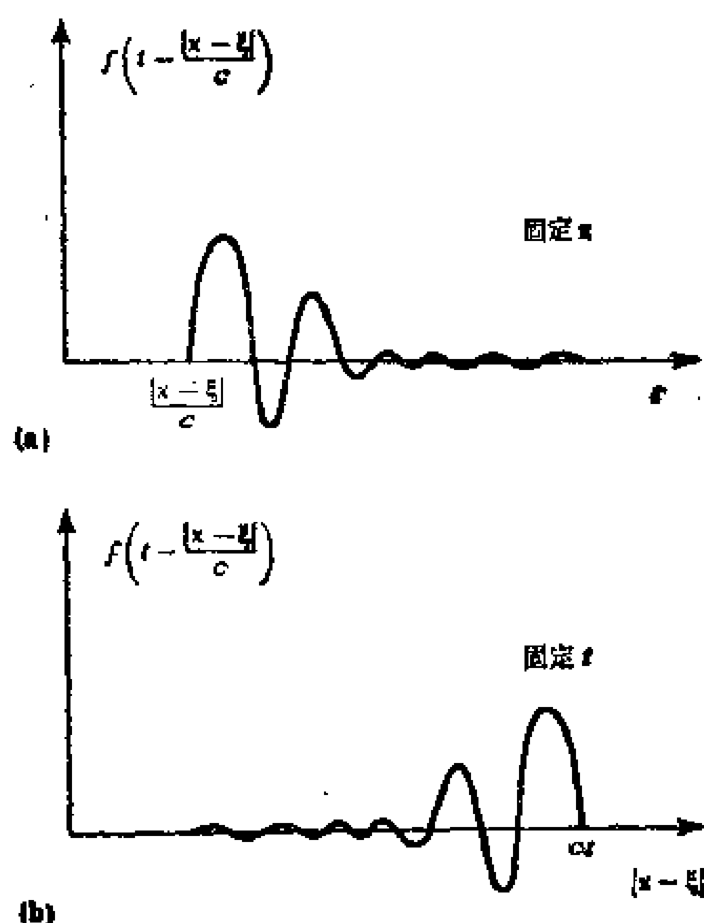


图 4.1

在其最简单形式中，波是个传播量，它是空间坐标和时间的仅仅某个特殊线性组合的函数。(a) 对某些目的，我们所感兴趣的是在离位于 ξ 的源固定距离 $|x-\xi|$ 处的波作为时间的函数。这就是地震图的情况。(b) 对另一些目的，所感兴趣的是在固定的时间，波作为位置的函数。这是照片上的情况。

方程，并有一个一般非齐次项。

方程

$$\nabla^2\phi=-\frac{\Phi(x)}{\alpha^2\rho}. \tag{4.7}$$

是(4.5)的特例，叫做 Poisson 方程，它与时间无关。由(4.6)看到，它有不依赖时间的解

$$\phi(\boldsymbol{x})=\frac{1}{4\pi a^2\rho}\iiint\limits_V \frac{\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{\xi})}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\xi}|}dV. \tag{4.8}$$

现在摆在我们面前的问题是，寻找一种方法，把弹性动力学方程(4.1)分解为(4.5)型的可解方程。下面要阐述一个能达到这种分解的方法（Lamé 定理），并在补充 4.2 中给出实际上是相当灵巧的结果的某些前景。

4.1.1 Lamé 定理

如果位移场 $\boldsymbol{u}=\boldsymbol{u}(x,t)$满足

$$\rho\ddot{\boldsymbol{u}}=\boldsymbol{f}+(\lambda+2\mu)\nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{u})-\mu\nabla\times(\nabla\times\boldsymbol{u}), \quad (\text{即 } 4.1)$$

并且，如果体力以及 $\dot{\boldsymbol{u}}$ 和 $\boldsymbol{u}$ 的初值用 Helmholtz 势由

$$\boldsymbol{f}=\nabla\Phi+\nabla\times\boldsymbol{\Psi};\ \dot{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{x},0)=\nabla A+\nabla\times\boldsymbol{B};$$

$$\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},0)=\nabla C+\nabla\times\boldsymbol{D} \tag{4.9}$$

来表示，其中

$$\nabla\cdot\boldsymbol{\Psi}=\nabla\cdot\boldsymbol{B}=\nabla\cdot\boldsymbol{D}=0, \tag{4.10}$$

于是就有 $\boldsymbol{u}$ 的势 ϕ 和 ψ，它们具有所有下列四个性质：

i) $\boldsymbol{u}=\nabla\phi+\nabla\times\boldsymbol{\psi}$, (4.11)

ii) $\nabla\cdot\boldsymbol{\psi}=0$, (4.12)

iii) $\ddot{\phi}=\dfrac{\Phi}{\rho}+\alpha^2\nabla^2\phi \quad \left(\text{其中}\alpha^2=\dfrac{\lambda+2\mu}{\rho}\right)$, (即 4.5)

iv) $\ddot{\boldsymbol{\psi}}=\dfrac{\boldsymbol{\Psi}}{\rho}+\beta^2\nabla^2\boldsymbol{\psi} \quad \left(\text{其中}\beta^2=\dfrac{\mu}{\rho}\right)$ (4.13)

($\nabla\phi$和$\nabla\times\boldsymbol{\psi}$ 分别叫做 $\boldsymbol{u}$ 的 P 波和 S 波分量)。

其证明包括用积分来建立ϕ和$\boldsymbol{\psi}$：

$$\phi(\boldsymbol{x},t)=\rho^{-1}\int_0^t(t-\tau)\{\Phi(\boldsymbol{x},\tau)+(\lambda+2\mu)\nabla\cdot\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},\tau)\}d\tau$$
$$+tA+C, \tag{4.14}$$

$$\boldsymbol{\psi}(\boldsymbol{x},t)=\rho^{-1}\int_0^t(t-\tau)\{\boldsymbol{\Psi}(\boldsymbol{x},\tau)-\mu\nabla\times\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},\tau)\}d\tau+t\boldsymbol{B}+\boldsymbol{D}, \tag{4.15}$$

并证明 ϕ 和 ψ 的这些定义确实满足所有性质 i) 至 iv)　性质 i) 和 ii) 很易证明。为得到 iii)，由(4.14)可注意到，iii) 的左边是 $\{\Phi+(\lambda+2\mu)\nabla\cdot\boldsymbol{u}\}/\rho$。这恰恰等于 iii) 的右边，因为根据 i) 有 $\nabla^2\phi=\nabla\cdot\boldsymbol{u}$。最后一个性质 iv)，用同样的方式反复使用向量恒等式

$$\nabla^2\boldsymbol{V}\equiv\nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{V})-\nabla\times(\nabla\times\boldsymbol{V}),$$
$$\nabla\times(\nabla\Phi)\equiv 0,$$
$$\nabla\cdot(\nabla\times\boldsymbol{V})\equiv 0$$

而得出。

补充 4.2

关于势

矢量场 $\boldsymbol{Z}=\boldsymbol{Z}(\boldsymbol{x})$ 的 Helmholtz 势，是这样的场 X，$\boldsymbol{Y}$，其关系为 $\boldsymbol{Z}=\nabla X+\nabla\times\boldsymbol{Y}$，其中 $\boldsymbol{Y}$ 满足 $\nabla\cdot\boldsymbol{Y}=0$。为建立 X 和 $\boldsymbol{Y}$（$\boldsymbol{Z}$ 已给定），只须解矢量 Poisson 方程 $\nabla^2\boldsymbol{W}=\boldsymbol{Z}$，因为这时恒等式 $\nabla^2\boldsymbol{W}\equiv\nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{W})-\nabla\times(\nabla\times\boldsymbol{W})$ 表明，我们可以选择势 $X=\nabla\cdot\boldsymbol{W}$ 和 $\boldsymbol{Y}=\nabla\times\boldsymbol{W}$。矢量 Poisson 方程的解是(4.8)和(4.7)的简单推广，在这里给出

$$\boldsymbol{W}(\boldsymbol{x})=-\iiint_V\frac{\boldsymbol{Z}(\boldsymbol{\xi})}{4\pi|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\xi}|}\,dV(\boldsymbol{\xi}).$$

那么，为什么我们不把弹性势 ϕ 和 ψ 定义为 $\boldsymbol{u}$ 的 Helmholtz 势呢？理由是，(4.11)和(4.12)代入弹性波方程(4.1)后，给出 ϕ 和 ψ 的三阶偏微分方程，它必须用 $\nabla\cdot(\ )$ 和 $\nabla\times(\ )$ 进行运算，才能给出分离的势方程，这时它满足四阶波动方程

$$\nabla^2\{\rho\ddot{\phi}-\Phi-(\lambda+2\mu)\nabla^2\phi\}=0,$$
$$\nabla^2\{\rho\ddot{\psi}-\boldsymbol{\psi}-\mu\nabla^2\boldsymbol{\psi}\}=0.$$

Lamé 定理给出的结果好得多，使我们需要寻找的势只需满足二阶波动方程。

最后，有两个显著的事实：Lamé 定理被猜想出来并使用了 100 年，但没有人给出一个证明；该定理甚至对于静态场 $\boldsymbol{u}=\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x})$ 也仍然是对的，但在此情况下，ϕ 和 ψ 仍然是 $\boldsymbol{x}$ 和 t 二者的函数，并且它们仍满足波动方程。但组合 $\nabla\phi+\nabla\times\psi$ 对时间的依赖已彼此抵消。

我们既已求得标量波动方程的解，并已看到如何把弹性波方程变为较简单的势方程，现在可以回到本章的主题上来了。

4.2 均匀、各向同性、无限介质中弹性动力学 Green 函数的解

要记住，我们是想求解满足含有体力 $\boldsymbol{f}$ 的弹性波方程（4.1）的位移 $\boldsymbol{u}$（$\boldsymbol{x}$，t），该体力是沿 x_1 方向(即$\hat{x}_1$) 作用于原点的 X_0(t)。

第一步是求体力势 $\boldsymbol{\Phi}$ 和 $\boldsymbol{\psi}$，使得

$$X_0(t)\delta(\boldsymbol{x})\hat{\boldsymbol{x}}_1=\nabla\boldsymbol{\Phi}+\nabla\times\boldsymbol{\psi}$$

和
$$\nabla\cdot\boldsymbol{\psi}=0. \tag{4.16}$$

这是个在补充 4.2 中所解的那种类型的问题，因为在每一固定时刻，$\boldsymbol{\Phi}$ 和 $\boldsymbol{\psi}$ 都是 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x},\ t)$的 Helmholtz 势。首先建立

$$\boldsymbol{W}=-\frac{X_0(t)}{4\pi}\iiint_V(1,\ 0,0)\frac{\delta(\boldsymbol{\xi})dV}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\xi}|}=-\frac{X_0(t)}{4\pi|\boldsymbol{x}|}\hat{\boldsymbol{x}}_1,$$

它给出

$$\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{x},\ t)=\nabla\cdot\boldsymbol{W}=-\frac{X_0(t)}{4\pi}\frac{\partial}{\partial x_1}\frac{1}{|\boldsymbol{x}|},$$

$$\boldsymbol{\psi}(\boldsymbol{x},\ t)=-\nabla\times\boldsymbol{W}=\frac{X_0(t)}{4\pi}\left(0,\frac{\partial}{\partial x_3}\frac{1}{|\boldsymbol{x}|},-\frac{\partial}{\partial x_2}\frac{1}{|\boldsymbol{x}|}\right). \tag{4.17}$$

乍一看有点奇怪，在空间上集中的体力（比例于 $\delta(\boldsymbol{x})$），却有在源区以外不为零的势(4.17)。这在弹性力学中常常遇到，它表现出势方法的人为性。

求位移的第二步，是解 Lamé 势 ϕ 和 $\boldsymbol{\psi}$的波动方程。由(4.5)、(4.13)和(4.17)，我们得到

$$\ddot{\phi}=-\frac{X_0(t)}{4\pi\rho}\frac{\partial}{\partial x_1}\frac{1}{|\boldsymbol{x}|}+\alpha^2\nabla^2\phi \qquad (4.18)$$

和
$$\ddot{\boldsymbol{\psi}}=\frac{X_0(t)}{4\pi\rho}\left(0,\frac{\partial}{\partial x_3}\frac{1}{|\boldsymbol{x}|},-\frac{\partial}{\partial x_2}\frac{1}{|\boldsymbol{x}|}\right)+\beta^2\nabla^2\boldsymbol{\psi}. \qquad (4.19)$$

将(4.18)同(4.5)和(4.6)作对比，得到它的解为

$$\Phi(\boldsymbol{x},\ t)=-\frac{1}{(4\pi\alpha)^2\rho}\iiint_V\frac{X_0\left(t-\frac{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\xi}|}{\alpha}\right)}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\xi}|}\frac{\partial}{\partial\xi_1}\frac{1}{|\boldsymbol{\xi}|}dV(\boldsymbol{\xi}). \qquad (4.20)$$

幸好，通过以 $\boldsymbol{x}$ 为心的一系列的同心球壳来完成在体积 V 上的积分，可使这个积分简化。如果 $\alpha\tau$ 是某一球壳 S 的半径，因而 $|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\xi}|=\alpha\tau$，壳的厚度为 $\alpha d\tau$，则有

$$\phi(\boldsymbol{x},\ t)=-\frac{1}{(4\pi\alpha)^2\rho}\int_0^\infty\frac{X_0(t-\tau)}{\tau}\left(\iint_S\frac{\partial}{\partial\xi_1}\frac{1}{|\boldsymbol{\xi}|}dS\right)d\tau.$$

在补充 4.3 中指出，在 S 上的积分是 $\boldsymbol{x}$ 和 τ 的简单显函数，并有

$$\phi(\boldsymbol{x},\ t)=-\frac{1}{4\pi\rho}\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\frac{1}{|\boldsymbol{x}|}\right)\int_0^{|\boldsymbol{x}|/\alpha}\tau X_0(t-\tau)d\tau. \qquad (4.21)$$

同理，对于矢量 Lamé 势，得到

$$\boldsymbol{\psi}(\boldsymbol{x},\ t)=\frac{1}{4\pi\rho}\left(0,\frac{\partial}{\partial x_3}\frac{1}{|\boldsymbol{x}|},-\frac{\partial}{\partial x_2}\frac{1}{|\boldsymbol{x}|}\right)\int_0^{|\boldsymbol{x}|/\beta}\times\tau X_0(t-\tau)d\tau. \qquad (4.22)$$

补充 4.3

表面积分的求值

我们定义

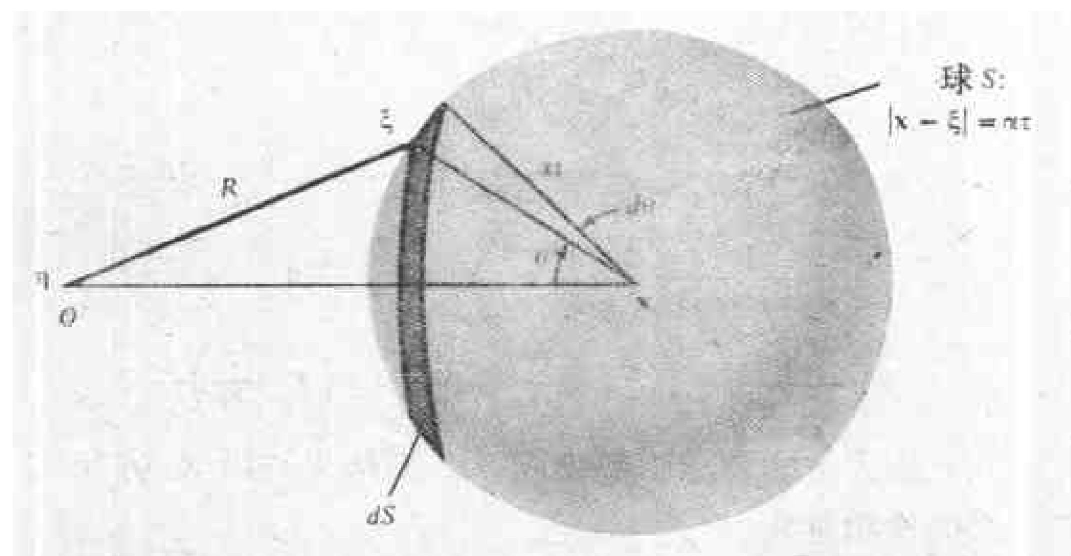
$$h(\boldsymbol{x},\tau)=\iint_{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\xi}|=\alpha\tau}\frac{\partial}{\partial\xi_1}\frac{1}{|\boldsymbol{\xi}|}dS(\boldsymbol{\xi}),$$

并来证明

当 $\tau>|\boldsymbol{x}|/\alpha$ 时，有 $h(\boldsymbol{x},\ \tau)=0$，

但当$\tau<|x|/\alpha$时，有$h(x,\tau)=4\pi\alpha^2\tau^2\frac{\partial}{\partial x_1}\frac{1}{|x|}$.

i) 注意这个结果的物理意义，假定在S上有均一的面密度，则$|\xi|^{-1}dS$比例于dS在O的重力势，而$\partial|\xi|^{-1}/\partial\xi_1$是力在$\hat{x}_1$方向的分量。求出球壳在$O$产生的总势，然后再求微分以获得沿$\hat{x}_1$总力的分量，便得到所希望的结果。在球壳内，势为常数；在球壳外，可以把所有质量都放在中心点即x处来求势。



ii) 详细证明，假定O在η，我们能够依变化的η进行微分，然后取$\eta=0$。再取$r=|x-\eta|$，$R=|\xi-\eta|$及θ为$x-\eta$与$x-\xi$之间的夹角，则

$$h=-\frac{\partial}{\partial\eta_1}\int\!\!\int_S\frac{dS}{R}\text{（因为对于}S\text{上所有的}\xi\text{，}\eta\text{都是固定的）}.$$

现在选取$dS=2\pi a^2\tau^2\sin\theta d\theta$，故

$$\int\!\!\int_S\frac{dS}{R}=2\pi a^2\tau^2\int_0^\pi\frac{\sin\theta d\theta}{R}.$$

但是，$R^2=r^2+a^2\tau^2-2ra\tau\cos\theta$，所以，$2RdR=2ra\tau\sin\theta\,d\theta$，故

$$\int\!\!\int_S\frac{dS}{R}=\frac{2\pi d\tau}{r}\int_{R=(\theta=0)}^{R(\theta=\pi)}dR=\frac{2\pi a\tau}{r}\int_{|a\tau-r|}^{a\tau+r}dR$$

$$=\begin{cases}4\pi a\tau & \text{当}O\text{在}S\text{内}\left(\tau>\dfrac{r}{a}\right),\\ \dfrac{4\pi a^2\tau^2}{r} & \text{当}O\text{在}S\text{外}\left(\tau<\dfrac{r}{a}\right).\end{cases}$$

因此，如果O在S以内，则有

$$h=-\frac{\partial}{\partial\eta_1}4\pi\alpha\tau=0 \quad \left(\tau>\frac{r}{\alpha}\right).$$

如果O在S以外，则有

$$h=-\frac{\partial}{\partial\eta_1}\frac{4\pi\alpha^2\tau^2}{r}=4\pi\alpha^2\tau^2\frac{\partial}{\partial x_1}\frac{1}{r} \quad \left(\tau<\frac{r}{\alpha}\right).$$

第三步，也即最后一步，对于由沿 x_1 方向作用于原点的体力 $X_0(t)$所引起的位移求 Green 函数，是根据(4.21)和(4.22)作出 $\nabla\phi+\nabla\times\boldsymbol{\psi}$。利用 $r=|\boldsymbol{x}|$，给出

$$u_i(\boldsymbol{x},\ t)=\frac{1}{4\pi\rho}\left(\frac{\partial^2}{\partial x_i\partial x_1}\frac{1}{r}\right)\int_{r/\alpha}^{r/\beta}\tau X_0(t-\tau)d\tau$$

$$+\frac{1}{4\pi\rho\alpha^2 r}\left(\frac{\partial r}{\partial x_i}\frac{\partial r}{\partial x_1}\right)X_0\left(t-\frac{r}{\alpha}\right)$$

$$+\frac{1}{4\pi\rho\beta^2 r}\left(\delta_{i1}-\frac{\partial r}{\partial x_i}\frac{\partial r}{\partial x_1}\right)X_0\left(t-\frac{r}{\beta}\right).$$

如果把整个公式中的脚标1都换成 j，则结果与沿 x_j 方向的点力产生的位移相对应。

利用矢量 $\boldsymbol{x}$ 的方向余弦 $\gamma_i=x_i/r=\partial r/\partial x_i$，可以写出

$$\frac{\partial^2}{\partial x_i\partial x_j}\frac{1}{r}=\frac{3\gamma_i\gamma_j-\delta_{ij}}{r^3}.$$

于是，对于在原点上沿 x_j 方向的点力 $X_0(t)$，有

$$u_i(x,t)=X_0*G_{ij}\quad \text{（以第三章的符号表示）}$$

$$=\frac{1}{4\pi\rho}(3\gamma_i\gamma_j-\delta_{ij})\frac{1}{r^3}\int_{r/\alpha}^{r/\beta}\tau X_0(t-\tau)d\tau$$

$$+\frac{1}{4\pi\rho\alpha^2}\gamma_i\gamma_j\frac{1}{r}X_0\left(t-\frac{r}{\alpha}\right)$$

$$-\frac{1}{4\pi\rho\beta^2}(\gamma_i\gamma_j-\delta_{ij})\frac{1}{r}X_0\left(t-\frac{r}{\beta}\right). \tag{4.23}$$

这就是我们要求的公式；它的等效形式首先是 Stokes 于 1849 年给出的。它是弹性波辐射中最重要的解之一。下面我们讨论它的主要性质。

Green 函数中各项的相对大小，依赖于源点至接收点的距离

r。因此，对于X_0在比$r/\beta-r/\alpha$短的时间内不为零的源，(例如对于Green函数本身的脉冲源)，$r^{-3}\int_{r/\alpha}^{r/\beta}\tau X_0(t-\tau)d\tau$的行为与$r^{-2}$相似。但(4.23)中的其他项的行为则与$r^{-1}$相似，因此当$r\to\infty$时，其他项(比$r^{-2}$)占优势。所以，含有$r^{-1}X_0(t-r/\alpha)$和$r^{-1}X_0(t-r/\beta)$的项叫做远场项。既然当$r\to 0$时，$r^{-2}$比$r^{-1}$占优势，所以，含有$r^{-3}\int\tau X_0(t-\tau)d\tau$的项叫做近场项。地球物理学中使用的几乎所有地震资料，都取得于远场(即(4.23)中远场项占优势的距离)。但是，有些重要的例外，如断裂造成的最终静态断错，就是一种近场效应。地震工程中使用的地震资料，有时是在近场取得的。但当比较仔细地考虑近场在何处截止，以及远场在何处开始的问题时，则显然远场项也能大到足以引起工程结构的破坏(参看问题4.1)。

4.2.1 远场P波的性质

这里我们引入远场P波，对于(4.23)，它的位移u^P由下式给出：

$$u_i^P(\mathbf{x},t)=\frac{1}{4\pi\rho\alpha^2}\gamma_i\gamma_j\frac{1}{r}X_0\left(t-\frac{r}{\alpha}\right). \qquad (4.24)$$

这时，沿着离开震源的给定方向$\boldsymbol{\gamma}$，这个波

i) 随r^{-1}衰减；

ii) 有依赖于时空组合$t-\frac{r}{\alpha}$的波形，因而以速率α传播(记住$\alpha^2=(\lambda+2\mu)/\rho$)。(如果选择$X_0(t)$将开始不为零的时间为$t=0$，则$r/\alpha$为$P$波在$r$处的到时。)；

iii) 波形正比于在推迟时间施加的力；

iv) $\mathbf{x}$处位移$\mathbf{u}^P$的方向平行于离开震源的方向$\boldsymbol{\gamma}$。这是由$\mathbf{u}^P\times\boldsymbol{\gamma}=0$得到的，而这个关系很容易根据(4.24)来证明。所以，远场P波是纵向的(有时叫做径向的)，它的质点运动方向同波传播方向相同。

4.2.2 远场 S 波的性质

(4.23)中远场 S 波的位移 u^S 由下式给出：

$$u_i^S(x, t)=\frac{1}{4\pi\rho\beta^2}(\delta_{ij}-\gamma_i\gamma_j)\frac{1}{r}X_0\left(t-\frac{r}{\beta}\right). \tag{4.25}$$

可以回顾一下，γ 是由源点指向接收点的单位矢量。沿给定的方向 γ，这个波

i) 随 r^{-1} 衰减；

ii) x 处的到时为 r/β，传播速率为 β；

iii) 位移波形正比于在推迟时间施加的力；

iv) x处位移 u^S 的方向垂直于离开震源的方向 γ。(根据(4.25)很容易证明 $u^S\cdot\gamma=0$。)所以，远场 S 波是横波，它的质点运动方向与波传播方向正交。

图 4.2 中给出 u^P 和 u^S 的辐射图案。

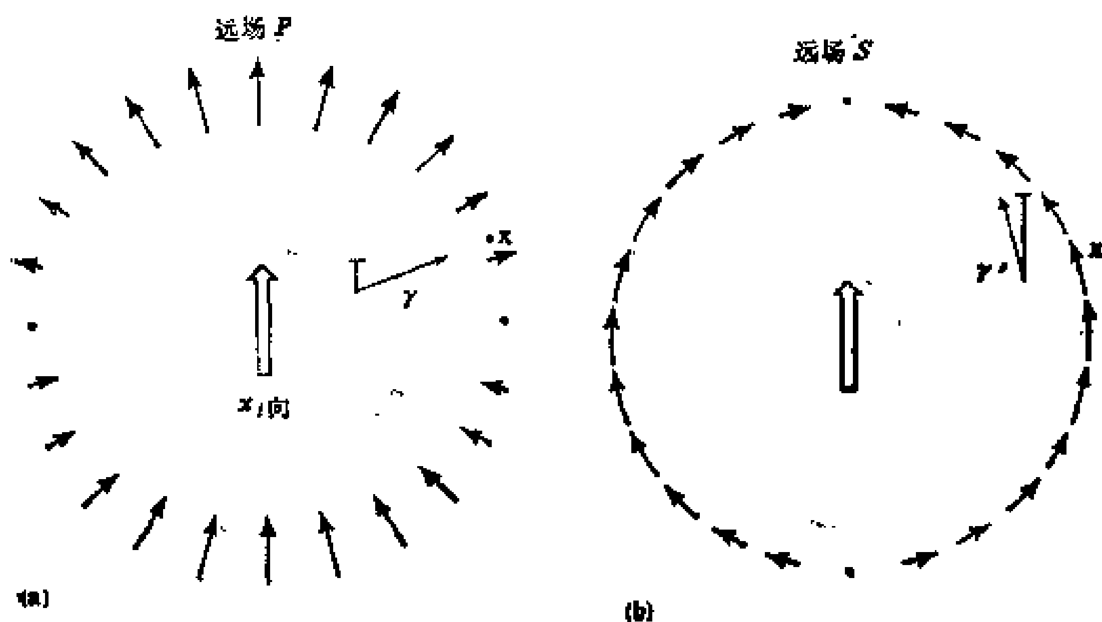


图 4.2

对于无限、均匀、各向同性介质内沿 x_j 方向的点力$\hat{\imath}$在远场的 P 和 S 辐射图案。P 和 S 的方向由每种波的性质 iv)给出(见正文)，S 波横向的特殊选择是由所要求的轴对称性决定的。(a) u^P的大小由 $u^P\cdot\gamma\propto\gamma_j$ 给定，这里 γ_j 是力方向与 u^P 方向之间夹角的余弦。(b) u^S 的大小由 $u^S\cdot\gamma'\propto\gamma'_j$ 给定，γ'_j 是力方向与 u^S 方向之间夹角的余弦

4.2.3 近场项的性质

我们定义(4.23)中的近场位移 $\mathbf{u}^N$ 为

$$u_i^N(x, t)=\frac{1}{4\pi\rho}(3\gamma_i\gamma_j-\delta_{ij})\frac{1}{r^3}\int_{r/\alpha}^{r/\beta}\tau X_0(t-\tau)d\tau. \tag{4.26}$$

在导出这个近场分量(见前面)时，我们看到，有来自 P 波势 ϕ 的梯度和 S 波势 ψ 的旋度两方面的贡献，在这个意义上，$\mathbf{u}^N$ 是由 P 波和 S 波两种运动组成的。它既不是无旋的(即旋度为零)，也不是无散的(即散度为零)，这表明，把弹性位移场分解成它的 P 波和 S 波分量，并不总是有成效的。进一步讲，$\mathbf{u}^N$ 有纵的和横的两种运动，因为纵分量是

$$\mathbf{u}^N\cdot\boldsymbol{\gamma}=\gamma_j\frac{1}{2\pi\rho r^3}\int_{r/\alpha}^{r/\beta}\tau X_0(t-\tau)d\tau,$$

而横分量是

$$\mathbf{u}^N\cdot\boldsymbol{\gamma}'=-\gamma_j'\frac{1}{4\pi\rho r^3}\int_{r/\alpha}^{r/\beta}\tau X_0(t-\tau)d\tau$$

(关于 $\boldsymbol{\gamma}$ 和 $\boldsymbol{\gamma}'$ 的定义，参看图4.2)。

虽然对于近场位移不可能找出与对于远场所得到的 i) —iv) 相对应的简单性质，但我们能鉴别出位移 $\mathbf{u}^N$ 在固定接收点的到时和持续时间。如果 $t=0$ 被选定为 $X_0(t)$首先变为非零值的时间，则我们假定，对于所有时间 $t>T$，$X_0(t)$重又恢复到零。图 4.3 a 表示出一个这种函数，图 4.3 b 表示出 $X_0(t-\tau)$。由(4.26)得知，$\mathbf{u}^N$ 是这样一种运动，它在 P 波的到时(r/α)到达 $\mathbf{x}$，并一直作用到时间 $r/\beta+T$。于是，它的持续时间为$(r/\beta-r/\alpha)+T$。如果 $X_0(t)$一直不能永久地恢复到零(即如果 T 是无限的)，则近场项将无限期地存在。

$X_0 * G$的若干进一步性质，在章后问题中给出。在第二章和第三章已看到，在地震学中，对于双力偶而不是单力偶震源，以 $G_{np,q}$ 形式研究 Green 函数比较合适。我们现在来详细说明它与位移场

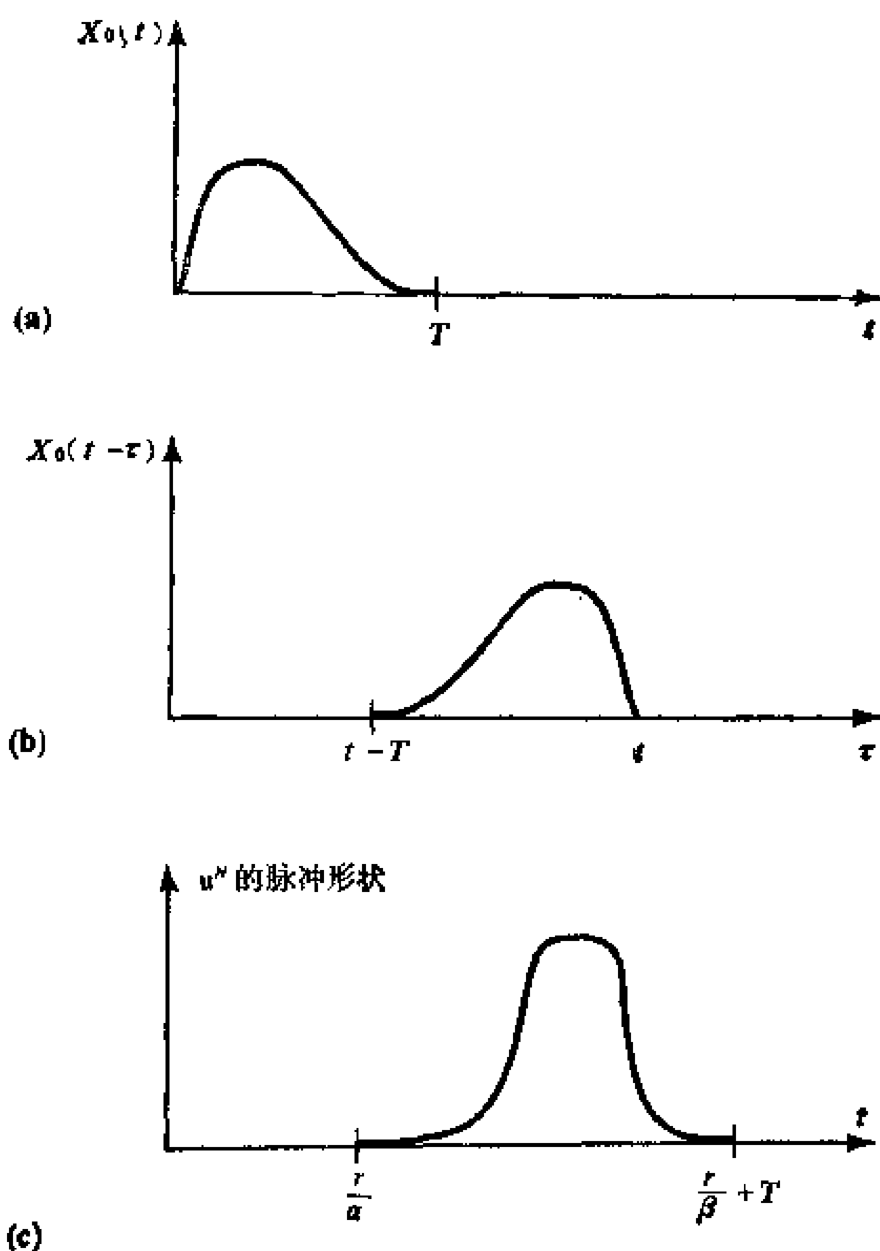


图 4.3

近场运动 u^N 的"到时"和"持续时间"的图解。(a) 体力时间函数，只对于0至T间的t，它不为零。(b) 对于固定的t，$X_0(t-\tau)$随τ而变化。只当t处于r/α和$(r/\beta+T)$之间时，这个函数才对于r/α至r/β间隔中的τ不为零。(c) $\int_{r/\alpha}^{r/\beta}\tau X_0(t-\tau)d\tau$随时间的变化。在很大的距离上，$r/\alpha \gg T$，$u^N$的积分中的$X_0(t-\tau)$实际上是个$\delta$函数，而$u^N$只在$r/\alpha$和$r/\beta$之间有非零值，其高度正比于时间。但是，在这种距离上的u^N，与远场项比较，通常是可忽略不计的

有比较直接关系的一些特殊性质。

4.3 无限、均匀介质中的双力偶解

本节描述求波动的一系列解答中的又一步，这个系列在补充4.1中，以点源所发出的球对称的标量波开始。我们已看到，怎样综合矢量波和二阶张量场 G_{ij}。现在想研究三阶张量场 $G_{np,q}$，以便了解由位移间断(见(3.17)，或者对于点源，见(3.22))所产生的波的辐射图案(在近场和远场两种情况)。我们只好坦白地承认，对于某些读者，这可能给出一个令人生畏的前景。因此，一开始我们就在此申明，对于具有矩张量 $\boldsymbol{M}$ 的点源所产生的位移，我们将以非常简明的公式(4.32)—(4.33)来结尾，相应于点剪切位错的情况，并且对于它，我们将得到远场辐射图案；事实上该图案已在成千上万的地震中观测到。既然这个双力偶源具有如此实际的意义，也许可以认为，应当把我们的分析局限于特殊的组合 $M_0 * \left(\dfrac{\partial G_{n1}}{\partial \xi_3}\right) + M_0 * \left(\dfrac{\partial G_{n3}}{\partial \xi_1}\right)$上(见(3.22)和(3.24))。然而，只要花很少的力气，利用求和惯例，就将使我们能用 $M_{pq} * G_{np,q}$ 中全部九个力偶进行计算。

我们的主要结果将是：远场位移仍随 r^{-1} 衰减，并正比于源处的质点速度；在远场和近场位移之间，发现有一些异常相似处；在整个介质中，由逐渐达于最终固定断错的位移位错所产生的最后静态位移，随 r^{-2} 衰减。

我们从应用 Stokes 的解(4.23)出发，求得体力分布 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x},t) = \boldsymbol{F}(t)\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\xi})$ 即作用于 $\boldsymbol{\xi}$ 的力 $\boldsymbol{F}(t)$ 产生的位移的 n 分量。该位移在$(\boldsymbol{x},\ t)$为

$$F_p * G_{np} = \frac{1}{4\pi\rho}(3\gamma_n\gamma_p - \delta_{np})\frac{1}{r^3}\int_{r/\alpha}^{r/\beta} \tau F_p(t-\tau)\,d\tau$$
$$+ \frac{1}{4\pi\rho\alpha^2}\gamma_n\gamma_p\frac{1}{r}\,F_p\left(t-\frac{r}{\alpha}\right)$$

$$-\frac{1}{4\pi\rho\beta^2}(\gamma_n\gamma_p-\delta_{np})\frac{1}{r}F_p\left(t-\frac{r}{\beta}\right), \qquad (4.27)$$

其中 $r=|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\xi}|$ 是源点至接收点的距离，方向余弦 $\gamma_i=(x_i-\xi_i)/r$ 是相对于 ξ 处的源点。(4.27) 有同 (4.23) 一样的形式，但现在出现了对 p 的求和，因为一般说，$\boldsymbol{F}$ 不是沿一特定的坐标方向。

为得到图 3.7 所示类型的九个力偶的总效果，可以求 $\boldsymbol{F}(t)$ 作用于 $\boldsymbol{\xi}+\Delta\boldsymbol{l}_q$(此处 Δl_q 是沿 ξ_q 方向的一个小距离)时 (4.27)的值，然后减去 $\boldsymbol{F}(t)$ 作用于 $\boldsymbol{\xi}$ 时(4.27)的值。这个差给出矩为 $|\Delta l_q||\boldsymbol{F}|$ 的力偶在 $\boldsymbol{x}$ 产生的位移场，并且对于 Δl_q 的一阶量，它是直接由微分运算 $\Delta l_q\left(\frac{\partial}{\partial\xi_q}\right)$ 给出的。(此处注意，这是个无量纲运算：结果仍是位移。)最后一步是使乘积 $\Delta l_q F_p(t)$ 与矩张量分量 $M_{pq}(t)$ 相等，其中 $\Delta l_q\to 0$ 而 $F_p\to\infty$，使乘积保持为有限。上述步骤表示为下式：

$$M_{pq}*G_{np,q}=\lim_{\left(\substack{\Delta l_q\to 0\\ F_p\to\infty\\ \Delta l_q F_p=M_{pq}}\right)}\Delta l_q F_p*\frac{\partial}{\partial\xi_q}G_{np}. \qquad (4.28)$$

这里要注意，对 p 和 q 两者都要求和。(4.28)的运算应用于(4.27)是十分直接了当的，这时要利用两个规则：

$$\frac{\partial r}{\partial\xi_q}=-\gamma_q 和 \frac{\partial\gamma_i}{\partial\xi_q}=\frac{\gamma_i\gamma_q-\delta_{iq}}{r},$$

所得结果就是具有下列第 n 个分量的位移场[参看(3.22)]

$$M_{pq}*G_{np,q}=\left(\frac{15\,\gamma_n\gamma_p\gamma_q-3\,\gamma_n\delta_{pq}-3\,\gamma_p\delta_{nq}-3\,\gamma_q\delta_{np}}{4\,\pi\rho}\right)$$

$$\frac{1}{r^4}\int_{r/\alpha}^{r/\beta}\tau M_{pq}(t-\tau)\,d\tau$$

$$+\left(\frac{6\,\gamma_n\gamma_p\gamma_q-\gamma_n\delta_{pq}-\gamma_p\delta_{nq}-\gamma_q\delta_{np}}{4\,\pi\rho\alpha^2}\right)\frac{1}{r^2}M_{pq}\left(t-\frac{r}{\alpha}\right)$$

$$-\left(\frac{6\,\gamma_n\gamma_p\gamma_q-\gamma_n\delta_{pq}-\gamma_p\delta_{nq}-2\,\gamma_q\delta_{np}}{4\,\pi\rho\beta^2}\right)\frac{1}{r^2}M_{pq}\left(t-\frac{r}{\beta}\right)$$

$$+\frac{\gamma_n\gamma_p\gamma_q}{4\pi\rho\alpha^3 r}\frac{1}{r}\dot{M}_{pq}\left(t-\frac{r}{\alpha}\right)$$

$$-\left(\frac{\gamma_n\gamma_p-\delta_{np}}{4\pi\rho\beta^3}\right)\gamma_q\frac{1}{r}\dot{M}_{pq}\left(t-\frac{r}{\beta}\right). \qquad (4.29)$$

此位错的位移近场项比例于 $r^{-4}\int_{r/\alpha}^{r/\beta}\tau M_{pq}(t-\tau)d\tau$，而远场项比例于 $r^{-1}\dot{M}_{pq}(t-r/\alpha)$（$P$ 波）或者 $r^{-1}\dot{M}_{pq}(t-r/\beta)$（$S$波）。回顾第三章[式(3.22)]，$M_{pq}*G_{np,q}$ 是断层面上的位移间断在 x 处产生的位移的第 n 个分量，而断层面的线度远小于在观测点所关心的波长，所以，矩张量 $\boldsymbol{M}$ 的分量比例于断层面上的平均质点位移。于是，据以给出远场位移脉冲形状的 $\dot{M}_{pq}(t-r/\alpha)$和 $\dot{M}_{pq}(t-r/\beta)$比例于源的质点速度在断层面上的平均值。

出现在(4.29)中的，是些比例于 $r^{-2}M_{pq}(t-r/\alpha)$和$r^{-2}M_{pq}(t-r/\beta)$的项。由于在小 r 和大 r 处，它们的渐近性质介于近场位移和远场位移的渐近性质之间，所以，很自然地可把它们叫做中间场项。但这是个有点使人误解的名称，因为并不存在这些项占优势的中间距离范围。实际上看到的是，它们在远场很小，在有明显的近场位移的距离上，它们的重要性（常常）与近场位移相当。

由给出任意矩张量 $\boldsymbol{M}$ 所产生的辐射的(4.29)的普遍性，我们将常常专注于 $\boldsymbol{M}$ 有零迹亦即 $M_{kk}=0$ 的情况。用不产生体积变化的三个向量偶极子可以得到这种情况。但我们常常更关心由位移间断引起的零迹 $\boldsymbol{M}$。由(3.23)和(3.20)看到，平均位移间断 $\bar{u}$ 平行于断层面：$\bar{u}\cdot\boldsymbol{\nu}=0$，此处 $\boldsymbol{\nu}$ 是断层面的法线，对于面积为A的断层，有 $M_{pq}=\mu(\bar{u}_p\nu_q+\bar{u}_q\nu_p)A$，这时

$$\mu(\bar{u}_p\nu_q+\bar{u}_q\nu_p)A*G_{np,q}$$

$$=\left(\frac{30\gamma_n\gamma_p\gamma_q\nu_q-6\nu_n\gamma_p-6\delta_{np}\gamma_q\nu_q}{4\pi\rho r^4}\right)\mu A\int_{r/\alpha}^{r/\beta}\tau\bar{u}_p(t-\tau)d\tau$$

$$+\left(\frac{12\gamma_n\gamma_p\gamma_q\nu_q-2\nu_n\gamma_p-2\delta_{np}\gamma_q\nu_q}{4\pi\rho\alpha^2 r^2}\right)\mu A\bar{u}_p\left(t-\frac{r}{\alpha}\right)$$

$$
-\left(\frac{12\,\gamma_n\gamma_p\gamma_q\nu_q-3\,\nu_n\gamma_p-3\,\delta_{np}\gamma_q\nu_q}{4\,\pi\rho\beta^2 r^2}\right)\mu\,A\,\bar{u}_p\left(t-\frac{r}{\beta}\right)
$$

$$
+\frac{2\,\gamma_n\gamma_p\gamma_q\nu_q}{4\,\pi\rho\alpha^3 r}\mu\,A\,\dot{\bar{u}}_p\left(t-\frac{r}{\alpha}\right)
$$

$$
-\left(\frac{2\,\gamma_n\gamma_p\gamma_q\nu_q-\nu_n\gamma_p-\delta_{np}\gamma_q\nu_q}{4\,\pi\rho\beta^3 r}\right)\mu\,A\,\dot{\bar{u}}_p\left(t-\frac{r}{\beta}\right). \quad (4.30)
$$

我们的下一个目标是，把这个剪切位错辐射的位移场的表达式，由其笛卡尔形式变为自然给出运动的径向分量和横向分量的形式。要完成这一点，可以选取坐标轴，使断层位于平面(x_1，x_2)即 $\boldsymbol{\nu}=(0,\ 0,\ 1)$上，其 $\xi=0$，并引入以源为中心的球极坐标 r，θ 和 ϕ。θ 由 x_3 方向算起(见图4.4)；选 x_1 轴为滑动方向。故 $\bar{\mathbf{u}}=(\bar{u},\ 0,\ 0)$；取 $\phi=0$ 为包含 $\boldsymbol{\nu}$ 和 $\bar{\mathbf{u}}$ 的平面。单位矢量 $\hat{r}$，$\hat{\theta}$，$\hat{\phi}$ 分别沿着 r，θ，ϕ 增大的方向，故“径向”是沿 $\hat{r}$ 方向，而 $\hat{\theta}$ 和 $\hat{\phi}$ 是两个“横向”。

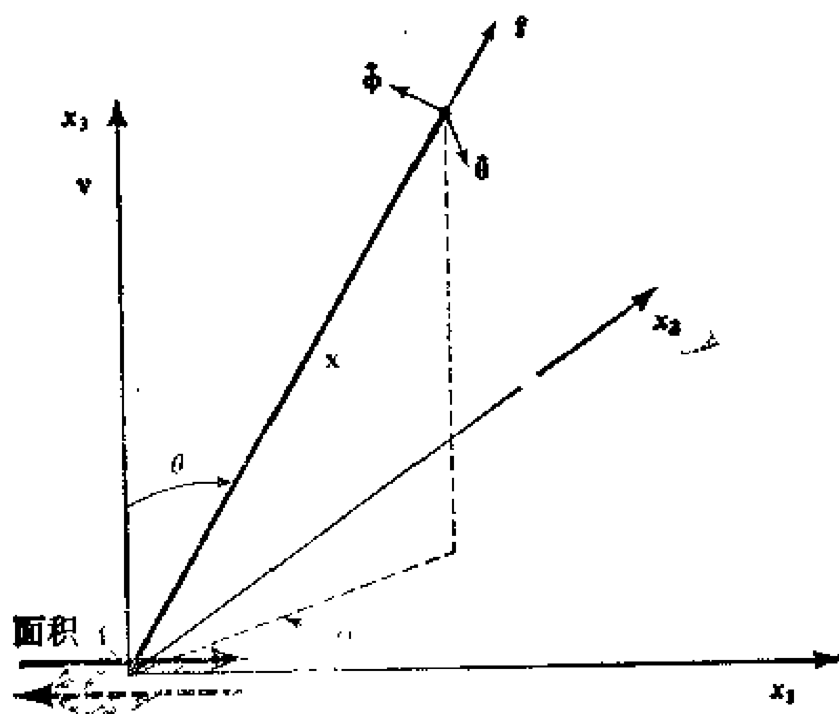


图 4.4

为分析由面积为 A 和平均滑动为 $\bar{\mathbf{u}}$ 的剪切位错所辐射的位移的径向和横向分量，而选取的笛卡尔坐标和球极坐标。见(4.31)

我们寻求把 x 处的位移向量（它的第 n 个笛卡尔分量在(4.30)中给出）表示为沿三个方向 $\hat{r}$，$\hat{\theta}$，$\hat{\phi}$ 的向量的和。幸好，(4.30)是仅由三种向量组成的，即 $\gamma_n\gamma_p\bar{u}_p\gamma_q\nu_q$，$\nu_n\gamma_p\bar{u}_p$ 和 $\delta_{np}\bar{u}_p\gamma_q\nu_q$。这三种向量分别为

$$\left.\begin{array}{ll}2\gamma_n\gamma_p\bar{u}_p\gamma_q\nu_q & \text{是 } \hat{r}\sin 2\theta\cos\phi\bar{u} \text{ 的第 } n \text{ 分量，}\\ 2\nu_n\gamma_p\bar{u}_p & \text{是 } \hat{r}\sin 2\theta\cos\phi\,\bar{u}-\hat{\theta}\,2\sin^2\theta\cos\phi \\ & \quad \bar{u} \text{ 的第 } n \text{ 分量，}\\ 2\bar{u}_n\gamma_q\nu_q & \text{是 } \hat{r}\sin 2\theta\cos\phi\,\bar{u}+\hat{\theta}\,2\cos^2\theta\cos\phi \\ & \quad \bar{u}-\hat{\phi}\,2\cos\theta\sin\phi\,\bar{u} \text{ 的第 } n \text{ 分} \\ & \quad \text{量。}\end{array}\right\} \quad (4.31)$$

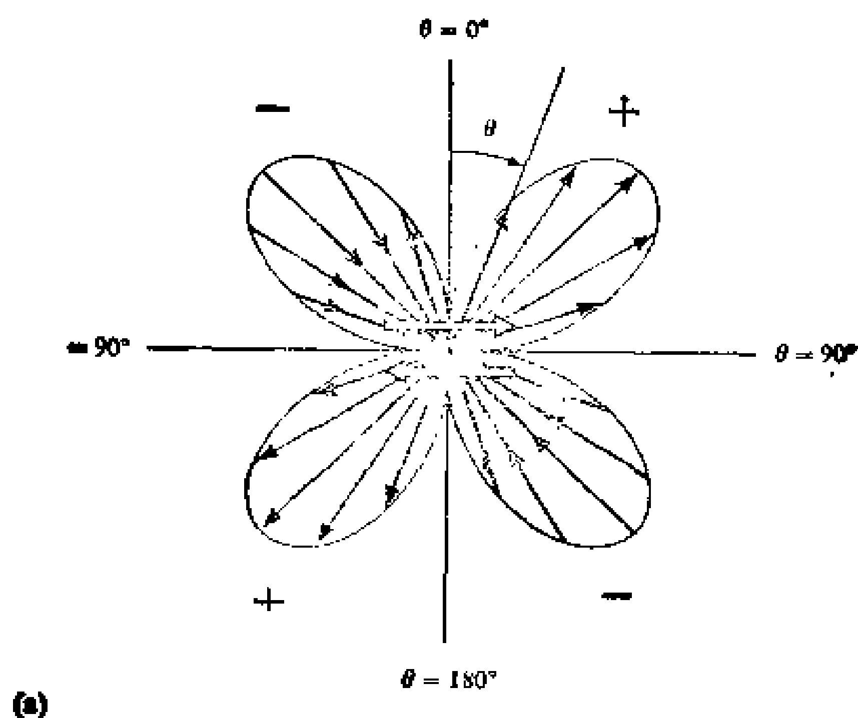
（这些结果是由旋转变换 $\hat{r}=\gamma=(\sin\theta\cos\phi,\ \sin\theta\sin\phi,\ \cos\theta)$，$\hat{\theta}=(\cos\theta\cos\phi,\ \cos\theta\sin\phi,\ -\sin\theta)$和$\hat{\phi}=(-\sin\phi,\ \cos\phi,\ 0)$得出的。）

确定了(4.31)中的向量分量，现在就能利用依赖时间的地震矩 $M_0(t)=\mu\bar{u}(t)A$，以简洁的矢量形式，写出我们的位移场 $u_n=M_{pq}*G_{np,q}$。我们得到

$$\begin{aligned}\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},\ t)=&\frac{1}{4\pi\rho}\boldsymbol{A}^N\frac{1}{r^4}\int_{r/\alpha}^{r/\beta}\tau M_0(t-\tau)d\tau\\&+\frac{1}{4\pi\rho\alpha^2}\boldsymbol{A}^{IP}\frac{1}{r^2}M_0\left(t-\frac{r}{\alpha}\right)+\frac{1}{4\pi\rho\beta^2}\boldsymbol{A}^{IS}\frac{1}{r^2}M_0\left(t-\frac{r}{\beta}\right)\\&+\frac{1}{4\pi\rho\alpha^3}\boldsymbol{A}^{FP}\frac{1}{r}\dot{M}_0\left(t-\frac{r}{\alpha}\right)+\frac{1}{4\pi\rho\beta^3}\boldsymbol{A}^{FS}\frac{1}{r}\dot{M}_0\left(t-\frac{r}{\beta}\right),\end{aligned} \quad (4.32)$$

其中，近场，中间场的 P 和 S，以及远场的 P 和 S 的辐射图案分别为

$$\left.\begin{aligned}\boldsymbol{A}^N&=9\sin2\theta\cos\phi\hat{r}-6(\cos2\theta\cos\phi\hat{\theta}-\cos\theta\sin\phi\hat{\phi})\\\boldsymbol{A}^{IP}&=4\sin2\theta\cos\phi\hat{r}-2(\cos2\theta\cos\phi\hat{\theta}-\cos\theta\sin\phi\hat{\phi})\\\boldsymbol{A}^{IS}&=-3\sin2\theta\cos\phi\hat{r}+3(\cos2\theta\cos\phi\hat{\theta}-\cos\theta\sin\phi\hat{\phi})\\\boldsymbol{A}^{FP}&=\sin2\theta\cos\phi\hat{r}\\\boldsymbol{A}^{FS}&=\cos2\theta\cos\phi\hat{\theta}-\cos\theta\sin\phi\hat{\phi}).\end{aligned}\right\} \quad (4.33)$$



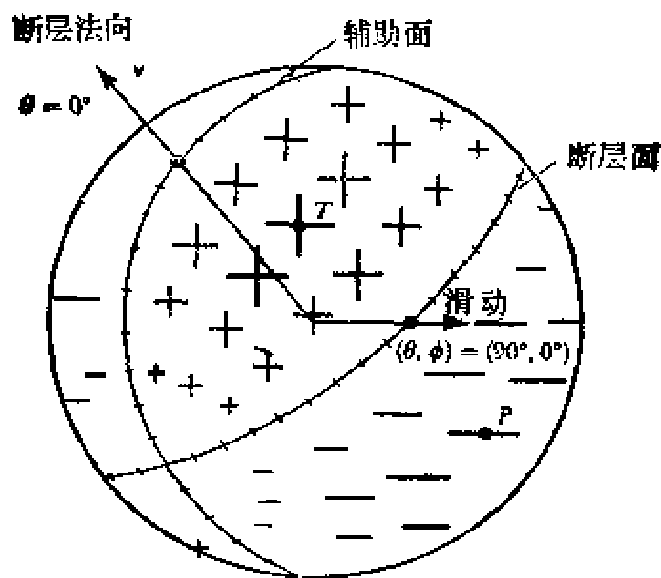
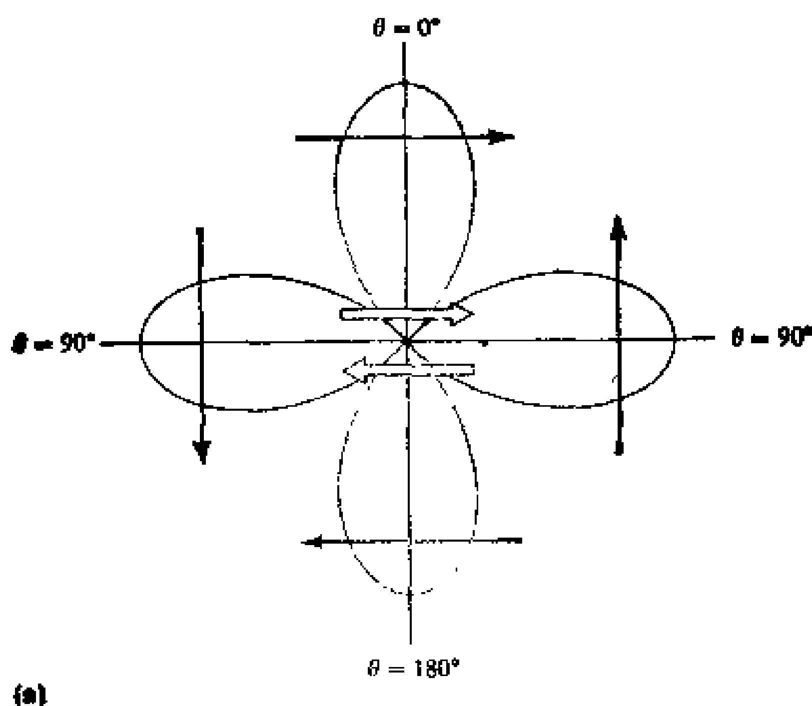


图 4.5

双力偶产生的径向位移的辐射图案，即 $\sin 2\theta\cos\phi\hat{r}$。（a）花瓣是点的轨迹，点至原点的距离与 $\sin 2\theta$ 成正比。这个图对应于一个固定方位的平面，在中心的一对箭头代表剪切位错。注意方向向里和向外的相间象限。按照远场 P 波位移的规定，正号代表向外的位移（如果 $M_0(t-r/\alpha)$ 是正的），负号代表向里的位移。（b）辐射图案在以原点为中心的球面上的图示。各种大小的正负号，代表向里或向外的运动（随 θ 和 ϕ）的变化。断层面和辅助面是节线（在它上面 $\sin 2\theta\cos\phi=0$）。用的是等面积投影（见图 4.17）。用 P 点标出压应力主轴，T 点标出张应力主轴



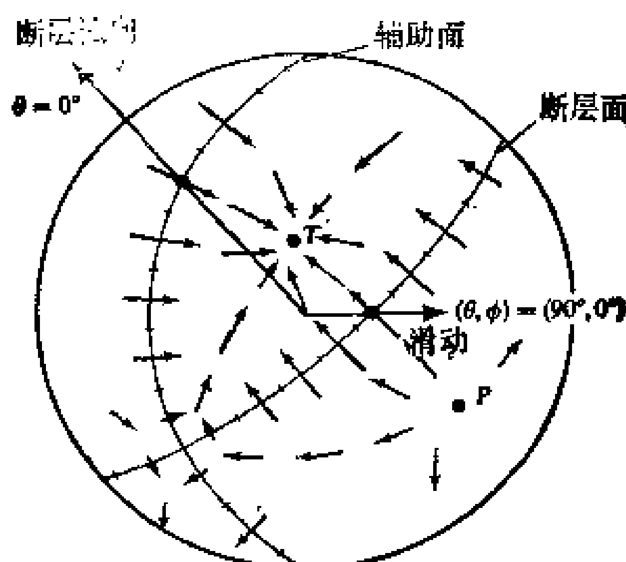


图 4.6

双力偶产生的位移横向分量的辐射图案，即$\cos 2\theta \cos\phi \hat{\boldsymbol{\theta}} - \cos\theta \sin\phi \hat{\boldsymbol{\phi}}$。(a) 在平面$\{\phi=0, \phi=\pi\}$上的四花瓣图案。中间一对箭头表示剪切位错的方向，画在每个花瓣上的箭头表示与该花瓣相关的质点位移方向。如果应用于远场S波位移，则假定$\dot{M}_0(t-r/\beta)$是正的。

(b) 在两个面$\theta=\frac{1}{2}\pi$和$\{\phi=0, \phi=\pi\}$附近，$\hat{\boldsymbol{\phi}}$分量不为零，因而(a)的用途有限。该图是在以震源为中心的整个球面上辐射图案的概况。球面上的箭头（具有变化的大小和方向）表示横向运动（随θ和ϕ）的变化。用的是球极平面（等角）投影（见图4.16）。不存在节线（它上面的运动为零）但却出现节点。注意，在$(\theta, \phi)=(45, 0)$的横向运动节点上，纵向运动的辐射图案为极大值（见图4.5b）。但横向运动的极大值（例如在$\theta=0$）则出现在纵向运动的节线上

这些辐射图案清楚地表现出正比于 $\sin 2\theta\cos\phi\hat{r}$ 的径向分量和正比于 $(\cos 2\theta\cos\phi\hat{\theta}-\cos\theta\sin\phi\hat{\phi})$ 的横向分量。(4.33) 给出的重要性质是，为得到由剪切位错（双力偶）辐射的位移场的所有不同项的完整图象，这些是所需要的仅有的两个辐射图案。图 4.5 表示出径向分量的大小在不同方向 (θ,ϕ) 变化的情况，图 4.6 则表示出横向分量的大小和方向如何变化。在远场 P 波中只出现径向分量，而在远场 S 波中只出现横向分量。然而，中间场位移的 P 和 S，都包含径向的和横向的两种分量，如同近场位移的情况一样。

我们在 (4.32) 和 (4.33) 中求得并在图 4.5 和图 4.6 中表示出的、对 (θ,ϕ) 的意外简单的依赖关系，不禁使人要问，在推导上是否可以用一个更直接的方法。确实是这种情况，矢量面谐波（参看第八章）提供了必要的分析工具，并且从一开始就证实对 (θ,ϕ) 的简单依赖关系。但是，这个较高级方法的有关代数处理，与我们已选用的笛卡尔分析同样地麻烦（照我们的看法）。

在 4.4 节，将对于非均匀介质，如地球，推导远场位移的性质。在 4.5 节，将重新审查辐射图案 (4.33)，以说明它们如何在实际中被用来根据地震资料求断层面空间取向和滑动方向。在结束本节的时候，我们由 (4.32) 求出强度为 M_0 的剪切位错的最终静态位移场。这牵涉到取 $\dot{M}_0(t-\tau)$，$M_0(t-\tau)$ 和 $\int_{r/\alpha}^{r/\beta}\tau M_0(t-\tau)d\tau$ 当 $t\to\infty$ 时的极限，假定地震矩本身有一个最终的常数值 $M_0(\infty)$。结果是

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},\infty)&=\frac{M_0(\infty)}{4\pi\rho r^2}\left[\boldsymbol{A}^N\left(\frac{1}{2\beta^2}-\frac{1}{2\alpha^2}\right)+\frac{\boldsymbol{A}^{IP}}{\alpha^2}+\frac{\boldsymbol{A}^{IS}}{\beta^2}\right]\\
&=\frac{M_0(\infty)}{4\pi\rho r^2}\left[\frac{1}{2}\left(\frac{3}{\beta^2}-\frac{1}{\alpha^2}\right)\sin 2\theta\cos\phi\hat{r}\right.\\
&\qquad\left.+\frac{1}{\alpha^2}(\cos 2\theta\cos\phi\hat{\theta}-\cos\theta\sin\phi\hat{\phi})\right],
\end{aligned}
\tag{4.34}
$$

它[沿任意给定的方向 (θ, ϕ)]随 r^{-2}衰减。

4.4 点源发出的远场 P 波和 S 波的射线理论

有关弹性波传播理论的书和文章，大部分都是关于均匀介质的。地震工作者常常要求很好地掌握这种简单介质中波的性质以及可得到的精确解（参看第五章和第六章）。但是，地震图的实际分析还要求很好地掌握在非均匀介质中传播的波的近似解。地球不仅有两侧弹性性质不连续的物质边界，而且它还包含有一些巨大的区域，其中体积模量、刚性系数和密度都系统而连续地变化。因此，P 波和 S 波两者的速度，从地幔顶部到底部都增加大约一倍，这足以使我们前面已描述过的辐射图案畸变到不能辨认，除非消掉非均匀性的影响。在本节和下节，我们将指出如何消除畸变，并说明体波的振幅如何由于聚焦和散焦的效应而大大改变，就如同光线在折射率变化的介质中传播时所表现的那样。我们将要得到的近似解，叫做几何射线解，它为大量地震体波的常规解释提供基础，必要时也能为比较高级的方法提供指导。

射线理论也许最好看数是可证明的直觉观念同近似解的集成。因此，体波以当地的传播速率沿着 Snell 定律确定的“射线路径”传播，它的振幅则以射线自震源（作为“波阵面”)到达接收点的几何扩散所确定。这些说法我们都将证明，但在建立试用形式解的最初阶段，直觉的作用很大。

我们的途径是，推广已得到的 P 波和 S 波远场解的形式，并利用一坐标系自然地描述各向同性非均匀介质中的点源产生的波阵面扩散。对于球对称介质，建立在射线基础上的正交坐标具有下列性质，P 波以及 S 波的两个不同分量（叫做 SV 和 SH）是分离开的。这三种不同的运动，平行于三个不同的坐标方向。

波阵面是物理上有意义的某个有关变量（例如质点的加速

度）的传播间断。在这点上，用"间断"这个词指"变量或者它的一个导数的间断。"因此，图 4.7 a 所示的斜坡，在 $t=T$ 实际是连续的，但这个函数对于描述波阵面附近的行为时是个可取的量，因为这个斜坡有不连续的（即间断的）导数。在必要的地方，把一个 $(n-1)$ 次导数在 $t=T$ 处不连续（但所有低阶导数都连续）的函数，叫做在 $t=T$ 有 n 阶间断。重新查看 Green 函数解（4.23）将表明，体力 $X_0(t)$（在时间上的）的间断，导致在远场项中出现传播间断，它的阶与在体力中出现的阶相同：作用于 $r=0$ 的 $X_0(t)$ 导致大 r 处不连续的脉冲形状 $X_0(t-r/\alpha)$ 和 $X_0(t-r/\beta)$。（在源点必须有某一阶的不连续，否则，$X_0(t)$ 及其所有导数在所有时间均为零，从而没有波产生。）在近场项中也有个传播间断 $\int_{r/\alpha}^{r/\beta}\tau X_0(t-\tau)d\tau$，但它不太严重。例如，如果 $X_0(t)\propto H(t)$（Heaviside 阶梯函数，它有一阶间断），则传播的位移阶梯被辐射至远场，但近场项带有 2 阶间断，因为 $\int_{r/\alpha}^{r/\beta}\tau H(t-\tau)d\tau$ 在 $t=r/\alpha$ 和 $t=r/\beta$ 是连续的，但它的一次导数在这里是不连续的（见图 4.8）。

最强的间断由我们称之为远场项的部分来传播，这个事实具有根本的重要性。事实上，最好用它作为这些项的特征性质，因为一般用的"远场"和"近场"两个词会引起误解。在任意固定的距离 r，不管大还是小，辐射波在充分接近 r/α 和 r/β 的时间上的行为，都将由在这些时间到达的最强的间断（最强的波阵面）占优势，而一般说，这是在远场项中含有的。在足够大的 r，因而就有两个理由使远场项占优势：间断的强度，随距离的微弱衰减。但是，在固定的小 r，远场项是否将占优势，要看其间断的强度比 r^{-1} 奇异性的减弱大还是小。

幸而，借助于频率域，可以找出大为简单的方法来比较我们称之为远场和近场的位移。在整个这部书中，我们将用下面的记

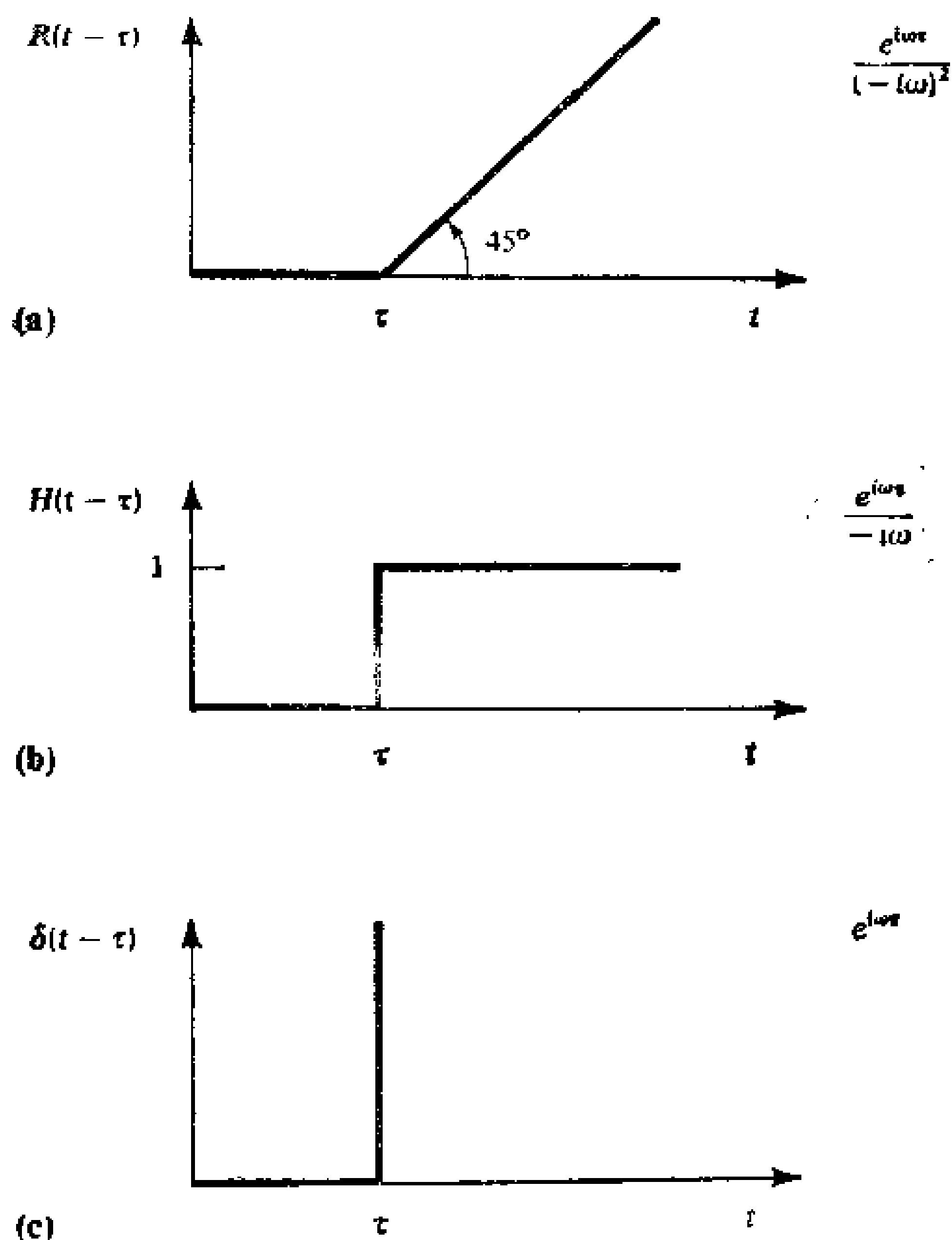


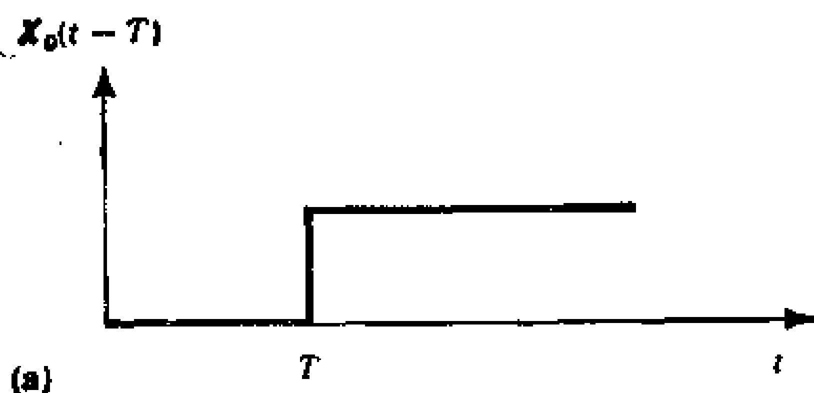
图 4.7

一组不连续函数和它们的有关高频频谱的公式。斜坡值由 $R(t)=tH(t)$ 给定

号和约定：

$$f(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{i\omega t}dt,$$

$$f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(\omega)e^{-i\omega t}d\omega$$



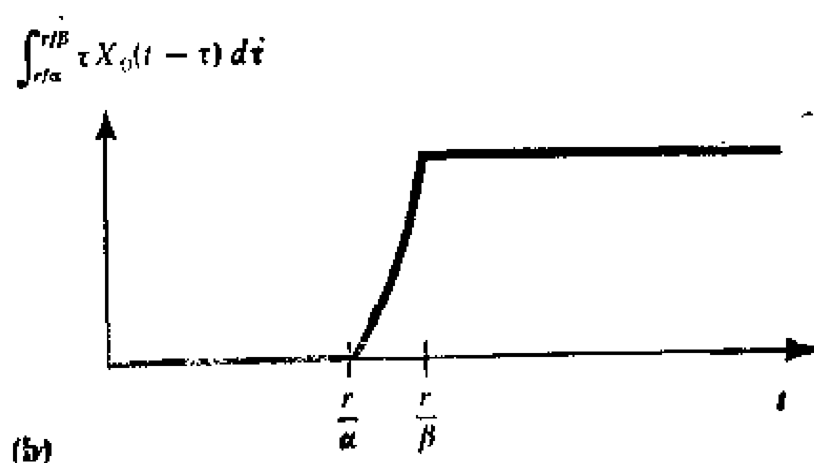
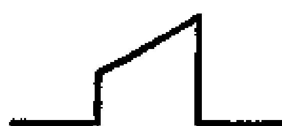


图 4.8

对于以 $X_0(t)\propto H(t)$得到的 Green 函数，远场和近场位移脉冲形状的对比。(a) 远场：时间 $t=T$ 是 $t=r/\alpha$ 或 r/β。(b) 近场：在时间 r/α 和 r/β 之间，位移按抛物线增大，但在这两种波阵面上，质点速度都是不连续的

来进行时间和频率函数的 Fourier 变换，根据问题的前后关系来决定究竟在时间域还是在频率域求 f。(关于我们选择这个约定的理由，参看补充 5.2。) 这时 $X_0(t-r/\alpha)$变换为$e^{i\omega r/\alpha}X_0(\omega)$，而$\int_{r/\alpha}^{r/\beta}\tau X_0(t-\tau)d\tau$ 可以看作是 $X_0(t)$ 同下列形状的函数的褶积：



因此，这个褶积变换为乘积

$$X_0(\omega)\int_{r/\alpha}^{r/\beta} t e^{+i\omega t}dt=\Big[-\Big(\frac{r}{\alpha}-\frac{1}{i\omega}\Big)\frac{e^{+i\omega r/\alpha}}{i\omega}+\Big(\frac{r}{\beta}-\frac{1}{i\omega}\Big)\frac{e^{+i\omega r/\beta}}{i\omega}\Big]X_0(\omega),$$

由 (4.23) 我们得到 $X_0 * G_{ij}$ 的 Fourier 变换为

$$\frac{X_0(\omega)e^{+i\omega r/\alpha}}{4\pi\rho\alpha^2 r}\Big[\gamma_i\gamma_j+(3\gamma_i\gamma_j-\delta_{ij})\Big(-\frac{\alpha}{i\omega r}\Big)+(3\gamma_i\gamma_j-\delta_{ij})\Big(-\frac{\alpha}{i\omega r}\Big)^2\Big]$$
$$-\frac{X_0(\omega)e^{+i\omega r/\beta}}{4\pi\rho\beta^2 r}\Big[(\gamma_i\gamma_j-\delta_{ij})+(3\gamma_i\gamma_j-\delta_{ij})\Big(-\frac{\beta}{i\omega r}\Big)+(3\gamma_i\gamma_j-\delta_{ij})\Big(-\frac{\beta}{i\omega r}\Big)^2\Big]. \tag{4.35}$$

(4.35)中方括号内的无量纲项，给出不同远场和近场位移的相对大小。这里重要的是无量纲比值 $\omega r/\alpha$ 和 $\omega r/\beta$，并且注意到

$\frac{\omega r}{\alpha}=2\pi\times$(对于频率为 ω 的 P 波，源与接收点之间的波长数目),

$\frac{\omega r}{\beta}=2\pi\times$(对于频率为 ω 的 S 波，源与接收点之间的波长数目)。

利用这个解释，我们至少能得到 Green 函数的不同项在何处占优势的清晰图象。简单说，远场是"到源点的距离大于几个波长的所有位置"，而近场是"到源点的距离为一个波长的一小部分之内的所有位置"。在近距离和中间距离上，必须估计(4.35)中每一项的相对大小，也许得到的结论是没有占优势的单一项(参看问题 4.1)。

我们上面关于可在时间域中传播的间断的讨论，可以形式地转化为高频频谱的性质。如果 $g(t)$ 在原点有一单位跃变，则频谱 $g(\omega)$ 就有一项，它随 $\omega\to\infty$ 的渐近行为是 $(-i\omega)^{-1}$（参看 Bracewell，1965）。对该结果反复进行积分，并应用移位定理：

$$g(t-T)\longrightarrow g(\omega)e^{i\omega T},$$

我们得到下列结果：如果 $f(t)$ 在 $t=T$ 有第 n 阶间断，使得

$$\left.\frac{\partial^{n-1}f(t)}{\partial t^{n-1}}\right|_{t=T^-}^{t=T^+}=A\,(A\text{ 为常数}),$$

则随 $\omega\longrightarrow\infty$ 时，Fourier 变换 $f(\omega)$ 渐近于 $A(-i\omega)^{-n}e^{i\omega T}$。这就使我们能够看到，(4.35)中的不同项如何与时间域中的不同项直接相联系，但它可以是一个使人误解的结果，因为只在比能观测到的频率高得多的频率上，$f(\omega)$ 的行为才能够类似于 $A(-i\omega)^{-n}\times e^{+i\omega T}$。换另一种说法就是，物理变量 $f(\omega)$ 在高频上的观测趋势，不能作为它所代表的任一波阵面的性质的标志，因为后者可能要求观测千赫或兆赫的频率；而这些频率通常在地震学中是不用的。即使在地震频率上，我们也能根据（4.35）中所示不同的频率依赖关系，来分离近场和远场，虽然抽象的量“波阵面”和“间断强度”可能是无法观测的。

我们比较详细地给出这些结果，是因为关于射线理论的正式文章都倾向于着重分析间断的各种阶次，但我们在地震学中不能采用这种方法。我们宁可采取一个不太严格的方法，但是要把假定说清楚，其中假设导数 $\dot{X}_0(t-r/\alpha)$ 比 $(\alpha/r)X_0(t-r/\alpha)$ 占优势，因为在远场体波所通常观测到的高频上$\left(\text{即}\dfrac{\omega r}{\alpha}\gg1\right)$，就是这种情况。

研究体波位移的纵分量和两个横分量的精巧方法就是建立一个曲线坐标系，使这三个分量或沿着一个坐标轴，或位于一个坐标平面内。假定位于 $\boldsymbol{\xi}$ 的点源，在选为起点的时间 $t=0$ 开始起作用。在均匀介质中，波阵面作为不断扩张的球面由震源向外辐射，

球面的半径为 αt（对于 P 波）和 βt（对于 S 波），在时间 r/α 和 r/β 到达一般位置 $\boldsymbol{x}$，此处 $r=|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\xi}|$。我们把它推广到非均匀介质，办法是引入 $T(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\xi})$ 作为波阵面由 $\boldsymbol{\xi}$ 到达 $\boldsymbol{x}$ 所需的走时，它依赖于位置。如果对于问题中的特定震源，能够有多于一个的波阵面，例如，若纵波和横波都存在，那就将需要多于一个的走时函数。然而，引用 $T(\boldsymbol{x})$ 常常就足够了，根据题意可以指明关心的是哪个波阵面和哪个点源。

因此，我们的第一个初解（即解的尝试形式）为

$$\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}, t)=\boldsymbol{U}(t-T)f(\boldsymbol{x}), \tag{4.36}$$

我们要把它作为波动方程 $\rho\ddot{u}_i=\tau_{ij,j}$（除去源奇异点 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\xi}$ 外，处处适用）的近似解进行考查。对于一般各向异性非均匀介质，应力-位移关系是 $\tau_{ij}=c_{ijkl}(\boldsymbol{x})u_{k,l}(\boldsymbol{x}, t)$，直接代入，给出

$$\rho\ddot{U}_i f=[c_{ijkl}(U_k f)_{,l}]_{,j}. \tag{4.37}$$

在波阵面附近，我们假定 U 的起伏比 f 或 c_{ijkl} 快得多，逐次微商 $\dot{\boldsymbol{U}}$ 和 $\ddot{\boldsymbol{U}}$ 的涨落仍比较快。方程(4.37)含有 $\boldsymbol{U}$ 对时间和空间的两种微商，但因 $\boldsymbol{U}$ 只与时空组合 $(t-T(\boldsymbol{x}))$ 有关系，使得能有下列关系：

$$U_{k,lj}=\ddot{U}_k\frac{\partial T}{\partial x_l}\frac{\partial T}{\partial x_j}-\dot{U}_k\frac{\partial^2 T}{\partial x_l\partial x_j},$$

从而(4.37)中的各二次导数可归拢为

$$\left(\rho\delta_{ik}-c_{ijkl}\frac{\partial T}{\partial x_j}\frac{\partial T}{\partial x_l}\right)\ddot{U}_k f=E_i(\boldsymbol{U}f), \tag{4.38}$$

这里的 $\boldsymbol{E}$ 仅仅包含(i)$\boldsymbol{U}$ 的一阶微商，(ii)$\boldsymbol{U}$ 本身，和(iii)弹性常数与振幅函数 $f(\boldsymbol{x})$ 以及它们的梯度。因此，$\boldsymbol{E}$ 一定比 $\ddot{\boldsymbol{U}}$ 小得多，于是我们得出结论，$\ddot{U}_k f$ 的系数矩阵一定是退化矩阵：

$$\det\left|\rho\delta_{ik}-c_{ijkl}\frac{\partial T}{\partial x_j}\frac{\partial T}{\partial x_l}\right|=0. \tag{4.39}$$

既然它给出函数 $T(\boldsymbol{x})$ 的约束条件，所以这个方程决定着弹性介质中可能的波阵面。

在非均匀各向同性介质中，c_{ijkl}的特有形式[见(2.33)]使得能把(4.39)分解成因子形式：

$$\left(\nabla T\cdot\nabla T-\frac{\rho}{\lambda+2\mu}\right)\left(\nabla T\cdot\nabla T-\frac{\rho}{\mu}\right)^2=0. \qquad (4.40)$$

即T满足程函方程(eikoal equation)

$$(\nabla T)^2=\frac{1}{c^2}, \qquad (4.41)$$

其中c是局部P波速度$\sqrt{\frac{\lambda(\boldsymbol{x})+2\mu(\boldsymbol{x})}{\rho(\boldsymbol{x})}}=\alpha$，或局部$S$波速度$\sqrt{\frac{\mu(\boldsymbol{x})}{\rho(\boldsymbol{x})}}=\beta$。

T满足具有速度c的程函方程，一个由之可引入射线的方程，下面我们发展由此得到的结果。

4.4.1 与速度场$c(x)$相联系的走时函数$T(x)$的性质

假定波阵面S由$t=T(\boldsymbol{x})$给定，并且S到达点$\boldsymbol{x}+d\boldsymbol{x}$比到达点$\boldsymbol{x}$晚时间$dt$，则$t+dt=T(\boldsymbol{x}+d\boldsymbol{x})$，因面$dt=\nabla T\cdot d\boldsymbol{x}$。如果$\boldsymbol{V}$是波阵面沿$d\boldsymbol{x}$方向前进的速度，则有$\boldsymbol{V}=d\boldsymbol{x}/dt$和$\nabla T\cdot\boldsymbol{V}=1$。所以

$$V^2\geqslant\frac{1}{(\nabla T)^2}=c^2 \quad [\text{利用}(4.41)],$$

仅当矢量$\boldsymbol{V}$与∇T平行，即$d\boldsymbol{x}$垂直于S时，才为等式。因此，c是S在与它自身正交方向(垂直)上的速度。

对于给定的波阵面S，我们引入射线作为随波阵面传播的S的法线。如果一条射线利用$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}(\zeta)$形式的参数来表示，其中$\zeta$沿射线单调变化，则$d\boldsymbol{x}/d\zeta=g(\boldsymbol{x})\nabla T$是该射线的方程，其中与平行矢量有关的标量函数$g$，由特别选取的$\zeta$来决定。

例如，选取

$$\frac{d\boldsymbol{x}}{d\zeta}=c^2\nabla T=(c\nabla T)c \qquad (4.42)$$

并注意到$c\nabla T$是S的单位法线，c是S垂直于自身的速度，则ζ可解释为沿射线的走时。由于S以特定的射线R为法线而传播，所以，S与R的交点将出现在不同的T值。为审查该T与公式(4.42)的ζ之间的关系，我们注意到

$$\frac{dT}{d\zeta}=\nabla T\cdot\frac{d\boldsymbol{x}}{d\zeta}=\nabla T\cdot(c^2\nabla T)=1,$$

所以，T和ζ沿射线方向严格地以同样方式增大。因此，射线自身可以用T表示为参数，而T的物理意义是沿射线的走时。在用射线路径方程进行计算时，有时用沿射线由某参考点测得的距离s作为参数比较方便。于是有

$$\frac{d\boldsymbol{x}}{ds}=c\nabla T \tag{4.43}$$

(因为$d\boldsymbol{x}/ds$与∇T平行，而(4.43)左边是单位向量)。

这些射线本身是固定的空间曲线，所以，为考查它们的几何性质，我们常常需要消去公式(4.43)中的时间量T，得到只含有$c(\boldsymbol{x})$的方程$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}(s)$。进行这种消除(利用程函方程)需要有若干步，一步一步地得到

$$\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{c}\frac{d\boldsymbol{x}}{ds}\right)=\frac{d}{ds}\nabla T=\left(\frac{d\boldsymbol{x}}{ds}\cdot\nabla\right)\nabla T=(c\nabla T\cdot\nabla)\nabla T$$

$$=\frac{1}{2}c\nabla[(\nabla T)^2]=\frac{1}{2}c\nabla\left(\frac{1}{c^2}\right)=-\frac{1}{c^2}\nabla c.$$

因此，只有空间坐标的射线微分方程为

$$\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{c}\frac{d\boldsymbol{x}}{ds}\right)=\nabla\left(\frac{1}{c}\right). \tag{4.44}$$

在均匀区域内，它简化为$d^2\boldsymbol{x}/ds^2=0$，其一般解$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{a}s+\boldsymbol{b}$($\boldsymbol{a}$和$\boldsymbol{b}$为常数)是一条直线。

在c只依赖于深度z(在笛卡尔坐标系内)的介质中，量

$$\hat{\boldsymbol{z}}\times\frac{1}{c}\frac{d\boldsymbol{x}}{ds}\equiv\boldsymbol{Q} \tag{4.45 a}$$

沿射线为常数，因为

$$\frac{dQ}{ds}=\hat{z}\times\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{c}\frac{dx}{ds}\right)=\hat{z}\times\nabla\left(\frac{1}{c}\right)=0$$

$\left[\hat{z}与\nabla\left(\frac{1}{c}\right)平行\right]$。于是，射线被限制在平行于 z 轴的平面内，并且 $\sin i(z)/c(z)\equiv p$ 沿一条射线为常数，其中 i 是 z 增大的方向与射线间的夹角(见图 4.9 a)。这是 Snell 定律，p 叫做射线参数。

在球对称介质中 $c=c(r)$，量

$$\boldsymbol{r}\times\frac{1}{c}\frac{d\boldsymbol{r}}{ds}\equiv Q \tag{4.45 b}$$

沿射线为常数。(这里利用 $\boldsymbol{r}=(r,\ \theta,\ \phi)$ 和以对称中心为原点的球极坐标。)这个结果再次用到(4.44)，因为

$$\frac{dQ}{ds}=\frac{d\boldsymbol{r}}{ds}\times\frac{1}{c}\frac{d\boldsymbol{r}}{ds}+\boldsymbol{r}\times\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{c}\frac{d\boldsymbol{r}}{ds}\right)=0+\boldsymbol{r}\times\nabla\left(\frac{1}{c}\right)=0.$$

射线位于竖直面内，并且现在的量$\frac{r\sin i(r)}{c(r)}\equiv p$(仍叫射线参数)沿一条射线路径为常数(见图 4.9 b)。这是球对称介质的 Snell 定律。在后面各章时常用到量 p，往往把它作为变量来处理，离开点源的不同射线对应着不同的 p 值。注意，p 在随深度而变化的介质(4.45 a)中的物理量纲，与在球对称介质(4.45 b)中的量纲不同。

在转到研究辐射的质点位移振幅之前，有个更普遍的射线性质需要提出。这个结果叫做 Fermat 原理，即，对于射线上的两点 A 和 B，射线本身是这样一个路径，沿着它在速度场 $c(\boldsymbol{x})$ 中从 A 到 B 的走时是个稳定值。我们可以用射线方程$\frac{d\boldsymbol{x}}{d\zeta}=g(\boldsymbol{x})\nabla T=g(\zeta)\nabla T$ 中 ζ 的进一步性质证明它(请回忆，我们已经对走时和距离利用过 ζ)。量 $g(\zeta)$ 和 ζ 被程函方程(4.41)所约束，这意味着

$$\frac{d\boldsymbol{x}}{d\zeta}\cdot\frac{d\boldsymbol{x}}{d\zeta}=\left(\frac{g}{c}\right)^2.$$

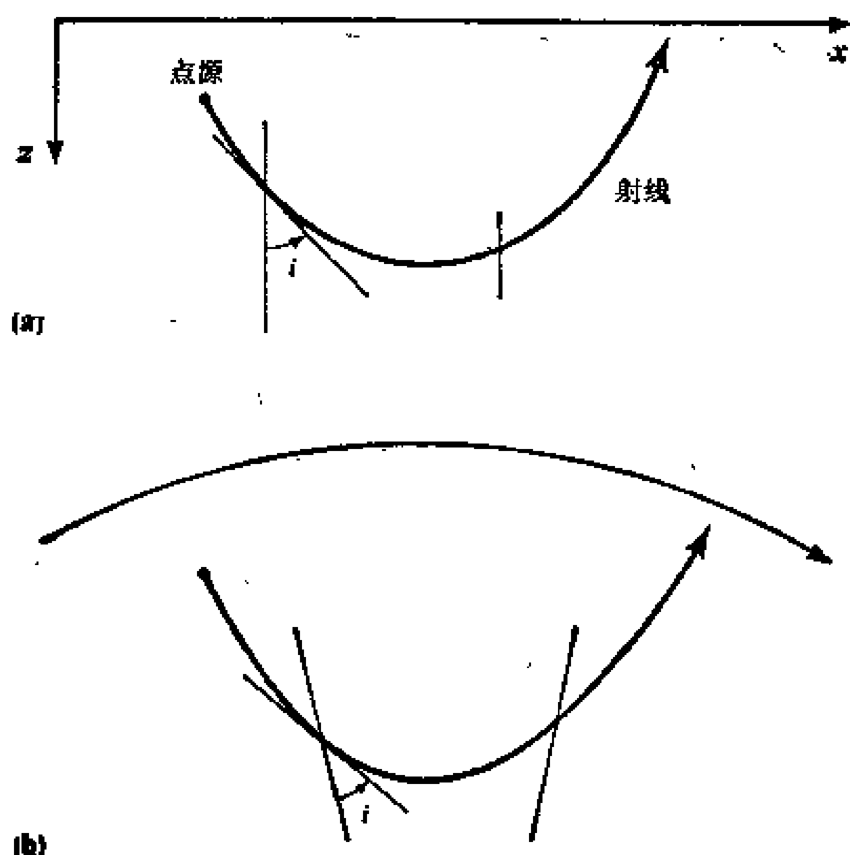


图 4.9

(a) 在速度只随深度变化的介质中的射线路径：$\sin i(z)/c(z)$ 是常数；射线被限制在竖直面内。(b) 在速度只随到对称中心的距离 r 变化的球对称介质中的射线路径：$r\sin i(r)/c(r)$是常数，射线处于竖直面内。估算出的在源点的角度 i 叫做离源角（take-off angle）

给定 ζ，然后我们求

$$g = c\left(\frac{d\boldsymbol{x}}{d\zeta}\cdot\frac{d\boldsymbol{x}}{d\zeta}\right)^{\frac{1}{2}}. \tag{4.46}$$

一般情况下$\frac{d}{ds}=\left(\frac{c}{g}\right)\frac{d}{d\zeta}$，因此，由(4.44)，我们有对于任意选定的 ζ 的射线方程

$$\frac{c}{g}\frac{d}{d\zeta}\left[\frac{1}{g}\frac{d\boldsymbol{x}}{d\zeta}\right]=\nabla\left(\frac{1}{c}\right).$$

可以认为这个形式与变分计算的 Euler 方程相同，由(4.46)

首先消去g，得到

$$\frac{d}{d\xi}\left[\frac{1}{c(\boldsymbol{x})}\frac{\dfrac{d\boldsymbol{x}}{d\xi}}{\left(\dfrac{d\boldsymbol{x}}{d\xi}\cdot\dfrac{d\boldsymbol{x}}{d\xi}\right)^{1/2}}\right]=\left(\frac{d\boldsymbol{x}}{d\xi}\cdot\frac{d\boldsymbol{x}}{d\xi}\right)^{1/2}\nabla\left(\frac{1}{c}\right).$$

可依次将它写为三个标量方程($i=1, 2, 3$)：

$$\frac{d}{d\xi}\left\{\frac{\partial}{\partial\left(\dfrac{\partial x_i}{\partial\xi}\right)}\left[\frac{1}{c(\boldsymbol{x})}\left(\frac{d\boldsymbol{x}}{d\xi}\cdot\frac{d\boldsymbol{x}}{d\xi}\right)^{1/2}\right]\right\}=\frac{\partial}{\partial x_i}\left[\frac{1}{c(\boldsymbol{x})}\left(\frac{d\boldsymbol{x}}{d\xi}\cdot\frac{d\boldsymbol{x}}{d\xi}\right)^{1/2}\right].$$

这些就是我们所找的 Euler 方程，因为它们告诉我们，对于一条射线路径，走时是稳定的。也就是说，

$$T(B,A)=\int_A^B\frac{|d\boldsymbol{x}|}{c(\boldsymbol{x})}=\int_A^B\frac{1}{c(\boldsymbol{x})}\left(\frac{d\boldsymbol{x}}{d\xi}\cdot\frac{d\boldsymbol{x}}{d\xi}\right)^{1/2}d\xi \quad (4.47)$$

是这样一个积分，如果而且只要$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}(\xi)$是一条射线路径，则对于连接$A$和$B$的所有可能路径来说，这个积分是稳定的。

4.4.2 射线坐标

波阵面与同它相联系的射线正交，并且我们已经证明，沿一条射线上的点如何用T值给以参量化。现在引入(c^2, c^3)作为波阵面本身内的某个坐标系（或者等效地说，确认与点源相联系的射线构成一个二参量族），这时，射线在速度场$c(\boldsymbol{x})$(c等于α或β)中到达的每个点，用射线坐标系(T, c^2, c^3)的值来描述。我们的曲线坐标记号是在补充 2.6 中引入的。T方向（它沿射线）在每个点都与c^2和c^3方向正交，但在一般非均匀介质中，选择坐标系，使c^2和c^3方向始终正交是不可能的。幸而，球对称介质的特殊情形，却允许选择正交的c^2和c^3，使我们能直接应用在第二章发展的关于一般正交系的结果。这里须注意，标量因子$h_T=h^1=c$，因为沿射线的距离增量ds是cdT。

在均匀介质中，我们知道远场P波是纵的，S波是横的。对于一般非均匀介质，同样也是对的，这可以从方程(4.38)与∇T

的矢量乘积和标量乘积看到。在各向同性介质中，这些乘积结果是

$$[\rho-\mu\nabla T\cdot\nabla T]\ddot{\boldsymbol{U}}\times\nabla T=\boldsymbol{E}(\boldsymbol{U})\times\nabla T \tag{4.48}$$

和

$$[\rho-(\lambda+2\mu)\nabla T\cdot\nabla T]\ddot{\boldsymbol{U}}\times\nabla T=\boldsymbol{E}(\boldsymbol{U})\times\nabla T. \tag{4.49}$$

回顾一下，$|\boldsymbol{E}|$具有$|\dot{\boldsymbol{U}}|$的量级，已经使用初解 $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},\ t)=f(\boldsymbol{x})\times\boldsymbol{U}(t-T(\boldsymbol{x}))$，以及量级为$|\ddot{\boldsymbol{U}}|$的项比量级为$|\dot{\boldsymbol{U}}|$的项大得多，所以有

$$\ddot{\boldsymbol{U}}\times\nabla T=0\ \text{和}(\nabla T)^2=\frac{\rho}{\lambda+2\mu}=\frac{1}{\alpha(\boldsymbol{x})^2} \tag{4.50}$$

或者

$$\ddot{\boldsymbol{U}}\times\nabla T=0\text{和}(\nabla T)^2=\frac{\rho}{\mu}=\frac{1}{\beta(\boldsymbol{x})^2}. \tag{4.51}$$

射线方向由 ∇T 给定，所以(4.50)描述沿着由局部P波速度决定的射线传播的纵波，(4.51)描述沿着由局部S波速度决定的射线传播的横波。

我们的下一个目标是，求P和S波在均匀介质中沿射线传播时的振幅变化。根据结果(4.50)和(4.51)，我们将假定：

i) 如果 (T,c^2,c^3) 由P波速度 $\alpha(\boldsymbol{x})$来定义，则运动方程近似解中的 u^1 (沿 ∇T 方向的 $\boldsymbol{u}$ 分量)占优势，即 u^2 和 u^3 两个横分量可忽略不计。这是纵波解，其初解为

$$\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},t)=f^1(\boldsymbol{x})(U^1(t-T(\boldsymbol{x})),0,0). \tag{4.52}$$

ii) 如果 (T,c^2,c^3) 由S波速度 $\beta(\boldsymbol{x})$ 来定义，则位移 u^2 和 u^3 占优势。这是横波解，其初解为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},t)=&f^2(\boldsymbol{x})(0,U^2(t-T(\boldsymbol{x})),0)\\&+f^3(\boldsymbol{x})(0,0,U^3(t-T(\boldsymbol{x})).\end{aligned} \tag{4.53}$$

我们先来考查球对称介质的特殊情况，这是地球结构的很好的近似。对这种情况，c^2和c^3被选作正交坐标 p 和 ϕ，如图 4.10所示。我们将看到，可以很快得到(4.52) 和 (4.53)的振幅函数

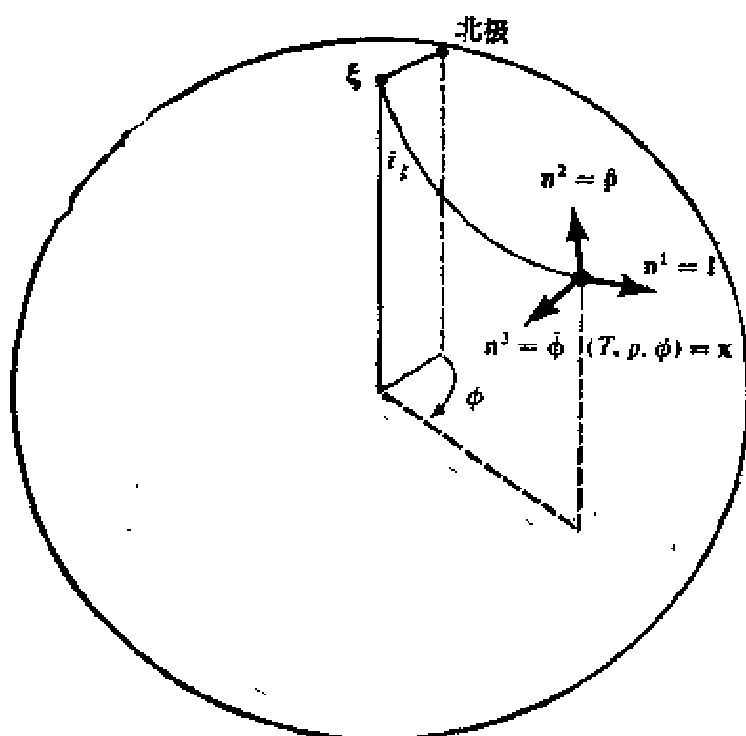


图 4.10

关于球对称介质的一般正交射线坐标。取 $(c^1, c^2, c^3)=(T, p, \phi)$，其中 p 是射线参数 $r\sin i(r)/c(r)$（它沿给定的射线为常数），ϕ 是地理方位角，T 是波阵面沿射线路径从 ξ 至 x 的走时。因此，$(c^2,c^3)=(p,\phi)$ 规定着离开震源的特定射线，而 T 规定着该射线上的特定点。在 x 的有关法线是 n^1（沿射线），n^2（在竖直面内的横向）和 n^3（水平面内的横向）。我们将常常用符号 l，$\hat{p}$，$\hat{\phi}$ 表示它们各自的单位法线。

c^2 的另一可能选择是常被叫做离源角的 i_ξ：在此情况下，i_ξ 和 ϕ 应当是以震源为中心的球极坐标系中的角，取 $i_\xi=0$ 的方向为由震源向下，$\phi=0$ 的方向为由震源向北。取 $i_\xi=0$ 为竖直向下的理由是，这时 ϕ 具有相对震源的方位的普通地理定义，从北开始顺时针测量 ϕ，需要一个右手坐标系

f^1, f^2 和 f^3，并且可以鉴别 S 波的两个独立分量。

4.4.3 球对称介质中 P 波的几何解

现在，$u^1(x,t)$满足的精确方程是

$$\rho\frac{\partial^2 u^1}{\partial t^2}=\frac{1}{\alpha h^2 h^3}\Big[\frac{\partial}{\partial T}(h^2h^3\tau^{11})+\frac{\partial}{\partial c^2}(h^3\alpha\tau^{12})$$

$$+\frac{\partial}{\partial c^3}(\alpha h^2\tau^{31})\Big]+\frac{\tau^{12}}{\alpha h^2}\frac{\partial\alpha}{\partial c^2}+\frac{\tau^{31}}{h^3\alpha}\frac{\partial\alpha}{\alpha c^3}-\frac{\tau^{22}}{\alpha h^2}\frac{\partial h^2}{\partial T}$$

$$-\frac{\tau^{33}}{h^2\alpha}\frac{\partial h^3}{\partial T} \tag{4.54}$$

[参看(2.48)和图 4.10]，源点 $x=\xi$ 除外。然而，由应变-位移公式((2.45)和(2.46))以及我们的假定：

iii）垂直于波阵面的波函数微商比平行于波阵面的微商大得多，于是，该坐标系中的大多数应变分量可忽略不计。这时应力-应变关系式(2.50)给出 τ^{12}，τ^{13}，τ^{22}，τ^{33}实际等于零，但是

$$\tau^{11}=\frac{\lambda+2\mu}{\alpha}\frac{\partial u^1}{\partial T},$$

所以(4.54)简化为近似形式

$$\rho\frac{\partial^2 u^1}{\partial t^2}=\frac{1}{\alpha h^2 h^3}\left[\frac{\partial}{\partial T}\left(h^2 h^3\frac{\lambda+2\mu}{\alpha}\frac{\partial u^1}{\partial T}\right)\right].$$

对于相同量级的近似（即保留 $\ddot{u}^1$ 和 $\dot{u}^1$），它是

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}[(\rho\alpha h^2 h^3)^{1/2}u^1]=\frac{\partial}{\partial T^2}[(\rho\alpha h^2 h^3)^{1/2}u^1], \tag{4.55}$$

这仅仅是波沿 T 变化的方向传播的一维的波动方程。$(\rho\alpha h^2 h^3)^{1/2}u^1$的一般解，是 $t-T$ 的函数加上 $t+T$ 的函数。因而，沿 T 增大方向的纵运动的 P 波解是

$$\mathbf{u}^P(\mathbf{x},t)=(u^1,0,0)$$

$$=\left(\frac{1}{\rho\alpha h^2 h^3}\right)^{1/2}\mathscr{F}^P(c^2,c^3)(U^1(t-T(\mathbf{x}),0,0). \tag{4.56}$$

此式右边的因子具有若干性质，在 4.1 节（公式(4.3)后面）对于从均匀介质中的点源向外扩散的波的基本解，已经指出过这些性质。量$(h^2h^3)^{-1/2}$ 描述几何扩散造成的波衰减（见图 4.11）；因子 $\mathscr{F}^P(c^2,c^3)$描述由震源向不同方向 (c^2,c^3) 发射的P波的辐射图案，我们可以料想到，给出纵向位移脉冲形状的函数 $U^1[t-T(\mathbf{x})]$，一定与作用在震源的体力的时间函数有关。

(4.56)中最有含义的因子是$(h^2h^3)^{-1/2}$，在图 4.11 中我们把

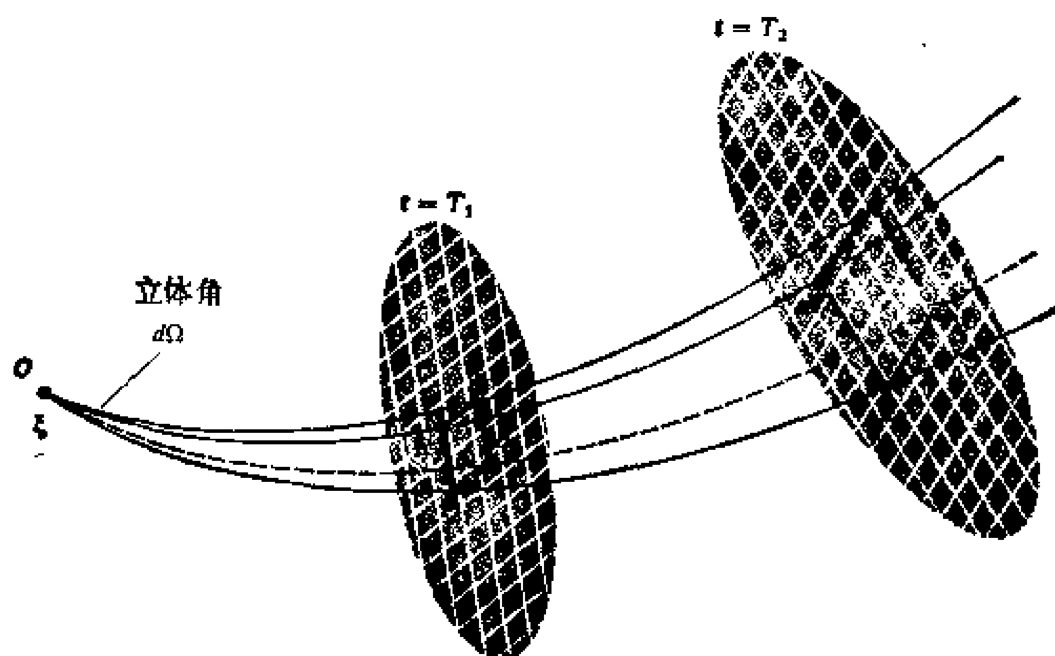


图 4.11

四条射线的几何扩散。设 OP_1P_2是一般正交系 (T, c^2c^3) 中坐标为(c^2, c^3)的射线，T_1 和 T_2给出同一波阵面在相继时间 $t=T_1$和$t=T_2$的位置。设$OQ_1Q_2, OR_1R_2, OS_1S_2$的坐标分别为$(c^2, c^3+dc^3)$，$(c^2+dc^2, c^3+dc^3)$，$(c^2+dc^2, c^3)$，该线束在$O$的立体角为 $d\Omega$。这时 $P_1Q_1R_1S_1$的面积是 $h^2h^3dc^2dc^3$，其中，(h^2h^3)是在 $T=T_1$求值，而$P_2Q_2R_2S_2$的面积 $h^2h^3dc^2dc^3$，其中，h^2h^3 是在 $T=T_2$求值。在这个意义上，h^2h^3 正比于由点源发射出的射线束的横截面面积。

如果坐标 c^2和 c^3不正交(一般非均匀介质就是这种情况)，则面积$P_1Q_1R_1S_1$和 $P_2Q_2R_2S_2$都不是矩形，而由$|(\partial \boldsymbol{x}/\partial c^2)\times(\partial \boldsymbol{x}/\partial c^3)|dc^2dc^3$给出。这些面积在任意给定的波阵面上仍正比于 $d\Omega$，我们用射线管在$\boldsymbol{x}$的横截面面积等于$\mathscr{R}^2(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\xi})d\Omega$，来定义几何扩散函数$\mathscr{R}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\xi})$

它与几何扩散相联系，在均匀介质中，它简单地等于 $1/|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\xi}|$。非均匀介质中的几何扩散因子具有重要的实际意义，因为它描述着射线的聚焦和散焦。所以我们引入以下特殊描述的新函数 $\mathscr{R}^P(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\xi})$：在立体角 $d\Omega$ 内由震源$\boldsymbol{\xi}$向外扩散的P波射线束，在与$\boldsymbol{x}$相重合的波阵面上，有面积 $[\mathscr{R}^P(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\xi})]^2d\Omega$。如果射线是直线，则 $\mathscr{R}^P(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\xi})=|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\xi}|$，但在比较一般的如图 4.11 所示弯曲射线的情况下，$\boldsymbol{x}$沿特定射线管变化，$\mathscr{R}^P(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\xi})\propto(h^2h^3)^{1/2}$。这里的

比例常数，可以只依赖于ξ和在ξ由(c^2,c^3)规定的射线方向。因为它仅仅是个标量因子，所以它可并入$\mathscr{F}^P$和U^1，以给出P波位移的几何射线解

$$\boldsymbol{u}^P(\boldsymbol{x},t)=\left(\frac{1}{\rho(\boldsymbol{x})\alpha(\boldsymbol{x})}\right)^{1/2}\frac{1}{\mathscr{R}^P(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi})}\mathscr{F}^P(c^2,c^3)(U^1(t-T^P(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi})),0,0), \tag{4.57}$$

这里也用上标表示走时，$T^P(\boldsymbol{x},\xi)=\int_{\xi}^{x}|ds|/\alpha$,积分(见(4.47))沿射线进行。在4.5节，我们将对任意取向的点剪切位错，直接求$\mathscr{F}^P(c^2,c^3)$和$U^1(t)$的值。

4.4.4 球对称介质中S波的几何解：SV和SH分量的引入

图4.10中的射线坐标,其走时T由剪切波速度$\beta(\boldsymbol{x})=\beta(r)$所定义，也适用于分析横向运动$\boldsymbol{u}=(0,\ u^2,\ u^3)$。利用前面的假定(ii)和(iii)，以及2.6节的应力-应变和应变-位移公式，我们发现，除剪切应力

$$\tau^{12}=\frac{\mu}{\beta}\frac{\partial u^2}{\partial T},\quad \tau^{31}=\frac{\mu}{\beta}\frac{\partial u^3}{\partial T}$$

外，所有应力分量都可忽略不计。这两个剪切应力可代入$\ddot{u}^2$和$\ddot{u}^3$的方程（见(2.48)），并利用类似于推导(4.55)的步骤，于是得到

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}[(\rho\beta h^2h^3)^{1/2}u^2]=\frac{\partial^2}{\partial T^2}[(\rho\beta h^2h^3)^{1/2}u^2], \tag{4.58}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}[(\rho\beta h^2h^3)^{1/2}u^3]=\frac{\partial^2}{\partial T^2}[(\rho\beta h^2h^3)^{1/2}u^3]. \tag{4.59}$$

这些又是已知其一般解的一维波动方程；方程(4.58)和(4.59)还告诉我们，u^2和u^3独立地传播。参考图4.10，我们看到，u^3是在$\boldsymbol{x}$处的水平向运动，因此把它叫做SH分量。u^2运动也沿射线的横向，但是是在竖直面内，因此把它叫做SV分量。注意，SV分量并非必须在竖直方向。

球对称介质中S波的几何解，现在可以写为

$$\boldsymbol{u}^{SV}(\boldsymbol{x},t)=\left(\frac{1}{\rho(\boldsymbol{x})\beta(\boldsymbol{x})}\right)^{1/2}\frac{1}{\mathscr{R}^{S}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi})}\mathscr{F}^{SV}(p,\phi)$$
$$\times(0,U^{2}(t-T^{S}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\zeta})),0) \qquad (4.60)$$

和

$$\boldsymbol{u}^{SH}(\boldsymbol{x},t)=\left(\frac{1}{\rho(\boldsymbol{x})\beta(\boldsymbol{x})}\right)^{1/2}\frac{1}{\mathscr{R}^{S}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi})}\mathscr{F}^{SH}(p,\phi)$$
$$\times(0,0,U^{3}(t-T^{S}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi}))). \qquad (4.61)$$

虽然辐射图案 $\mathscr{F}^{SV}$ 和 $\mathscr{F}^{SH}$ 可以不同，但 S 波的两种分量具有一样的几何扩散因子 $\mathscr{R}^{S}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi})$，和一样的走时函数 T^{S}。一般说，脉冲形状 U^2 和 U^3 可能是不同的，虽然我们将在下节看到，对于由点剪切位错发出的远场 S 波，它们是一样的。SV 和 SH 运动的相对大小，叫做 S 波的偏振，它沿给定的射线不发生改变，在解释体波地震图时，这是个非常重要的性质。

4.4.5 一般非均匀介质中的几何射线解

现代地震学的精度明显地指出下述事实，即地球的内部结构不是十分球对称的。因此，表面源的体波走时曲线（时间随地面上距离而变化的图）表现出不同地区的系统差别。在比如 Julian 和 Sengupta(1973)做的研究中，约达 0.2 秒(总走时达到几分钟)的显著差别，被用来研究由于地幔深部的不均匀性所造成的偏离。对称性的一部分偏离是由于地球的扁率，但其校正现已了解得很清楚(Bullen, 1937; Dziewonski and Gilbert, 1976)。更引人兴趣的是由大规模横向变化的结构引起的效应，例如岩石层的下沉板块、地幔涌流、大陆边缘、以及形形色色的地壳不均匀性。关于体波，有些效应可利用在斜的（即不水平的）界面上的反射和折射来解释，但是，我们现在关心的是对于变化平滑的，即不存在结构间断的介质的射线理论。

如果放弃球对称假设，则主要困难是，一条给定的射线不再限制在一个平面内。在最坏的情况下，它可以绕圈，就像一个弄弯了的瓶钻。出人意外的是，对于球对称介质已经得到的结果

(4.57)，(4.60)，(4.61)，只需要很小的修改，就可以适用于一般情况。事实上，P 波的几何射线解 (4.57) 在一般各向同性介质中不变。关于 S 波，位移振幅仍然象 $1/[(\rho\beta)^{1/2}\mathscr{R}^S(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi})]$ 那样变化[参看(4.60)，(4.61)]，并且仍然是偏振沿射线路径不变的情形。因为不再可能求得在每个波阵面上都正交的坐标 (c^2，c^3)，所以我们刚叙述过的结果，需要不同的和更为复杂的证明方法。

对于 P 波，可以试一下初解

$$\boldsymbol{u}^P(\boldsymbol{x},t)=f(\boldsymbol{x})U(t-T(\boldsymbol{x}))\alpha\nabla T, \tag{4.62}$$

这是由 (4.50) 得到启示的。这里的 $\alpha\nabla T$ 是质点纵运动方向上的单位向量。我们把(4.62)代入非均匀各向同性介质的一般位移方程中，由(2.17)，(2.49)和(2.3)得到

$$\rho\frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2}=\frac{\partial}{\partial x_j}[\lambda\delta_{ij}u_{k,k}+\mu(u_{i,j}+u_{j,i})], \tag{4.63}$$

因为 $(\nabla T)^2=\frac{1}{\alpha^2}$，所以 $\ddot{U}$ 阶的项都消失，如果要求 $\dot{U}$ 阶的项也都为零，就得到 P 波振幅 $f(\boldsymbol{x})$ 的方程。取与 ∇T 的标量乘积 (参看(4.49))，进行下列形式的某种处理后就得到结果

$$(\lambda+2\mu)[2\nabla T\nabla(\alpha f)+2\alpha^3 fT_{,k}T_{,ik}T_{,i}+\alpha f\nabla^2 T]$$
$$+\alpha f\nabla(\lambda+2\mu)\nabla T=0. \tag{4.64}$$

这些项中的大多数，可直接变换到对于沿射线的距离 S 的空间微商，因为 $\alpha\left(\frac{\partial T}{\partial x_i}\right)\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)=\frac{\partial}{\partial S}$。例如，

$$T_{,k}T_{,ik}T_{,i}=\frac{\partial T}{\partial x_k}\frac{1}{\alpha}\frac{\partial}{\partial s}\frac{\partial T}{\partial x_k}=\frac{1}{2\alpha}\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{\partial T}{\partial x_k}\frac{\partial T}{\partial x_k}\right)$$
$$=\frac{1}{2\alpha}\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{1}{\alpha^2}\right).$$

几何扩散效应在(4.64)中用 $\nabla^2 T$ 表示。它是 ∇T 的散度，利用在 $T\pm\frac{1}{2}\delta T$，$c^2\pm\frac{1}{2}\delta c^2$，$c^3\pm\frac{1}{2}\delta c^3$ 有棱角的体积元，我们看到，

只对于具有面积 $\mathscr{R}^2(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi})\,d\Omega$ 的侧面，∇T 向体外的通量才不为零。(参看图 4.11 及其说明。) 根据散度的基本定义(每单位体积的通量)，得出

$$\nabla^2 T=\frac{1}{\mathscr{R}^2(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi})\,d\Omega\,\alpha\delta T}\frac{\partial}{\partial T}\left(\frac{\mathscr{R}^2(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi})\,d\Omega}{\alpha}\right)\delta T$$

$$=\frac{1}{\mathscr{R}^2}\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{\mathscr{R}^2}{\alpha}\right), \qquad (4.65)$$

而(4.64)简化为

$$\frac{1}{f}\frac{\partial f}{\partial s}+\frac{1}{2\rho}\frac{\partial \rho}{\partial s}+\frac{1}{2\alpha}\frac{\partial \alpha}{\partial s}+\frac{1}{\mathscr{R}}\frac{\partial \mathscr{R}}{\partial s}=0. \qquad (4.66)$$

对此进行积分，给出 $f(\boldsymbol{x})\propto 1/[(\rho(\boldsymbol{x})\alpha(\boldsymbol{x}))^{1/2}\mathscr{R}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi})]$，比例常数依赖于特定的射线，即依赖于$(c^2,c^3)$。所以，初解(4.62)导致与我们在 (4.57) 对球对称介质所得到的完全相同的 P 波几何解。

对于 S 波，我们由(4.51)知道，质点位移一般说仍沿射线的横向，但现在有个现象不能根据研究均匀或球对称介质的经验给以定量表示。这个现象就是，随着波阵面的传播，质点运动方向可以绕射线旋转。

我们给出关于 S 波的初解是

$$\boldsymbol{u}^S(\boldsymbol{x},t)=f(\boldsymbol{x})U(t-T(\boldsymbol{x}))\boldsymbol{\nu}(\boldsymbol{x}), \qquad (4.67)$$

式中 $f(\boldsymbol{x})$是振幅，$U(t)$ 是脉冲形状，单位向量 $\boldsymbol{\nu}$ 是质点运动方向，即 $\boldsymbol{\nu}\cdot\nabla T=0$。进而把初解代入位移方程 (4.63)，但这次是构成同 ∇T 的向量乘积。依照 $(\nabla T)^2=1/\beta^2$的性质，最大的 $\ddot{U}$ 项消失，要求 $\dot{U}$ 项为零，则得到

$$\mu[2(\nabla f\times\nabla T)\boldsymbol{\nu}\times\nabla T+2f((\nabla T\times\nabla)\boldsymbol{\nu})\times\nabla T$$
$$+f(\nabla^2 T)\boldsymbol{\nu}\times\nabla T]+f(\nabla\mu\times\nabla T)\boldsymbol{\nu}\times\nabla T=0. \qquad (4.68)$$

利用 $\beta\left(\frac{\partial T}{\partial x_i}\right)\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)=\frac{\partial}{\partial s}$可以将求导变为对沿射线距离 s 进行求导，还可以利用 $\nabla^2 T=\left(\frac{1}{\mathscr{R}}\right)\left(\frac{\partial}{\partial s}\right)\left(\frac{\mathscr{R}^2}{\beta}\right)$，其中 $\mathscr{R}$ 是 S 波的几何

扩散因子[参看(4.65)]，则(4.68)变为

$$\left(\frac{1}{f}\frac{\partial f}{\partial s}+\frac{1}{2\rho}\frac{\partial \rho}{\partial s}+\frac{1}{2\beta}\frac{\partial\beta}{\partial s}+\frac{1}{\mathscr{R}}\frac{\partial\mathscr{R}}{\partial s}\right)(\boldsymbol{\nu}\times\nabla T)+\left(\frac{\partial\boldsymbol{\nu}}{\partial s}\times\nabla T\right)=0. \tag{4.69}$$

但是，这里的两个矢量$\boldsymbol{\nu}\times\nabla T$和$\frac{\partial\boldsymbol{\nu}}{\partial s}\times\nabla T$是正交的。(这是由$\nabla T$，$\boldsymbol{\nu}$和$\boldsymbol{\nu}\times\nabla T$的互相正交得到的；根据$0=\frac{\partial}{\partial s}(\boldsymbol{\nu}\cdot\boldsymbol{\nu})=2\boldsymbol{\nu}\cdot\frac{\partial\boldsymbol{\nu}}{\partial s}$，所以$\frac{\partial\boldsymbol{\nu}}{\partial s}$位于$\nabla T$同$\boldsymbol{\nu}\times\nabla T$构成的平面内。）因此，振幅函数$f$由

$$\frac{1}{f}\frac{\partial f}{\partial s}+\frac{1}{2\rho}\frac{\partial\rho}{\partial s}+\frac{1}{2\beta}\frac{\partial\beta}{\partial s}+\frac{1}{\mathscr{R}}\frac{\partial\mathscr{R}}{\partial s}=0 \tag{4.70}$$

来约束，并且还有

$$\partial\boldsymbol{\nu}/\partial s\times\nabla T=0, \tag{4.71}$$

这意味着$\frac{\partial\boldsymbol{\nu}}{\partial s}$一定沿纵向$\nabla T$。

由(4.70)看到，$f(\boldsymbol{x})\propto 1/[(\rho(\boldsymbol{x})\beta(\boldsymbol{x}))^{1/2}\mathscr{R}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi})]$. 这个振幅恰恰具有对于球对称介质中的$SV$和$SH$两个分量所发现的性质[参看(4.60)和(4.61)]。

根据(4.71)，我们可以证明，即使在一般非均匀介质中，S波在射线的不同点上保持相同的偏振。此效应可以用与射线上每点相联系的内在单位向量系统来分析。它们是单位切线$\boldsymbol{l}=\beta\nabla T$，单位法线$\boldsymbol{n}=(d\boldsymbol{l}/ds)/|d\boldsymbol{l}/ds|$和单位副法线$\boldsymbol{b}=\boldsymbol{l}\times\boldsymbol{n}$。射线的局部曲率$\kappa(s)$是方向改变趋势的量度，并简单地等于$|d\boldsymbol{l}/ds|$。注意这个垂直于$\boldsymbol{l}$的方向变化同$\boldsymbol{n}$的关系为

$$\frac{d\boldsymbol{l}}{ds}=\kappa(s)\boldsymbol{n}. \tag{4.72}$$

对射线上的每一点，向量$\boldsymbol{l}$和$\boldsymbol{n}$决定着一个平面，叫做密切面（参看图4.12)，在射线被局限于一个面内的情况下（例如在球对称的地球中的射线），该面与射线平面一致。在比较一般的

情况下，密切面（它垂直于 $\boldsymbol{b}$）沿射线面改变方向，微商 $d\boldsymbol{b}/ds$ 给出射线"扭转"出密切面的趋势的量度。

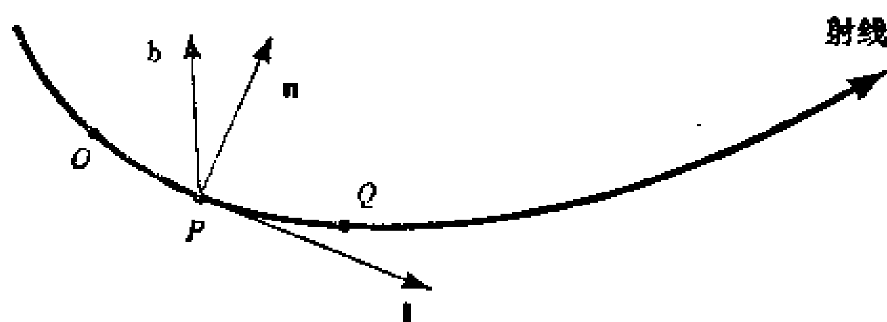


图 4.12

在 P 点上三个互相正交的单位向量系统，它们是一个扭转射线所固有的几何性质：$\boldsymbol{l}$ 沿着射线；$\boldsymbol{n}$ 垂直于射线并位于射线正在其中改变方向（$d\boldsymbol{l}/ds$）的平面内。（这是密切面，其定义是 O 和 Q 趋近于 P 时，包含弯曲射线上 O，P，Q 点的极限平面。）单位副法线 $\boldsymbol{b}$ 的取法是使（$\boldsymbol{l}$，$\boldsymbol{n}$，$\boldsymbol{b}$）符合右手定则。如果射线并不扭转，只是在一平面内弯曲，则 $\boldsymbol{b}$ 垂直于该平面

写出 $d\boldsymbol{b}/ds=c_1\boldsymbol{l}+c_2\boldsymbol{n}+c_3\boldsymbol{b}$，很容易证明，因为 $\boldsymbol{b}$ 的长度不变，有 $c_3=0$，根据 $\boldsymbol{b}$ 和 $\boldsymbol{n}$ 的定义，有 $c_1=0$。所以，$d\boldsymbol{b}/ds$ 是在 $\boldsymbol{n}$ 方向上，射线的局部扭转或第二曲率 T，定义为

$$d\boldsymbol{b}/ds=-T\boldsymbol{n}. \tag{4.73}$$

这个方程意味着，$(\boldsymbol{n},\boldsymbol{b})$ 轴按右手方式以每单位距离转 T 的速率绕射线旋转。

因为 $\boldsymbol{n}=\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{l}$，所以

$$d\boldsymbol{n}/ds=-k\boldsymbol{l}+T\boldsymbol{b}. \tag{4.74}$$

方程(4.72)—(4.74) 叫做 Frénet 公式。我们现在转到研究横运动在传播中如何改变方向的问题。

假定在沿射线的距离 s 处，S 波运动的横向 $\boldsymbol{\nu}$ 与该处法线构成角 γ：

$$\boldsymbol{\nu}=\cos\gamma\,\boldsymbol{n}+\sin\gamma\,\boldsymbol{b}. \tag{4.75}$$

由(4.73)与(4.74)，则有

$$\frac{\partial \boldsymbol{\nu}}{\partial s}=-\kappa \cos \gamma-\left(\frac{d \gamma}{d s}+T\right)(\sin \gamma \boldsymbol{n}-\cos \gamma \boldsymbol{b}). \tag{4.76}$$

但我们已从(4.71)得出结论，$\partial \boldsymbol{\nu}/\partial s$ 沿着 ∇T 即沿 $\boldsymbol{l}$ 的方向，因此，(4.76)意味着

$$\frac{d\gamma}{ds}=-T. \tag{4.77}$$

这说明，相对于$(\boldsymbol{n},\boldsymbol{b})$方向的 S 波运动 $\boldsymbol{u}^S$ 绕射线旋转的速率，与这些轴本身旋转的速率正好一样，都等于T[见(4.73)]，但方向相反。由于这种相互抵消，才可以说 S 波保持其偏振。实际上，S 波速率的空间梯度确实经常变化（在竖直和水平两个方向上），以致需要用三维射线追踪来分析由特定点源来的走时和辐射图案。[这牵涉到射线轨迹空间方程(4.44)的数值解。但是，由于上面描述过的两个相互抵消的效应(4.73)和(4.77)，也许在平滑变化的结构中传播时，偏振（现在表示为SH/SV 比值）真的没有什么改变。这个问题还没有研究透彻。]

这些结果总括了射线理论的现状。在第五章，我们将把这些结果同射线管中的能量守恒联系起来；在第九章，将发展球对称介质中射线的进一步性质（发现对于 $\mathscr{R}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi})=0$ 的焦散区和对于阴影区，本节的结果必须进行修改）；在第十三章，将说明如何用三维射线追踪，解释地球中横向变化结构的影响。

本节的方法已被 V. M. Babich, J. B. Keller 以及他们的同事，利用象

$$\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},\omega)=\exp(i\omega T)\sum_{n=0}^{\infty}\boldsymbol{A}_n(\boldsymbol{x})(i\omega)^{-n} \tag{4.78}$$

这样的尝试解，向前大大推进了一步。

可以求出 A_n 间的递推公式，这就有可能在无穷级数中，算出所要求的任意多的项（Karal and Keller, 1959)。我们前面的工作是对于 A_0 的，它在足够高的频率上占优势。有时 A_1是有用

的（例如，若存在物质边界，并且源点与接收点间的几何关系允许有首波，则它们占优势的影响就包括在 A_1 内）。在比较一般的情况下可以说，如果只有 A_0 还不够，则必须取级数（4.78）中更多的项（这是不实际的），或用一个不同形式的尝试解。[在时间域，（4.78）中的 A_n 对于正比于 $(t-T(x))^{n-1}$ 的项加权，于是此解离开波阵面而就垮掉了；参看 Okal and Mechler, 1973]。

4.5 球对称介质中任意取向的点剪切位错的远场体波辐射图案

这个课题的透彻理解，在发现和测量许多岩石层板块的运动中，已经起了重要的作用（Sykes, 1967, Isacks, Oliver and Sykes, 1968）。对于一个给定的地震，一旦确认了这种辐射图案，并得到了它的空间取向，它便给出有关引起该地震发生的应力状态的信息。

我们在 4.3 节已经描述了震源坐标中的辐射图案（参看图 4.5b 和图 4.6b）。对于 P 波，有两个节面。它们正交，其中一个是断层面。但是，在弄清发震断层的空间取向和该断层上的滑动方向之后，这个震源坐标系才能利用。断层的空间取向由走向和倾角决定，然后用倾伏角（rake）或俯角（plunge）来规定滑动方向（图 4.13）。一个断层有两个表面，图中的这一个是下盘，另一个叫做上盘。用滑动 $\bar{u}$ 作为上盘相对于下盘的运动方向。倾伏角 λ 是走向同滑动之间的夹角：$-\pi<\lambda\leqslant\pi$。如果倾角 δ 既不是零，也不是 $\pi/2$，并且 λ 是在 $(0,\pi)$ 区间内，则断层叫做逆断层或冲断层。但如果 λ 是在 $(-\pi,0)$ 区间内，则断层叫做正断层。

有些作者不用倾伏角（它在断层面内进行测量），而用在竖直面内进行测量的俯角。测出由水平方向往下到 $\bar{u}$ 方向的俯角之后，我们看出，俯角的正弦等于 $-\sin\lambda\sin\delta$。

对于走向滑动断层，$\delta=\frac{\pi}{2}$，并且 $\lambda=0$ 或 π，这时上盘和下盘的选取是任意的，走向有两个可能的选择。但有益的是建立一个约定，使得只由 λ 值就可立即辨别右旋和左旋走滑断层（右旋断层是站在一盘上的观测者看到另一盘的运动是向右的）。我们的约定是，在两个可能的走向中采用一个，并把右边的一盘（观测者沿着走向看）标为上盘。这决定着断层的两个表面中，哪一个被用来确定 λ，显然 $\lambda=0$ 是左旋走滑断层，而 $\lambda=\pi$ 是右旋的。

对于倾滑断层，$\delta=\frac{\pi}{2}$，但 $\lambda=\frac{\pi}{2}$或$-\frac{\pi}{2}$。走向也是两义的。我们把下降的一盘作为下盘，走向的选取仍是使上盘在右边。所以，倾滑断层总是 $\lambda=\frac{\pi}{2}$。

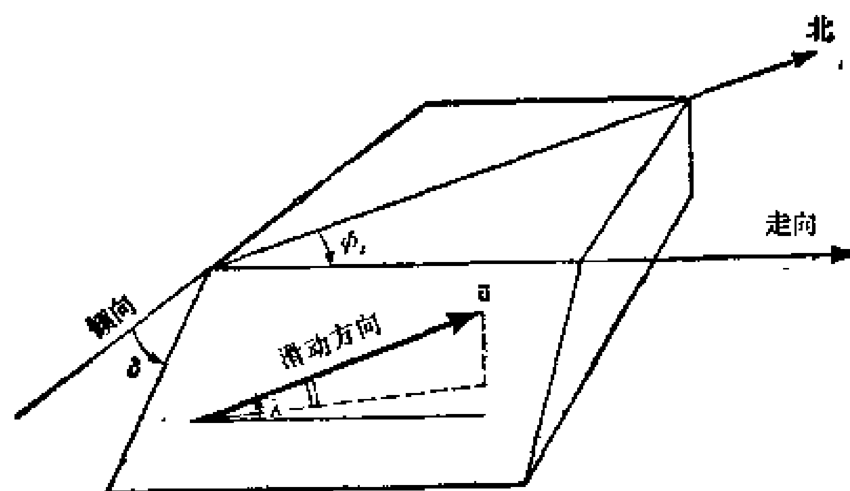


图 4.13
断层的空间取向参数（走向 ϕ_s，倾角 δ）和滑动方向的定义。ϕ_s的测量是从北开始顺时针转动，断层向走向的右边下倾：$0\leqslant\phi_s<2\pi$。δ 的测量是从水平方向往下：$0\leqslant\delta\leqslant\frac{\pi}{2}$

在本节，我们引入震源球（见图 4.14）作为在其上描述辐射图案的面，并指明如何根据全球的远场体波观测得到节面。然后我们通过导出专门公式，增强这个描述方法，把P，SV和SH

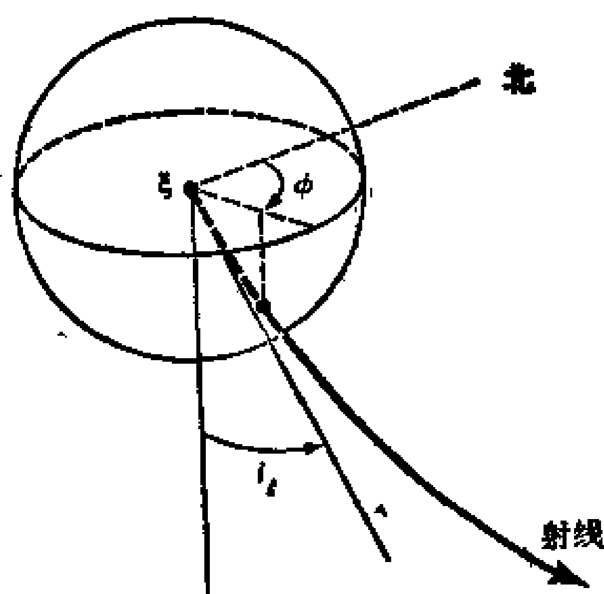


图 4.14

地震点源的震源球，是以震源为中心并有任意小的半径的球。它是展示辐射图案的方便工具，因为（分布在地球表面的）地震仪记录到的信息，可以变换到震源球上去；这涉及到由接收点向震源往回追踪射线，并且看看它在何处与震源球相交。也就是说，现在用以震源为中心的球极坐标系中所用的射线角坐标(i_ξ，ϕ)，可以指定震源球上的一个点。($i_\xi=0$ 是竖直向下；ϕ 是自北转动的方位。震源球的半径这时无关紧要，通常取单位长度)。例如，图 4.5 b 和图 4.6 b 的辐射图案，就是在震源球上表示的图案。

因为震源球位于源的近场内，所以，画在震源球上的远场辐射图案能否直接表示实际发生在震源区的位移这一点是不明显的。但是，对于在与平均质点速度相同方向上有最终错距的剪切位错，不出现这种混乱。这是由于，远场辐射图案（在（4.32）和（4.33）中的 A^{FP}和 A^{FS} 项）这时与在到震源的所有距离上（尤其是在震源球上）的静位移辐射图案（4.34）相同

波的辐射图案作为一般走向，倾角和倾伏角的函数，和作为从震源至接收点的射线参数 p 和方位 ϕ 的函数。为了精确估计地震矩 M_0(根据体波)，这些公式是需要的。

4.5.1 利用远台体波观测求地震断层震空间取向和滑动方向的方法

对于体波，剪切位错的辐射图案的特征是象限分布（见图 4.5）。研究这个效应，最普通的是用P波位移初动。对于一个给

定的接收点，纵向质点运动是指向或背离震源：地震仪接收到的初至波常常提供地动位移记录中最明白和最易解释的部分。用图4.14中定义的震源球，可以很方便地了解辐射图案。因此，对于一个给定的在 x 的 P 波观测，我们把射线追踪回到在 ξ 的震源，把在 x 得到的信息变换到震源球上的相应点［即坐标为 (i_ξ, ϕ) 的点］。

为了说明这种绘图方法能造成的畸变，在图 4.15 中表示出，

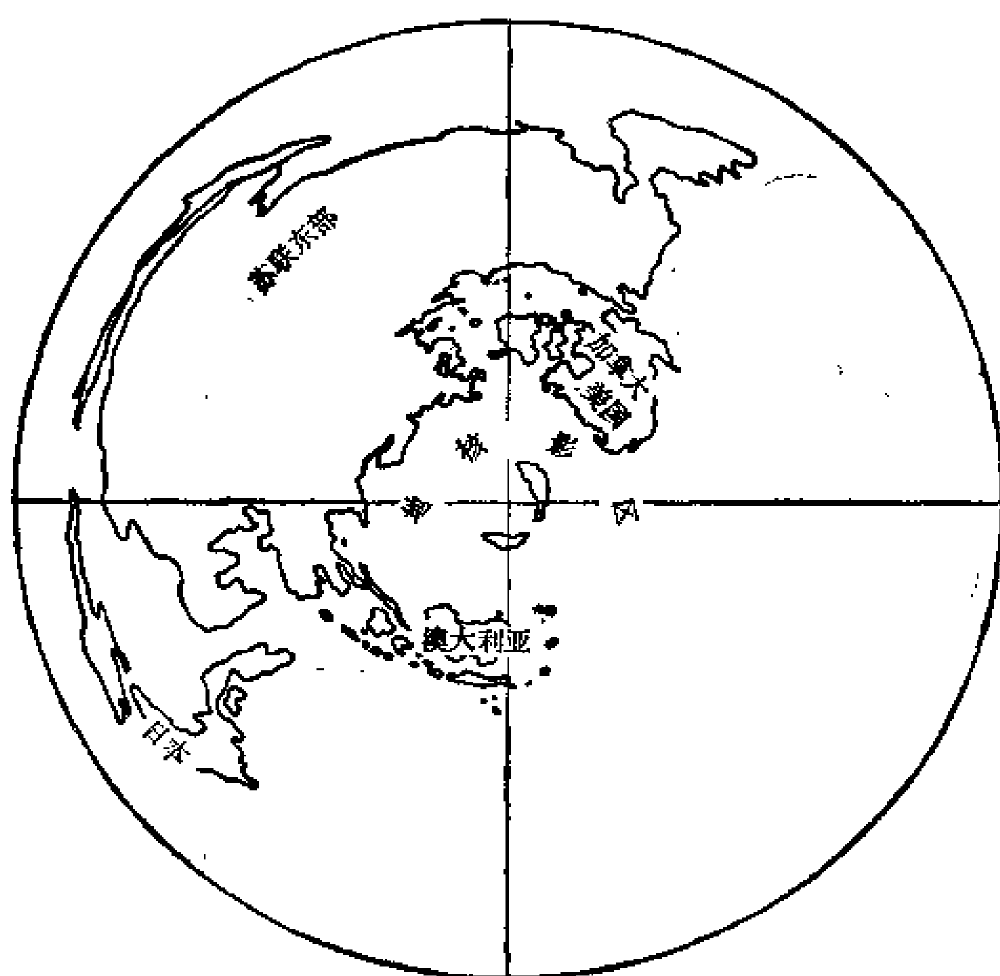


图 4.15

在等面积投影中，对于库页岛下的一点（43°26′N，147°03′E，深度 42 公里）所绘的震源球。为地震学的目的，苏联东部能够比所有其它大陆地区的总和提供更多的信息。太平洋中缺少大陆覆盖，使得很难得到断层面解（引自 Davies and Mckenzie, *Geophysical Journal*, v. 18, p. 60, 1969）

在以库页岛（北太平洋的一部分）下42公里的某一点为中心的震源球下半球上，P波射线绘出的主要大陆的轮廓。由于P波速度在整个地幔中随深度增加（在为得到这个图所用的地球模型中），在把地球表面绘制到震源球上时，发生很大的面积畸变。

注意，为了在平面上（如书页上）表现出震源球，需要另外的画法。最常用的是球极平面投影（见图4.16）和天顶等面积投影（有时叫做 Schmidt-Lambert 等面积投影，见图 4.17）。

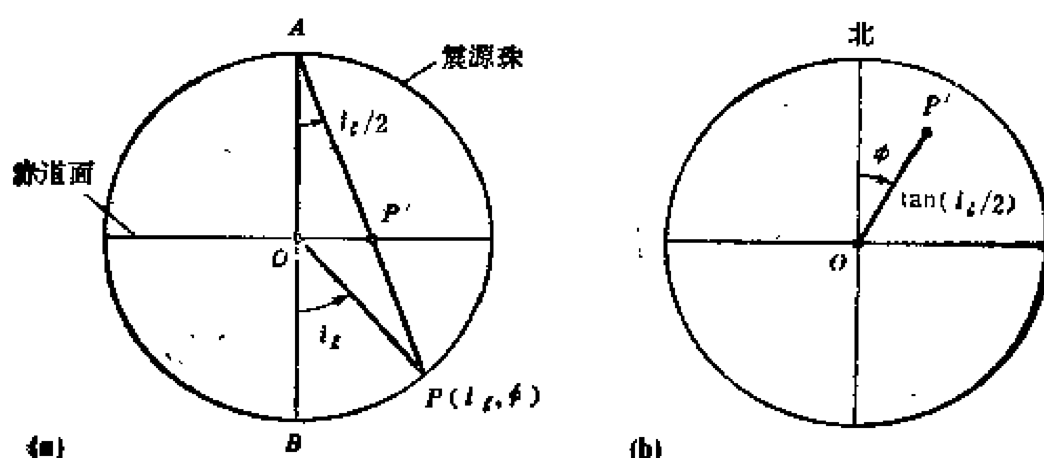


图 4.16

震源球的球极平面投影把P点画到震源球赤道面上的P'点。(a) 这里表示出的是通过震源球中心和P点的竖直面。(b) 在(a)的顶端看到的水平面平视图。这是个投影平面，P'至O点的距离是$\tan\frac{i_\xi}{2}$。该图给出的只是震源球下半球的投影，但从B而不是从A作投影，震源球的上半球也能在单位圆之内绘出。

因为这种投影保持角度不变，在位置P'的所有方向上，比例尺在局部是一样的。然而，在P的这个比例尺比例于$\sec^2\frac{i_\xi}{2}$，所以在P的面元变到在P'的面元时乘以比例因子$\sec^4\frac{i_\xi}{2}$这非常不便，因为它对于震源球上不靠近A和B的点给出的面积，放大得很多。出现在(b)中的这个效应，主要是与向下走的射线有关的面积，相对受到压缩。

球极平面投影的使用与 Wulff 网相联系。该网提供在(b)中画出各个可能的曲线的模板，这些曲线在(a)中代表震源球与任意空间取向的断层面的交线

由P波初动求断层面解的过程，包括(a)在震源球上标明与有资料的P波射线相应的特定位置，用不同符号注明压缩到达波和膨胀到达波，(b)用两个互相垂直的大圆弧分割震源球，使每个象限具有皆为压缩或皆为膨胀的波。图 4.18 中给出一个例子。

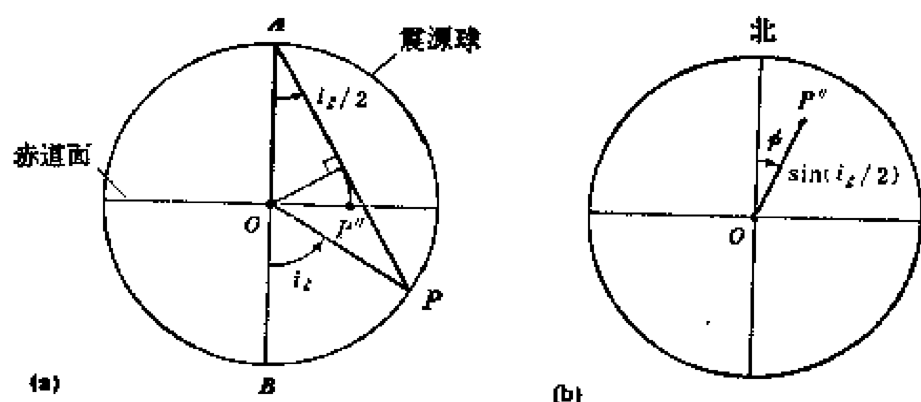


图 4.17

震源球的天顶等面积投影把P点画到P''点。方位角ϕ不变（这是所有天顶投影的性质），但距离是$OP''=\sin\frac{i_t}{2}$。(a)过震源球中心和P点的竖直面。(b)在(a)的顶端看到的水平面平视图。如果把在P的面积元画到在P''的面积元，则它的新面积为

$$\sin\frac{i_t}{2}d\phi\left[\sin\frac{1}{2}\left(i_t+di_t\right)-\sin\frac{i_t}{2}\right]=\frac{1}{4}\sin i_t di_t d\phi,$$

即以常因子$\frac{1}{4}$减小。整个震源球(面积4π)画为一个单位圆(面积π)，但习惯上把上半球$\left(\text{从}B\text{做投影，即利用}\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{i_t}{2}\right)\right)$同下半球分开画，以避免上半球的很大畸变，否则这种畸变就会发生。此外，需要有一套模板在(b)中画出可能的断层面位置。等角度投影和等面积投影间的差别，在图 4.5 b 和图 4.6 b 中是很明显的，这两个图以不同方法表示出断层面和辅助面(对同一个震源机制)

有两个要点需要注意。第一是，在选择两个节面中哪一个是断层面时，不能确定。在 3.2 节，从双力偶体力等效中 (3.15) 两个分量的对称性，早已预料到这个困难。对于图 4.18 所示的地震，看到的地面破坏的走向，同两节面之一的走向只差 8°，

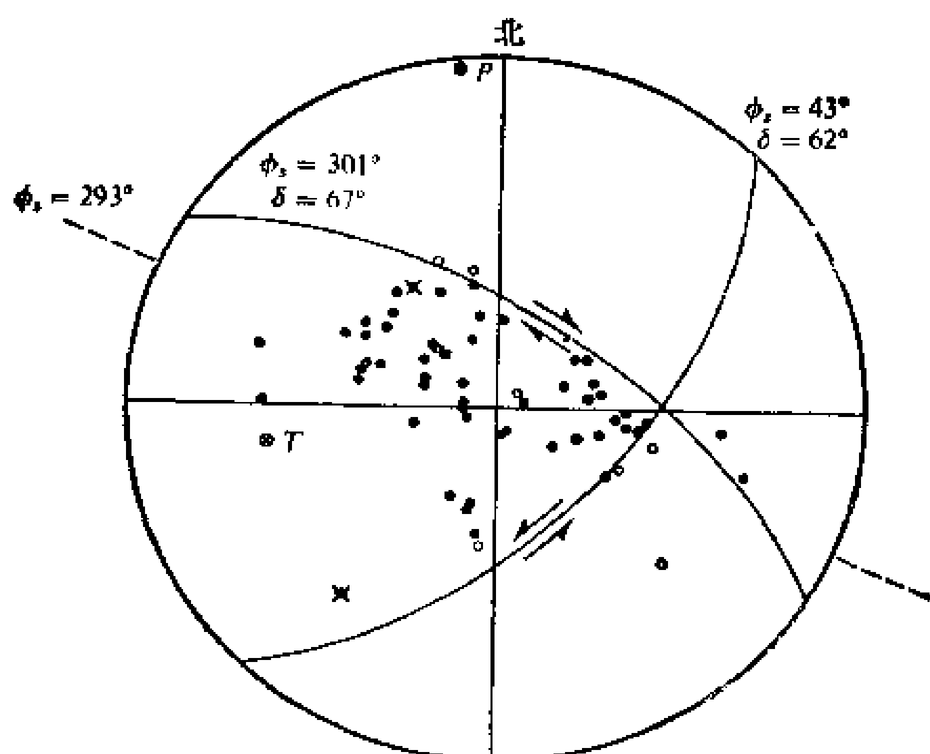


图 4.18

Mckenzie 得到的1966年8月19日土耳其东部地震的P波初动，该图为震源球下半球的等面积投影。实心圆代表压缩波，空心圆代表膨胀波；十指靠近节面的台站。ϕ_s和δ是节面的走向和倾角，箭头指示运动方向。虚线表示伴随地震的主要右旋地表破裂的走向（引自 Mckenzie, *Bulletin of the Seismological Society of America*, v. 59, p. 593, 1969）

因此，可以放心地选择$\phi_s=301°$，$\delta=67°$。第二是，所谓压应力轴，位于膨胀波象限的中心，而张应力轴则位于压缩波象限的中心。这些是矩张量的主轴，如果断层面是最大剪切面，则它们也是主应力轴。但是，一个给定地震的断层面，是由往回追溯到地质时期的构造过程造成的。不是最大剪切应力而，而常常是断层而在一次给定的地震中重新活动。在这些方面，Mckenzie(1969)指出，关于最大压应力方向的唯一限制是，它处于震源球的膨胀波象限内。

S波辐射图案的利用，要比P波花费大得多的力气，因为在每个接收台站上，必须使用多于一个的仪器，才能得到偏振；并

且必须校正在地球自由表面的观测效应。图 4.19 的例子中表示出主要特征：质点运动从压应力轴散发，在张应力轴收敛；并且与 P 波节线垂直。

一旦确定出走向，倾角和倾伏角，就能够建立图 4.5 和图 4.6 中用的球极（震源）坐标系，来详细分析辐射图案中的振幅变化。但是利用 i_ξ 和 ϕ（图 4.10 和图 4.14），我们已经有了在源点的球极角度系。而且，这些是要用的天然的源坐标，因为我们知道把它们也作为 SV 和 SH 波的射线坐标时的性质（见 4.4 节）。因此，我们的下一个目标是，求出作为 i_ξ 和 ϕ 的函数，并且也作为一般走向，倾角和倾伏角的函数的 P，SV 和 SH 的辐射图案。

为达到这个目标，可分为两个不同的阶段。第一，对于均匀介质中的源，鉴别远场 P，SV 和 SH 问题。第二，使这个结果适合于象地球这样的球对称介质情况。

4.5.2 均匀介质中双力偶的任意空间取向

根据（4.30）中对于相应剪切位错的张量 M_{pq} 的有效点源所给的位移笛卡尔分量，我们可以证明向量形式的远场 P 波为

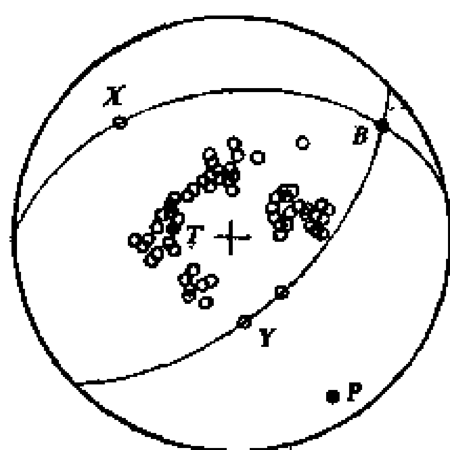
$$\boldsymbol{u}^P(\boldsymbol{x},t)=\frac{2(\boldsymbol{\gamma}\cdot\boldsymbol{\nu})(\boldsymbol{\gamma}\cdot\dot{\bar{\boldsymbol{u}}})\mu A\boldsymbol{\gamma}}{4\pi\rho\alpha^3 r}. \tag{4.79}$$

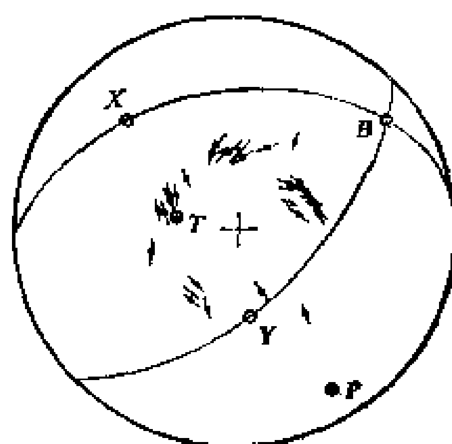
这里 $\boldsymbol{\gamma}$ 是从 ξ 处的源点到 $\boldsymbol{x}$ 处的接收点的纵方向；$\boldsymbol{\nu}$ 是断层法线；$\dot{\bar{\boldsymbol{u}}}$ 是源点的质点速度在断层面面积 A 上取平均并在推迟时间 $t-r/\alpha$ 求出的值；r 是距离 $|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\xi}|$。远场 S 波的相应结果为

$$\boldsymbol{u}^S(\boldsymbol{x},t)=\frac{[(\boldsymbol{\gamma}\cdot\boldsymbol{\nu})\dot{\bar{\boldsymbol{u}}}+(\boldsymbol{\gamma}\cdot\dot{\bar{\boldsymbol{u}}})\boldsymbol{\nu}-2(\boldsymbol{\gamma}\cdot\boldsymbol{\nu})(\boldsymbol{\gamma}\cdot\dot{\bar{\boldsymbol{u}}})\boldsymbol{\gamma}]\mu A}{4\pi\rho\beta^3 r}, \tag{4.80}$$

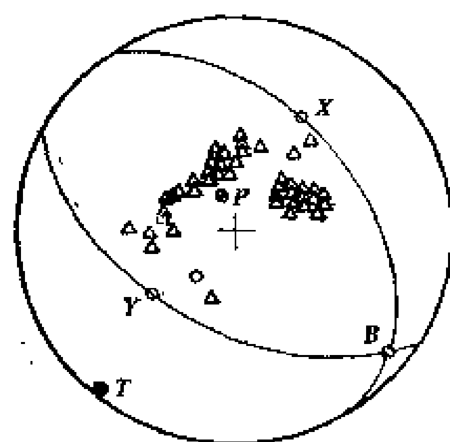
其中 $\dot{\bar{\boldsymbol{u}}}$ 在 $t-r/\beta$ 求值。

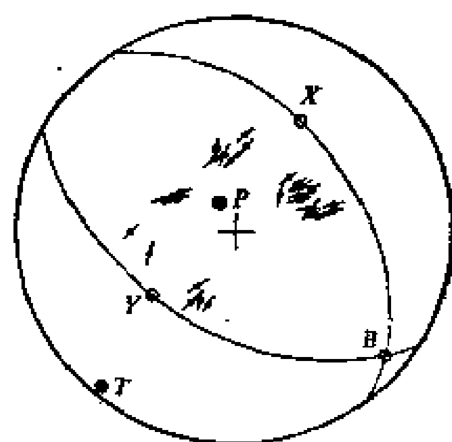
因为 $\boldsymbol{\gamma}$ 是在源点沿射线指向 $\boldsymbol{x}$ 的单位向量，所以，求 P 波辐射图案的问题，简单地变为用走向 ϕ_s，倾角 δ，离源角 i_ξ 和源点一接收点方位 ϕ 来表示 $\boldsymbol{\gamma}\cdot\boldsymbol{\nu}$ 和 $\boldsymbol{\gamma}\cdot\dot{\bar{\boldsymbol{u}}}$。$SV$ 和 SH 的辐射图案



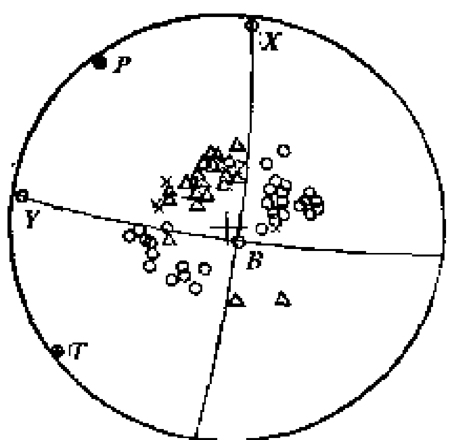


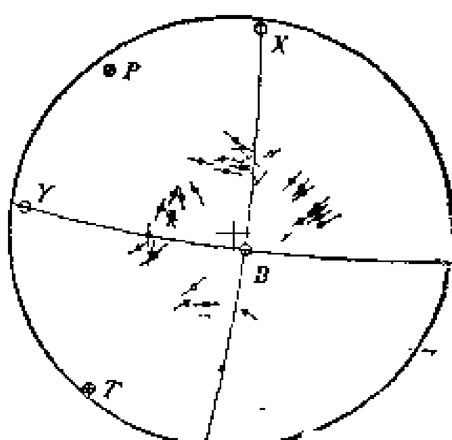
1966年 5月15日 14时46分06秒





1966年 6月 2日 03时27分53秒





1966年 7月 4日 18时33分36秒

图 4.19

用等面积投影表示出的单个震源机制图解。在P波图解（每对图中的左图）中，三角代表膨胀波初动，圆代表压缩波，叉代表出现在节面附近的P波。（这些波是由它们的出射特性鉴定的。）符号P，T，B是矩张量的轴，X和Y是节面的极（引自 Stauder,1968）

稍微复杂些，因为在（4.80）中分解为 SV 和 SH 并不是一看就清楚的。显然，这个公式确实指出 $\boldsymbol{u}^S$ 是横运动，因为 $\boldsymbol{u}^S\cdot\boldsymbol{\gamma}=0$。于是（分别）沿图 4.10 中 $\hat{\boldsymbol{p}}$ 和 $\hat{\boldsymbol{\phi}}$ 方向的 SV 和 SH 由

$$\boldsymbol{u}^{SV}(\boldsymbol{x},t)=(\boldsymbol{u}^S\cdot\hat{\boldsymbol{p}})\hat{\boldsymbol{p}}=\frac{[(\boldsymbol{\gamma}\cdot\boldsymbol{\nu})(\dot{\bar{\boldsymbol{u}}}\cdot\hat{\boldsymbol{p}})+(\boldsymbol{\gamma}\cdot\dot{\bar{\boldsymbol{u}}})(\boldsymbol{\nu}\cdot\hat{\boldsymbol{p}})]\mu A\hat{\boldsymbol{p}}}{4\pi\rho\beta^3 r} \tag{4.81}$$

和

$$\boldsymbol{u}^{SH}(\boldsymbol{x},t)=(\boldsymbol{u}^S\cdot\hat{\boldsymbol{\phi}})\hat{\boldsymbol{\phi}}=\frac{[(\boldsymbol{\gamma}\cdot\boldsymbol{\nu})(\dot{\bar{\boldsymbol{u}}}\cdot\hat{\boldsymbol{\phi}})+(\boldsymbol{\gamma}\cdot\dot{\bar{\boldsymbol{u}}})(\boldsymbol{\nu}\cdot\hat{\boldsymbol{\phi}})]\mu A\hat{\boldsymbol{\phi}}}{4\pi\rho\beta^3 r} \tag{4.82}$$

给出。(参看 Ben-Menahem 等，1965。)

为了用 $(\phi_s,\delta,\lambda,i_\xi,\phi)$ 得到所有三个辐射图案，我们引入震中的笛卡尔坐标方向 $\hat{\boldsymbol{x}}$，$\hat{\boldsymbol{y}}$，$\hat{\boldsymbol{z}}$。我们的选择是 $\hat{\boldsymbol{x}}=$北，$\hat{\boldsymbol{y}}=$东，$\hat{\boldsymbol{z}}=$竖直向下，如图 4.20 所示。用这三个单位向量，有

$$\begin{aligned}
\text{滑动 } \bar{\boldsymbol{u}}=&\bar{u}(\cos\lambda\cos\phi_s+\cos\delta\sin\lambda\sin\phi_s)\hat{\boldsymbol{x}}\\
&+\bar{u}(\cos\lambda\sin\phi_s-\cos\delta\sin\lambda\cos\phi_s)\hat{\boldsymbol{y}}\\
&-\bar{u}\sin\lambda\sin\delta\,\hat{\boldsymbol{z}},\\
\text{断层法线 } \boldsymbol{\nu}=&-\sin\delta\sin\phi_s\hat{\boldsymbol{x}}+\sin\delta\cos\phi_s\hat{\boldsymbol{y}}-\cos\delta\,\hat{\boldsymbol{z}},
\end{aligned} \tag{4.83}$$

$$\begin{aligned}
&P\text{ 波方向 } \boldsymbol{l}=\boldsymbol{\gamma}=\sin i_\xi\cos\phi\,\hat{\boldsymbol{x}}+\sin i_\xi\sin\phi\,\hat{\boldsymbol{y}}+\cos i_\xi\,\hat{\boldsymbol{z}},\\
&SV\text{ 波方向 } \hat{\boldsymbol{p}}=\cos i_\xi\cos\phi\,\hat{\boldsymbol{x}}+\cos i_\xi\sin\phi\,\hat{\boldsymbol{y}}-\sin i_\xi\hat{\boldsymbol{z}},\\
&SH\text{ 波方向 } \hat{\boldsymbol{\phi}}=-\sin\phi\,\hat{\boldsymbol{x}}+\cos\phi\hat{\boldsymbol{y}}.
\end{aligned}$$

这里要注意，给出的 $\boldsymbol{l}$，$\hat{\boldsymbol{p}}$，$\hat{\boldsymbol{\phi}}$ 同对于均匀介质给出的一样。

在辐射图案公式（4.79）、(4.81)、(4.82）中需要 6 个不同的标量乘积，由（4.83）可以很容易地得到它们。用无量纲形式，辐射图案 $\mathscr{F}^P$，$\mathscr{F}^{SV}$ 和 $\mathscr{F}^{SH}$ 由下列各式给出：

$$\begin{aligned}
\mathscr{F}^P=&2(\boldsymbol{\gamma}\cdot\boldsymbol{\nu})(\boldsymbol{\gamma}\cdot\dot{\bar{\boldsymbol{u}}})/\dot{\bar{u}}\\
=&\cos\lambda\sin\delta\sin^2 i_\xi\sin 2(\phi-\phi_s)\\
&-\cos\lambda\cos\delta\sin 2i_\xi\cos(\phi-\phi_s)
\end{aligned}$$

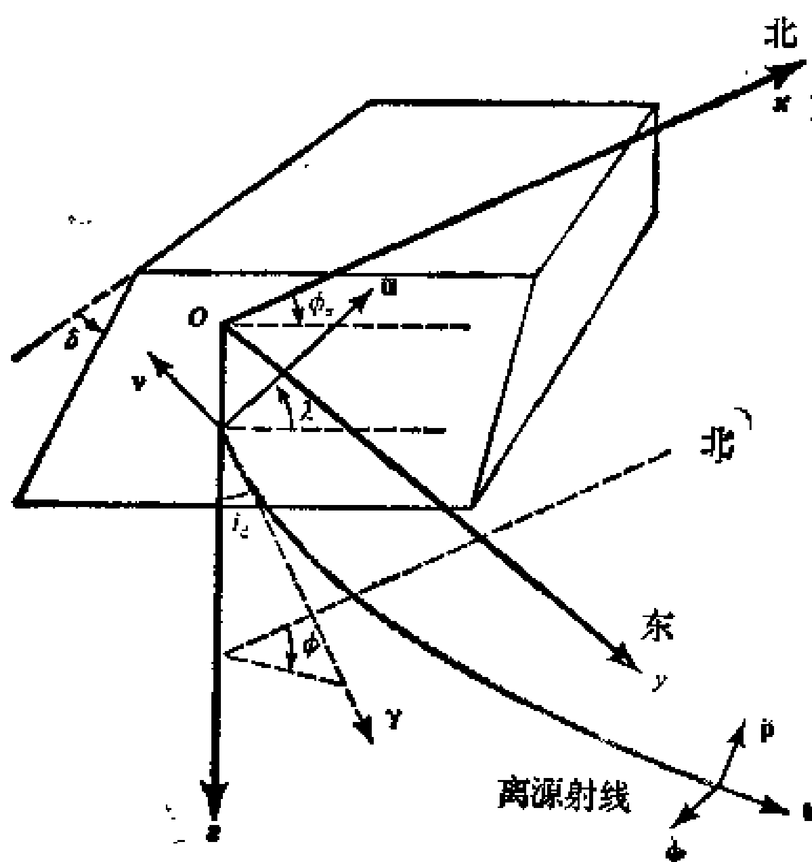


图 4.20

求 P，SV，SH 辐射图案与（ϕ_s，δ，λ，i_ξ，φ）的明确关系时所用的笛卡尔坐标（x，y，z）的定义。原点取在震中（震源正上方地面上的点）。该坐标系的优点是，遵从以 z 作为深度方向的惯例，自 x 轴测得的方位角 φ 遵从地理惯例。可以很容易地把 ū 的水平分量分解为 ū cos λ（沿走向）和 ū cos δ sin λ（沿负的倾向）。在正文（4.83）中给出的分量是向北（x）和向东（y）。这是一个给出矩张量分量的天然坐标系（见补充 4.4）。离源角 i_ξ 可以用射线参数 p 替换作为射线坐标。因为 l 沿射线的纵向，所以对于均匀介质有 l = γ

$$+\sin\lambda\sin 2\delta\times(\cos^2 i_\xi-\sin^2 i_\xi\sin^2(\phi-\phi_s))$$

$$+\sin\lambda\cos 2\delta\sin 2 i_\xi\sin(\phi-\phi_s), \qquad (4.84)$$

$$\mathscr{F}^{SV}=[(\gamma\cdot\nu)(\dot{u}\cdot\hat{p})+(\gamma\cdot\dot{u})(\nu\cdot\hat{p})]/\dot{\bar{u}}$$

$$=\sin\lambda\cos 2\delta\cos 2 i_\xi\sin(\phi-\phi_s)$$

$$-\cos\lambda\cos\delta\cos 2 i_\xi\cos(\phi-\phi_s)$$

$$+\frac{1}{2}\cos\lambda\sin\delta\sin 2 i_\xi\sin 2(\phi-\phi_s)$$

$$-\frac{1}{2}\sin\lambda\sin 2\delta\sin 2i_\xi(1+\sin^2(\phi-\phi_s)), \quad (4.85)$$

$$\begin{aligned}\mathscr{F}^{SH} &= [(\boldsymbol{\gamma}\cdot\boldsymbol{v})(\hat{\boldsymbol{u}}\cdot\hat{\boldsymbol{\phi}})+(\boldsymbol{\gamma}\cdot\hat{\boldsymbol{u}})(\boldsymbol{v}\cdot\hat{\boldsymbol{\phi}})]/\hat{\boldsymbol{u}} \\ &= \cos\lambda\cos\delta\cos i_\xi\sin(\phi-\phi_s) \\ &\quad+\cos\lambda\sin\delta\sin i_\xi\cos 2(\phi-\phi_s) \\ &\quad+\sin\lambda\cos 2\delta\cos i_\xi\cos(\phi-\phi_s) \\ &\quad-\frac{1}{2}\sin\lambda\sin 2\delta\sin i_\xi\sin 2(\phi-\phi_s). \end{aligned} \quad (4.86)$$

这时，相应的远场位移为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{u}^P(\boldsymbol{x},t) &= \frac{\mathscr{F}^P\mu A}{4\pi\rho\alpha^3 r}\dot{\bar{u}}\left(t-\frac{r}{\alpha}\right)\boldsymbol{l}, \\ \boldsymbol{u}^{SV}(\boldsymbol{x},t) &= \frac{\mathscr{F}^{SV}\mu A}{4\pi\rho\beta^3 r}\dot{\bar{u}}\left(t-\frac{r}{\beta}\right)\hat{\boldsymbol{p}}, \\ \boldsymbol{u}^{SH}(\boldsymbol{x},t) &= \frac{\mathscr{F}^{SH}\mu A}{4\pi\rho\beta^3 r}\dot{\bar{u}}\left(t-\frac{r}{\beta}\right)\hat{\boldsymbol{\phi}}. \end{aligned} \quad (4.87)$$

4.5.3 把辐射图案改写为适于球对称介质情况

我们已经得到可以与 4.4 节导出的几何射线解(参看(4.57)、(4.60)、(4.61))相比的P，SV 和 SH 的位移形式 (4.87)。为完成P波的对比，只剩下证实 r/α 是射线走时 T^P，$1/r$ 是几何扩散因子 $1/\mathscr{R}^P(\boldsymbol{x},t)$，以及$\frac{\mu}{\rho\alpha^3}$是因子 $\mu(\boldsymbol{\xi})/[\rho^{\frac{1}{2}}(\boldsymbol{\xi})\rho^{\frac{1}{2}}(\boldsymbol{x})\times\alpha^{\frac{5}{2}}(\boldsymbol{\xi})\alpha^{\frac{1}{2}}(\boldsymbol{x})]$。最后这个结果来自将 $\mu/\rho\alpha^3$ 推广到正比于$[\rho(\boldsymbol{x})\alpha(\boldsymbol{x})]^{-\frac{1}{2}}$的项(参看(4.57))，其中比例常数可以只依赖于震源的性质。于是有

$$\boldsymbol{u}^P(\boldsymbol{x},t)=\frac{\mathscr{F}^P\mu(\xi)A\,\dot{\bar{u}}(t-T^P)\boldsymbol{l}}{4\pi\rho^{1/2}(\boldsymbol{\xi})\rho^{1/2}(\boldsymbol{x})\alpha^{5/2}(\xi)\alpha^{1/2}(\boldsymbol{x})\mathscr{R}^P(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi})}, \quad (4.88)$$

同样地，有

$$\boldsymbol{u}^{SV}(\boldsymbol{x},t)=\frac{\mathscr{F}^{SV}\mu(\boldsymbol{\xi})A\,\dot{\bar{u}}(t-T^S)\hat{\boldsymbol{P}}}{4\pi\rho^{1/2}(\boldsymbol{\xi})\rho^{1/2}(\boldsymbol{x})\beta^{5/2}(\xi)\beta^{1/2}(\boldsymbol{x})\mathscr{R}^S(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi})}, \quad (4.89)$$

$$u^{SH}(x,t)=\frac{\mathscr{F}^{SH}\mu(\xi)A\dot{\bar{u}}(t-T^{s})\dot{\phi}}{4\pi\rho^{1/2}(\xi)\rho^{1/2}(x)\beta^{5/2}(\xi)\beta^{1/2}(x)\mathscr{R}^{s}(x,\xi)}. \tag{4.90}$$

这里的辐射图案，与在（4.84)—(4.86）中对于均匀介质所给出的完全一样。唯一值得注意的对称性是，如果倾伏角改变180°，则$\mathscr{F}^{P}$，$\mathscr{F}^{SV}$，$\mathscr{F}^{SH}$的符号相反。特别应注意，走向ϕ_s或离源方位ϕ改变180°时，不存在对称性，因此，必须仔细遵守图4.13和图4.20中给出的定义，这些角自北顺时针旋转时增大。

最后的公式（4.88)—(4.90）的主要用途，在于估算地震矩的值。由远场位移观测，在校正过辐射图案、几何扩散、以及在震源和接收点的比例因子之后，可以得到$\mu A\dot{\bar{u}}(t-T)$。（事实上，还需要校正物质界面的透射效应、衰减和实际的仪器响应。）往往断裂的持续时间比观测体波的周期短得多，而这些周期也仍然短得足以能使用射线理论。在此情况下，震源处的平均质点位移$\bar{u}$，实际是个阶梯函数，$M_0(t)=M_0(\infty)H(t)$，所以，观测的位移脉冲形状$\mu(\xi)A\dot{\bar{u}}$的频谱，在长周期上恰恰就是$M_0(\infty)$。

补充 4.4

对于任意取向的剪切位错矩张量的笛卡尔分量

在剪切位错体波辐射图案的最后公式中，我们把矩张量的性质同Green函数的性质联合起来。如果我们想研究面波，或比较复杂的介质中的自由振荡，我们必须进一步发展波传播理论，以便求适当的Green函数的值。但矩张量不变。这里我们对于用走向ϕ_s，倾伏角λ，倾角δ和矩M_0描述的剪切断层，求它的笛卡尔分量。

参照取x方向为北的图4.20，断层滑动$\bar{u}$和断层法线ν的笛卡尔分量已由（4.83）给出。回顾第三章，剪切位错的矩是$\mu A\bar{u}$，其中μ是震源区的刚性系数（补充3.1），A是位移间断面的平均面积。由（3.21)和(3.23）得到$M_{pq}=\mu A(\bar{u}_p\nu_q+\bar{u}_q\nu_p)$，因此，矩张量$\boldsymbol{M}$

的笛卡尔分量为

$$
\begin{aligned}
&M_{xx}=-M_0(\sin\delta\cos\lambda\sin 2\phi_s+\sin 2\delta\sin\lambda\sin^2\phi_s),\\
&M_{xy}=M_0\left(\sin\delta\cos\lambda\cos 2\phi_s+\frac{1}{2}\sin 2\delta\sin\lambda\sin 2\phi_s\right)=M_{yx},\\
&M_{xz}=-M_0(\cos\delta\cos\lambda\cos\phi_s+\cos 2\delta\sin\lambda\sin\phi_s)=M_{zx},\qquad(1)\\
&M_{yy}=M_0(\sin\delta\cos\lambda\sin 2\phi_s-\sin 2\delta\sin\lambda\cos^2\phi_s),\\
&M_{yz}=-M_0(\cos\delta\cos\lambda\sin\phi_s-\cos 2\delta\sin\lambda\cos\phi_s)=M_{zy},\\
&M_{zz}=M_0\sin 2\delta\sin\lambda.
\end{aligned}
$$

这个总的结果，可以看作是四个基本矩张量的加权之和

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{M}=&\cos\delta\cos\lambda\,\boldsymbol{M}^{(1)}+\sin\delta\cos\lambda\,\boldsymbol{M}^{(2)}-\cos 2\delta\sin\lambda\,\boldsymbol{M}^{(3)}\\
&+\sin 2\delta\sin\lambda\,\boldsymbol{M}^{(4)},
\end{aligned}\qquad(2)
$$

其中

$$
\boldsymbol{M}^{(1)}=M_0\begin{pmatrix}0 & 0 & -\cos\phi_s\\ 0 & 0 & -\sin\phi_s\\ -\cos\phi_s & -\sin\phi_s & 0\end{pmatrix},
$$

$$
\boldsymbol{M}^{(2)}=M_0\begin{pmatrix}-\sin 2\phi_s & \cos 2\phi_s & 0\\ \cos 2\phi_s & \sin 2\phi_s & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix},
$$

$$
\boldsymbol{M}^{(3)}=M_0\begin{pmatrix}0 & 0 & 0 & \sin\phi_s\\ 0 & 0 & 0 & -\cos\phi_s\\ \sin\phi_s & -\cos\phi_s & 0\end{pmatrix},
$$

$$
\boldsymbol{M}^{(4)}=M_0\begin{pmatrix}-\sin^2\phi_s & \frac{1}{2}\sin 2\phi_s & 0\\ \frac{1}{2}\sin 2\phi_s & -\cos^2\phi_s & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}.\qquad(3)
$$

$\boldsymbol{M}^{(i)}(i=1, 2, 3, 4)$中的每一个都有本征值 M_0，$-M_0$ 和零，因此，每一个都是剪切位错的矩张量。事实上（根据(2)），$\boldsymbol{M}^{(1)}$由 M 在 $\delta=0$，$\lambda=0$ 情况下给定的，所以 $\boldsymbol{M}^{(1)}$适合于水平的断层面，用滑动方向规定走向。同样，$\boldsymbol{M}^{(2)}$是纯走滑断层$\left(\delta=\frac{\pi}{2},\ \lambda=0\right)$，$\boldsymbol{M}^{(3)}$是纯倾滑断层$\left(\delta=\frac{\pi}{2},\ \lambda=\frac{\pi}{2}\right)$，而$\boldsymbol{M}^{(4)}$是倾角为 45° 的纯逆倾滑断层$\left(\delta=\frac{\pi}{4},\ \lambda=\frac{\pi}{2}\right)$。

尽管我们的 Green 函数公式可能含有某些近似，但(2)式所示辐射场的分解是精确的。就是说，由任意取向的剪切位错辐射出的波，总是可以写成由具有同一走向的四个不同基本剪切位错辐射的波。事实上，如果不算它们具有共同走向这一要求，则只有三个基本剪切位错需要研究。用在走向 $\phi_s-\frac{\pi}{2}$ 上求得的 $\boldsymbol{M}^{(3)}$ 值代替(2)中的 $\boldsymbol{M}^{(1)}$，就看到这一点。

在上式中，我们取坐标(x, y, z)为（北，东，下）。在研究整个地球的简正振型时，比较更自然的另一种方法是基于坐标 (r,Δ,ϕ)，其中 Δ 是震中距离，ϕ 是震中经度（$\phi=0$ 是南）。这时矩张量的笛卡尔分量是 M_{rr}，$M_{r\Delta}$ 等等，这些分量以具有方向（上，南，东）的震源笛卡尔坐标系为参考系。于是，$\boldsymbol{M}$ 在两个坐标系中的分量之间的关系为

$$\begin{pmatrix} M_{rr} & M_{r\Delta} & M_{r\phi} \\ M_{\Delta r} & M_{\Delta\Delta} & M_{\Delta\phi} \\ M_{\phi r} & M_{\phi\Delta} & M_{\phi\phi} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} M_{zz} & M_{zx} & -M_{zy} \\ M_{xz} & M_{xx} & -M_{xy} \\ -M_{yz} & -M_{yx} & M_{yy} \end{pmatrix}.$$

注意，在这个简正振型的约定中，震源—接收点方位变为 $\pi-\phi$。

对于一般矩张量（即具有对称性 $M_{pq}=M_{qp}$ 的九个力偶）所确定的点源，通过推广（4.79）和（4.81）—(4.82)，远场体波用六个独立的 $\boldsymbol{M}$ 分量给定。利用（4.29）中的远场项，对于均匀介质，有

$$\begin{aligned} \boldsymbol{u}^P(\boldsymbol{x},t)&=\left(\frac{\boldsymbol{\gamma}\cdot\dot{\boldsymbol{M}}\left(t-\frac{r}{\alpha}\right)\ \boldsymbol{\gamma}}{4\pi\rho\alpha^3 r}\right)\boldsymbol{l}, \\ \boldsymbol{u}^{SV}(\boldsymbol{x},t)&=\left(\frac{\hat{\boldsymbol{p}}\cdot\dot{\boldsymbol{M}}\left(t-\frac{r}{\beta}\right)\ \boldsymbol{\gamma}}{4\pi\rho\beta^3 r}\right)\hat{\boldsymbol{p}}, \qquad (4.91) \\ \boldsymbol{u}^{SH}(\boldsymbol{x},t)&=\left(\frac{\hat{\boldsymbol{\phi}}\cdot\dot{\boldsymbol{M}}\left(t-\frac{r}{\beta}\right)\ \boldsymbol{\gamma}}{4\pi\rho\beta^3 r}\right)\hat{\boldsymbol{\phi}}, \end{aligned}$$

利用射线理论，很容易把它修改到非均匀介质的情况。第一，

(4.91)中的分母用(4.88)—(4.90)的分母代替。第二，(4.91)中与$\dot{M}$结合在一起的单位向量$\hat{\boldsymbol{p}}$和$\hat{\boldsymbol{\phi}}$，必须看作与震源处的射线横交，但在接收点的$\hat{\boldsymbol{p}}$和$\hat{\boldsymbol{\phi}}$，与鉴别辐射的质点运动中SV和SH分量的方向相适合。

建议进一步阅读的文献

Červený, V., I. A. Molotkov, and I. Pšenčík. *The Ray Method in Seimology*, Prague:Charles University Press, 1978

Courant, R., and D. Hilbert. *Methods of Mathematical Physics* (Vol. 2, Chap. 6 for ray theory). New York: Interscience, 1952.

Kline, M., and I. W. Kay. *Electromagnetic Theory and Geometrical Optics*. New York: Interscience, 1966.

Love, A. E. H. *A Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity*. New York: Dover Publications, 1944.

Morse, P. M., and H. Feshbach. *Methods of Theoretical Physics* (Chap. 13 for Green's functions in elasticity), New York: McGraw-Hill, 1953.

Sternberg, E. On the integration of the equations of motion in the classical theory of elasticity. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*,6,34-50,1960.

问　　题

4.1　画出 Green 函数 G_{ij} 本身的概略"地震图"。也就是，当 x_0 为脉冲时，画出（4.23）中三个不同项的相对位置和脉冲形状。然后证明，三者中每个脉冲下的面积同距离的关系，都是与 $1/r$ 成正比。脉冲下的面积，等于脉冲的 Fourier 变换当 $\omega\to 0$ 时的极限，因而由（4.35）与频率的关系看到，该面积是无限的。试证明（4.35）中的 $1/\omega^2 r^3$ 和

$1/\omega r^2$ 项事实上互相抵消，当 $\omega \to 0$ 时，与距离的关系确实是 $1/r$。

当地震仪仅仅对于比时间 $S-P$ 即 $r/\beta - r/\alpha$ 长得多的周期才灵敏时，注意 Green 函数的近端项实际是个脉冲，就象远场项一样。对于研究近场效应（诸如破裂断层附近的强地面运动），于是也得到，在震源时间函数对于比 $r/\beta - r/\alpha$ 长的时间将为非零值的意义上，所谓“远场”项和“近场”项，是同等重要的，故 (4.23) 中的第一项也具有 $1/r$ 的量级。

归纳来说：“远场”项在远场占优势，但“近场”和“远场”项，在与震源时间函数进行褶积后，它们在近场具有同等重要性。

4.2 如果固定的力 X_0 作用于无限、均匀、各向同性介质内原点的 j 方向，试由 (4.23) 证明，$\boldsymbol{x}$ 处位移 i 分量的静态解为

$$\frac{X_0}{8\pi\rho r}\left[\left(\frac{1}{\beta^2}-\frac{1}{\alpha^2}\right)\gamma_i\gamma_j+\left(\frac{1}{\beta^2}+\frac{1}{\alpha^2}\right)\delta_{ij}\right].$$

(此式有时叫做 Somigliana 张量。)

4.3 为求出球对称地球中两点 $\boldsymbol{\xi}$ 与 $\boldsymbol{x}$ 间几何扩散因子 $\mathscr{R}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi})$ 的值，考虑沿相同方位以离源角 i_ξ 和 $i_\xi+\delta i_\xi$ 离开 $\boldsymbol{\xi}$ 的两条射线（参看图 4.9 b）。

再考虑使前两条射线的方位增加 $\delta\phi_0$ 所得到的两条射线。四条射线在 ξ 构成的立体角是 $\sin i_\xi \delta i_\xi \delta\phi_0$。证明射线管在 $\boldsymbol{x}$ 处的横截面面积是 $|\boldsymbol{x}|^2\cos i_x \sin\Delta\delta\Delta\delta\phi_0$。然后利用射线参数

$$p=\frac{|\boldsymbol{\xi}|\sin i_\xi}{c(\boldsymbol{\xi})}=\frac{|\boldsymbol{x}|\sin i_x}{c(\boldsymbol{x})}$$

（参看(4.45 b)），求

$$\mathscr{R}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi})c(\boldsymbol{\xi})=|\boldsymbol{x}||\boldsymbol{\xi}|\left[\frac{\cos i_x\cos i_\xi\sin\Delta}{p}\left|\frac{\partial\Delta}{\partial p}\right|\right]^{1/2}.$$

由于右边的对称性，我们立即得到互易定理

$\mathscr{R}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi})c(\boldsymbol{\xi})=\mathscr{R}(\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{x})c(\boldsymbol{x})$，这里只对于球对称介质给了证明。

4.4 试求远场P波对$G_{ij}(\boldsymbol{x},t;\boldsymbol{\xi},0)$的贡献的射线理论解：

$$\frac{l_i(\boldsymbol{x})l_j(\boldsymbol{\xi})\delta(t-T(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi}))}{4\pi\rho^{1/2}(\boldsymbol{x})\rho^{1/2}(\boldsymbol{\xi})\alpha^{3/2}(\boldsymbol{\xi})\alpha^{1/2}(\boldsymbol{x})\mathscr{R}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi})}.$$

(利用对(4.66)、(4.57)给出的解和(4.23)中的远场项。)然后应用互易性定理(2.39)证明，在一般非均匀各向同性介质中有

$$\mathscr{R}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi})\alpha(\boldsymbol{\xi})=\mathscr{R}(\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{x})\alpha(\boldsymbol{x}).$$

这个几何扩散互易性，是射线微分几何中的一个著名结果。直接证明是Richards(1971)给出的。

4.5 对称二阶张量的主轴，是非对角线张量分量为零的笛卡尔坐标轴。由(3.24)出发，给定以滑动$\bar{\boldsymbol{u}}$和断层法线$\boldsymbol{\nu}$的方向为参考的矩张量，绕垂直于$\bar{\boldsymbol{u}}$和$\boldsymbol{\nu}$的直线把轴旋转45°，由此证明压力轴和张力轴是矩张量的主轴。通过求主轴坐标系中向量偶极项的大小，证明断层滑动的地震矩M_0是矩张量$\boldsymbol{M}$的不变量。

4.6 证明断层滑动的点源产生的远场P波振幅辐射图案，在震源球上取均方根值是$\sqrt{\frac{4}{15}}$；对S波，证明相应结果是$\sqrt{\frac{2}{5}}$。

(由(4.33)所定义的辐射图案出发。)

4.7 对于(4.31)—(4.33)所用的描述双力偶辐射图案的球极坐标，证明F_i*G_{ij}的远场项是

$$\frac{1}{4\pi\rho\alpha^2}\frac{\hat{r}_i\hat{r}_j}{r}F_i\left(t-\frac{r}{\alpha}\right)+\frac{1}{4\pi\rho\beta^2}\frac{(\hat{\theta}_i\hat{\theta}_j+\hat{\phi}_i\hat{\phi}_j)}{r}F_i\left(t-\frac{r}{\beta}\right).$$

(对于作用在原点的力$\boldsymbol{F}(t)$，这个式子用单位向量$\hat{\gamma}$，$\hat{\theta}$，$\hat{\phi}$的笛卡尔分量来给出在(r,θ,ϕ)的位移i分量。)

4.8 试证明，求解非均匀介质中速度为 $c=c(x)$ 的射线路径问题，等价于求解质点在具有比例于 $1/c^2$ 的势的力场中移动时的运动。（提示：选取标量变量 σ 来定义射线的位置，σ 具有 $dx/d\sigma=\nabla T$ 的性质。）

第五章　均匀介质中的平面波及其在平界面上的反射和透射

到现在为止，我们已经仔细地研究过均匀无限各向同性弹性介质中，各种点源产生的地震波，并已开始通过发展平滑变化的非均匀介质的几何射线理论，考虑透射问题。我们现在继续发展波的透射理论，考虑波传播介质中含有弹性性质间断的基本问题。这里只分析最简单类型的间断，其中两种均匀各向同性弹性介质在一个平界面上密接。只考虑平面波在界面入射的情况，以避开震源细节。

这类问题是George Green(1839)首先分析的；他在同一篇经典文章中引入了应变能函数。Green试图用弹性波解释光的反射和折射，他的工作在细节上类似于P，SV和SH平面波的现代分析。但是，对于两个半空间有完全不同的弹性常数和密度的情况，他没有完成必要的代数运算。这个推广是由Knott(在1899年)和Zoeppritz(在1901年)分别独立地用位移势得到的。

对于研究在离震源很大距离上的波，入射平面波的假定在实际上可以完全是适当的(参看图5.1 a)。但如果反射和折射发生在震源附近(图5.1 b)，则观测到不能直接用Knott的理论解释的现象。突出的例子是1909年Mohorovičic发现的P_n波。虽然此波是能在由两个密接的均匀半空间组成的介质中传播的那种类型的波(参看补充6.4)，但它含有辐射球面波的点源。我们提到这一点，是为了给出Knott理论的重要直接应用。研究球面波的一个方法是，把它们分解为平面波的和(或积分)，然后应用Knott理论于每个平面波，最后把每个平面波的结果叠加起来，合成所求的结果。

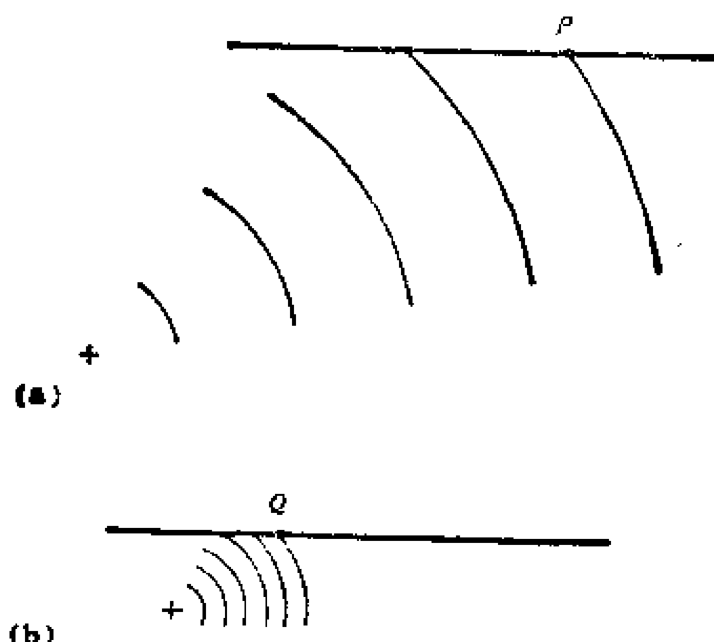


图 5.1

(a) 如果地球内某界面上的点 P 离波源足够远，则到达 P 的波阵面实际可作为平面行波来处理。(b) 如果 Q 足够接近于源，则可能不得不考虑波阵面在 Q 的曲率(见第六章)。注意，我们说"足够远"和"足够近"，是指所关心的点(P 或 Q)与源之间的波长数。因此，即使对于(b) 中的源点与接收点之间的几何关系，也可以对非常高的频率应用平面波理论

在本章，我们将概述在后面许多章中所需要的平面波基本性质。在说明如何用三个标量势建立起 P，SV，SH 问题以后，我们求出反射系数、转换系数、透射系数的专门公式，并说明它们与西散射矩阵的关系。我们描述非均匀波以及与其相联系的散射系数的相移。

传播的波引起的地球内小的质点运动，由于各种各样的消散机制，导致不可逆的波能损耗。在这个意义上，地球是不完全的弹性介质。从对于传播的波的影响这个观点看，这种衰减可以很方便地用参数 Q 来概括。接下去，本章简要地描述在象地球这样的衰减介质中，传播对脉冲形状的影响，该介质中的 Q 在观测到的地震波频率范围上，近似为常数。最后我们给出各向异性介质

中平面波传播的基本理论的轮廓。

5.1 弹性介质中平面波的基本性质

一个物理量（如质点加速度或一应力分量），将作为平面波以速度 c 沿 $\boldsymbol{l}$ 方向传播，如果

i）在固定的时间，该量在垂直于单位向量 $\boldsymbol{l}$ 的每个平面上不随空间变化，

ii）与该量的特定值相联系的平面，以速率 c 沿 $\boldsymbol{l}$ 方向移动。

于是，以这两个性质传播的物理量，必定有只经由组合 $t-(\boldsymbol{l}\cdot\boldsymbol{x})/c$ 而依赖于空间和时间的函数关系。我们把 $\boldsymbol{l}/c$ 叫做慢度向量 $\boldsymbol{s}$。使用慢度（而不是速度）来总结波传播的速率和方向的优点是，慢度可以按矢量相加（但速度在此情况下不一定）。因此，利用笛卡尔坐标（x，y，z），一个给定波的慢度，是它沿每个坐标方向的分量 s_x，s_y，s_z 的矢量和：$\boldsymbol{s}=s_x\hat{x}+s_y\hat{y}+s_z\hat{z}$，而沿 $\boldsymbol{n}$ 方向的慢度简单地等于 $\boldsymbol{s}\cdot\boldsymbol{n}$。相反，平面波沿特定方向前进的速度，一般说，比它沿传播方向的速度快（参看图 5.2）。

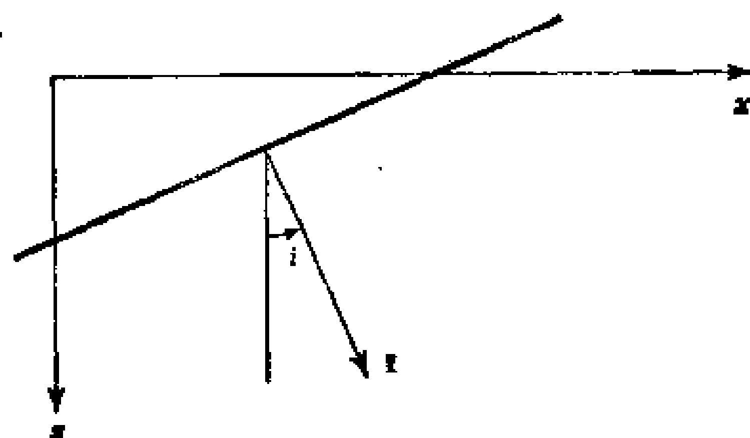


图 5.2

对于以速率 c 沿 $\boldsymbol{l}$ 方向传播的量，粗斜线标出在其上该量的值都相等的平面。按照地震学的习惯，取正 z 方向作为深度方向，并定义 x 轴是沿 $\boldsymbol{l}$ 的水平分量的方向。常常利用 z 轴与 $\boldsymbol{l}$ 方向间的夹角 i，指明波传播的方向，这时沿 x 轴传播的视速率是 $c/\sin i$。视速率在地震学中，常用布设在一部分地表的仪器来测定。其倒数是水平慢度或射线参数

补充 5.1

记法

如果只对于一个特定分量的详细性质感兴趣，则用脚标来表示向量和张量的分量的优越性就大大减弱了。在本章我们经常对于位移的三个笛卡尔分量使用记号 $\boldsymbol{u}=(u, v, w)$，而坐标是 $\boldsymbol{x}=(x, y, z)$。我们将看到，P 和 SV 波由于水平面的边界条件而是互相耦合的，并且 P 和 SV 平面波中的每一个都能用位移分量 $u=u(x, z, t)$，$w=w(x, z, t)$ 进行分析。SH 平面波包含有 $v=v(x, z, t)$，它们不与 P 或 SV 耦合。

当使用脚标记号仍很方便时(方程(5.1)、(5.2)、(5.5))，我们将保留它和它的明显解释，例如，

$$e_{23}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_2}{\partial x_3}+\frac{\partial u_3}{\partial x_2}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial y}\right)=e_{yz}\text{。}$$

把位移的一般形式 $\boldsymbol{u}=\boldsymbol{u}(t-\boldsymbol{s}\cdot\boldsymbol{x})$ 代入均匀各向同性介质的弹性位移方程

$$\rho\ddot{u}_i=(\lambda+\mu)u_{j,ji}+\mu u_{i,jj},\tag{5.1}$$

给出

$$[\rho\delta_{ik}-(\lambda+\mu)s_is_k-\mu s_js_j\delta_{ik}]\ddot{u}_k=0\tag{5.2}$$

很容易区分平面波的两种基本类型。取 (5.2) 同 $\boldsymbol{s}$ 的向量乘积和标量乘积，并利用 $s^2=1/c^2$，得到

$$\left(\rho-\frac{\mu}{c^2}\right)\ddot{\boldsymbol{u}}\times\boldsymbol{s}=0,\left(\rho-\frac{\lambda+2\mu}{c^2}\right)\ddot{\boldsymbol{u}}\cdot\boldsymbol{s}=0.\tag{5.3}$$

因此，或是$[\ddot{\boldsymbol{u}}\times\boldsymbol{s}=0$ 和 $c^2=(\lambda+2\mu)/\rho]$，或是$[\ddot{\boldsymbol{u}}\cdot\boldsymbol{s}=0$ 和 $c^2=\mu/\rho]$。于是，平面波或是具有纵运动（平行于 $\boldsymbol{s}$）和速度 $\sqrt{(\lambda+2\mu)/\rho}$ 的 P 波，或是具有横运动和速度 $\sqrt{\mu/\rho}$ 的 S 波。我们这里的分析，类似于方程(4.48)—(4.51)的分析，现在所不同的地方是我们没有做近似。P 或 S 运动的纵性质或横性质，在所有频率上，对于均匀介质中的平面波，都是精确的。

为描述与弹性运动相联系的能量，我们在第二章发展过弹性

应变能密度的概念。介质的应变能，是利用它自身的形态而做功的能力，在(2.32)我们看到，应变能密度是$\frac{1}{2}\tau_{ij}e_{ij}$。对于平面波$u_i=u_i(t-\boldsymbol{s}\cdot\boldsymbol{x})$，应变张量是$e_{ij}=-\frac{1}{2}[\dot{u}_i s_j+\dot{u}_j s_i]$，而根据各向同性介质的应力-应变关系(2.49)，很容易证明

$$\frac{1}{2}\tau_{ij}e_{ij}=\frac{1}{2}[(\lambda+\mu)(\boldsymbol{s}\cdot\dot{\boldsymbol{u}})^2+\mu(\dot{\boldsymbol{u}}\cdot\dot{\boldsymbol{u}})(\boldsymbol{s}\cdot\boldsymbol{s})]. \qquad (5.4)$$

在P波（这时$\boldsymbol{s}$平行于$\dot{\boldsymbol{u}}$，$|\boldsymbol{s}|=\alpha^{-1}$）或$S$波（这时$\boldsymbol{s}$垂直于$\dot{\boldsymbol{u}}$，$|\boldsymbol{s}|=\beta^{-1}$的情况下，由(5.4)得到

$$\frac{1}{2}\tau_{ij}e_{ij}=\frac{1}{2}\rho\dot{\boldsymbol{u}}^2, \qquad (5.5)$$

即应变能密度等于动能密度。(5.5)中的量都是实数，而且能密度只经由组合$t-\boldsymbol{s}\cdot\boldsymbol{x}$依赖于$t$和$\boldsymbol{x}$。因此，能量传播速率同质点位移脉冲形状传播的速率没有差别：或者是P波的α，或者是S波的β。

于是，平面波的能通量[1]（即垂直于传播方向的单位面积上每单位时间通过的能量），对P波为$\rho\alpha\dot{u}^2$，对S波为$\rho\beta\dot{u}^2$。我们只对均匀介质中的平面波证明了这个结果，它是个“局部”性质，依赖于物性和仅在求通量的点上波的平面性质。因此我们可以预期，对于在物性有某种空间变化的介质中，波阵面略有弯曲的情况下，能通量仍由$\rho\dot{u}^2$乘以传播速度而近似地给出。于是，我们在第四章得到的关于位移振幅的几何射线理论的结果，就有了物理解释。所以，对于由非均匀介质中的点源向外扩散的P波，(4.57)表示(对于特定射线)$[\rho(\boldsymbol{x})\alpha(\boldsymbol{x})]^{\frac{1}{2}}\dot{\boldsymbol{u}}^P$只经由几何因子$\frac{1}{\mathscr{R}^P(\boldsymbol{x},\xi)}$和走时$T^P(\boldsymbol{x},\xi)$而依赖于接收点的位置$\boldsymbol{x}$。因而能通量只受射线几何的控制。参看图5.3，能量穿过δA_1的速率等于

1）原文中用 flux rate，用 flux（通量）就够了。——校者注

$\rho(\boldsymbol{x}_1)\alpha(\boldsymbol{x}_1)\dot{u}^2\delta A_1$。但既然 $\delta A_1 \propto [\mathscr{R}^P(\boldsymbol{x}_1, \xi)]^2$，于是由(4.57)得到，能量在时间 T_1 穿过 δA_1 的速率等于它在时间 T_2 穿过 δA_2 的速率，$T_2 - T_1$ 是波从 $\boldsymbol{x}_1$ 前进到 $\boldsymbol{x}_2$ 所用的时间。在这个意义上，我们由几何射线理论得知，传播的地震能量被限制在射线管内。这只是一个近似，在足够高的频率上是精确的。

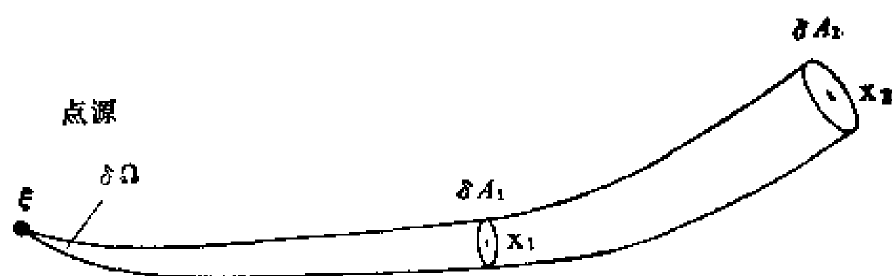


图 5.3

由 ξ 处点源发出的射线管的参数。管在 $\boldsymbol{x}_1$ 和 $\boldsymbol{x}_2$ 的横截面面积为 $\delta A_i = \delta\Omega\,\mathscr{R}^2(\boldsymbol{x}_i, \xi)(i=1, 2)$，这里的 $\delta\Omega$ 是震源处的立体角。按照几何射线理论，扣除 $\boldsymbol{x}_1$ 与 $\boldsymbol{x}_2$ 间传播的时间推迟，在单位时间内穿过 δA_1 的能量与单位时间内穿过 δA_2 的能量相同

5.1.1 平面波的势

我们在第四章看到过，弹性位移的势可用于分离 P 和 S 分量。这样做比较方便，因为分离开的势的波动方程，比弹性位移的波动方程简单得多(只含有一个波速)。使用势(ϕ 和 $\boldsymbol{\psi}$)的优越性，似乎被下列事实所抵消，即 ϕ 和 $\boldsymbol{\psi}$ 包含四个未知函数，但我们经常关心的物理量弹性位移，是只有三个未知分量的向量。额外的未知量用额外的方程来约束，通常用 $\nabla\cdot\boldsymbol{\psi}=0$。在均匀各向同性介质中，只需要三个各自相应于运动的 P，SV，SH 分量的标量势函数。

我们将在补充 6.5 中证明这个一般结果，但我们现在的兴趣在于平面波，而对于它们，两个标量 S 波势有特殊的形式。这样，S 波一般有位移 $\nabla\times\boldsymbol{\psi}$。如果波是平面波，并选取图 5.2 中的笛卡尔坐标，使 x 轴沿水平慢度分量的方向，则 $\boldsymbol{\psi}$ 只依赖于 x，z 和 t。于是，根据约束条件 $\nabla\cdot\boldsymbol{\psi}=0$，有

$$\frac{\partial\psi_x}{\partial x}+\frac{\partial\psi_z}{\partial z}=0. \tag{5.6}$$

如果波的偏振纯粹为 SV，则位移的 y 分量为零，则有

$$\frac{\partial\psi_x}{\partial z}-\frac{\partial\psi_z}{\partial x}=0. \tag{5.7}$$

按照复变函数论，(5.6) 和 (5.7)是 Cauchy-Riemann 方程，于是 $\psi_z+i\psi_x$ 是 $x+iz$ 的解析函数。一个函数若处处是解析的和有界的，则为常数(这是 Liouville 定理)。对于平面波，$\psi_z+i\psi_x$ 肯定是有界的。此外，如果 SV 波只在限定的深度范围内由 $\nabla\times\boldsymbol{\psi}$ 给出，可以从概念上将此位移扩展到所有深度，使 $\psi_z+i\psi_x$ 处处是解析的。于是，$\psi_z+i\psi_x$ 是常数：既然只有 ψ_x 和 ψ_z 的梯度具有物理意义，所以可取此常数为零。因此，我们得到的结论是，在包含 x 轴的竖直平面内传播的最一般的 SV 平面波，可以用势 $\boldsymbol{\psi}(0,\ \psi,\ 0)$表示，相应的位移是 $\nabla\times\boldsymbol{\psi}=\left(-\frac{\partial\psi}{\partial z},0,\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)$。矢量波动方程简化为标量形式 $\beta^2\nabla^2\psi=\ddot{\psi}$。

对于平面 SH 波，利用向量势是不合适的，因为水平位移分量本身就是一个进行计算的良好的标量函数。对于图 5.2 中选定的坐标，SH 的位移 $\boldsymbol{u}=(u,\ v,\ w)$简化为 $\boldsymbol{u}=(0,\ v,\ 0)$，而对于平面波，$v=v(x,\ z,\ t)$。剪切波的限制条件 $\nabla\cdot\boldsymbol{u}=0$ 已得到满足，容易证明，弹性位移方程简化为 $\beta^2\nabla^2v=\ddot{v}$。

对于 P 波，位移是 $\nabla\phi$，其中 ϕ 满足 $\alpha^2\nabla^2\phi=\ddot{\phi}$。象在图 5.2 中那样传播的平面 P 波的特殊情况，导致 y 方向的位移分量为零，和 $\phi=\phi(x,\ z,\ t)$(与 y 坐标无关)。因此，位移是$\left(\frac{\partial\phi}{\partial x},0,\frac{\partial\phi}{\partial z}\right)$。

补充 5.2

关于求解波传播问题中所用 Fourier 变换的符号约定

利用 z 随深度而增大的笛卡尔坐标系，我们将常常进行两个水平变量的 Fourier 变换，x 变换到 k_x，y 变换到k_y。我们这里对空间变换的约定是

$$f(x)\rightarrow f(k_x)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x)e^{-ik_x x}dx,$$

对 y 的函数也类似。注意，我们通常要避免用专门符号（诸如 $\tilde{f}$，或 $\bar{f}$，或 F）来表示 f 已做过变换。只要从上下文看不清楚 f 究竟表示 $f(x)$ 还是变换过的函数，我们就将用 f 的特殊自变量写出 $f(x)$ 或 $f(k_x)$。唯一例外出现在关于资料处理的第十一章，那里的许多结果用大写字母表示变换是更为清楚的。

我们还将对时间关系进行变换，或用从 t 变到 s 的 Laplace 变换和约定

$$f(t)\rightarrow f(s)=\int_{0}^{\infty}f(t)e^{-st}dt,$$

或用从 t 变到 ω 的 Fourier 变换。尽管这些变换本质上一样，但如果变换变量采用复数值，则把它们区分开仍是有用的，因为某些分析方法用实的 ω 进行，所以 Fourier 变换是合适的，但有些方法用实的 s（即虚的 ω）进行，这时 Laplace 变换就比较方便。

关于时间关系的 Fourier 变换，我们对指数的符号约定是

$$f(t)\rightarrow f(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\exp(+i\omega t)dt.$$

注意，这不同于本补充中前面对空间 Fourier 变换所采取的约定。当然，人们希望避免使用混合的约定，但有三个好的理由，说明为什么在求解有关地震学的波传播问题中，这是合适的。

第一，它能给 Fourier 逆变换一个方便的解释。如果 $f(x,y,z,t)$ 是某个感兴趣的传播物理变量，常常能得到三重变换函数 $f(k_x, k_y, z,\omega)$。这时所要求的解是

$$f(x,y,z,t)=\frac{1}{8\pi^3}\int_{-\infty}^{\infty}dk_x\int_{-\infty}^{\infty}dk_y\int_{-\infty}^{\infty}d\omega f(k_x,k_y,z,\omega)$$
$$\exp[i(k_x x+k_y y-\omega t)].$$

对于我们选择的符号约定，在正的 k_x，k_y 和 ω 情况下，这个被积函数可以解释为沿 x 和 y 增大方向传播的波。

第二，如果 $f(x, y, z, t)$ 满足 $c^2\nabla^2 f=\ddot{f}$ 型的波动方程，则 $f(k_x, k_y, z, \omega)$ 满足

$$\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}=\left(k_x{}^2+k_y{}^2-\frac{\omega^2}{c^2}\right)f.$$

如果介质是均匀的（即 c 为常数），则

$$f(k_x,k_y,z,\omega)\propto e^{\pm i\omega\xi z},\tag{1}$$

式中 $\omega\xi=\left(\frac{\omega^2}{c^2}-k_x^2-k_y^2\right)^{1/2}$。式 (1) 中正负号的选择指示着究竟 f 是向下去的波（+）还是向上来的波（−）。但是，如果 $\frac{\omega^2}{c^2}<k_x^2+k_y^2$，我们将几乎总是发现，希望用 $\omega\xi$ 的正的虚数值进行计算，因为这时波 $e^{+i\omega\xi z}$ 恰随深度（$z\to\infty$）衰减，而波 $e^{-i\omega\xi z}$ 恰随高度（$z\to-\infty$）衰减。

第三，预想到在后面几章使用 Hankel 函数的需要，我们使用物理学家们已经几乎一致采用的约定，即第 1类 Hankel 函数代表出去的波，第 2 类 Hankel 函数代表进来的波。作为传播的（稳态）波，它们这时必须同因子 $e^{-i\omega t}$ 相联系。带有此因子的各项的积分(对ω)，构成返回到时间域的 Fourier 逆变换，因此，我们的符号约定确实符合标准的 Hankel 函数约定。

5.1.2 分离变量；稳态平面波

我们来扼要证明，在笛卡尔坐标系中用分离变量法求解波动方程

$$\alpha^2\nabla^2\phi=\ddot{\phi},\tag{5.8}$$

等效于对一类平面波解进行分析。

因此，我们来寻找(5.8)的$X(x)Y(y)Z(z)T(t)$形式的解，每个因子是仅仅一个变量的函数。由 (5.8)得到

$$\frac{\alpha^2}{X}\frac{d^2X}{dx^2}+\frac{\alpha^2}{Y}\frac{d^2Y}{dy^2}+\frac{\alpha^2}{Z}\frac{d^2Z}{dz^2}=\frac{1}{T}\frac{d^2T}{dt^2},\tag{5.9}$$

意味着$\frac{1}{T}\frac{d^2T}{dt^2}$是常数［为看到这一点，求 (5.9) 对 t 的微分］。例如

$$\frac{d^2T}{dt^2}+\omega^2T=0\text{，因而}T\propto\exp(\pm i\omega t).$$

同理，对于某常数k_x，k_y，有

$$\frac{d^2X}{dx^2}+k_x^2X=0 \text{ 和 } X\propto\exp(\pm ik_xx)$$

$$\frac{d^2Y}{dy^2}+k_y^2Y=0 \text{ 和 } Y\propto\exp(\pm ik_yy)。$$

但是，同 z 的关系用下式来约束：

$$\frac{d^2Z}{dz^2}+k_z^2Z=0$$

[即 $Z\propto\exp(\pm ik_zz)$]，式中 k_z 由下式给定：

$$k_z^2=\frac{\omega^2}{\alpha^2}-k_x^2-k_y^2, \tag{5.10}$$

以便使解由仅仅三个数（ω，k_x，k_y）而不是四个数来表征。

所以，分离的解具有

$$\exp[i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}-\omega t)]$$

形式，其中 $\boldsymbol{k}=(k_x,\ k_y,\ k_z)$，$|\boldsymbol{k}|=\left|\frac{\omega}{\alpha}\right|$。显然，这是个平面波，它与时间的关系特别简单，是在固定频率 ω 上的稳定振动。三个分离常数构成的向量 $\boldsymbol{k}$，叫做波数向量，它等于 ω 乘以慢度。

将分离的解叠加，得到（5.8）的一般解，并且

$$\phi(x,y,z,t)=\int_{-\infty}^{\infty}d\omega\int_{-\infty}^{\infty}dk_x\int_{-\infty}^{\infty}dk_y\Phi(k_x,k_y,\omega,z)$$
$$\times\exp\left\{i\left[k_xx+k_yy+\left(\frac{\omega^2}{\alpha^2}-k_x^2-k_y^2\right)^{1/2}z-\omega t\right]\right\}. \tag{5.11}$$

这里 Φ 仅仅作为某个权函数而起作用，它给出为得到所要求的解 ϕ 而进行的叠加中用（k_x，k_y，ω）表征的平面波的大小。

我们在（5.11）中得到的结果，本质上与在补充5.2中用 Fourier 逆变换叙述的相同。这里侧重于笛卡尔坐标，但对其它坐标系，用 Fourier逆变换给出的解可以看作分离解的叠加，这一点也是对的。

平面波在地震学中直接具有重要意义，因为来自远处震源的

体波的行为在当地就象平面波。式（5.11）还指出稳态平面波的间接重要性，表明它们是合成更一般的解的基础。该合成的细节已被广泛研究，并且构成第六章以及第七章和第九章一部分的课题。既然这些细节决定着我们需要发展的平面波的性质，所以这里列出下述关于式（5.11）的评注是有益的。

i）由于对 k_x，k_y 的依赖关系，所以，把平面波作为它们的水平波数的函数，或等效地，作为它们的水平慢度的函数来进行研究，将是重要的。

ii）通过（5.11）求解波传播问题的过程的一部分，是确定适合于研究中的特定震源的函数$\Phi(k_x,k_y,\omega,z)$。按照在 $d\omega dk_x dk_y$元上的积分，Φ可看作（ω,k_x,k_y）空间中的密度函数。按照Fourier变换理论，它同ϕ对t,x,y的三重变换有关。按照叠加，它是激发函数，指明有多少特定的平面波被所研究的震源激发出来。

iii）研究波只在二维空间x和z中的传播，常常是有益的。在此情况下，与y的关系以及k_y积分在（5.11）中不存在。

iv）必须决定（5.11）的被积函数中出现的平方根的符号。还有，如果水平向波数足够大，则必须采用负数的平方根，沿z方向将出现指数增大或减小。我们在5.3节着手处理这个问题。

v）一旦（5.11）被积函数中的各因子都已得到，就需要有一个求三重积分值的方法。我们发现，许多不同方法都在使用着，并且它们往往包含一些近似。在少数情况下，被积函数能严格反演，给出ϕ的封闭形式的表达式。对于在地震学问题中研究的弹性介质，常常是必须用数值方法对被积函数的一部分求值。最富有成效的这类方法，都着重处理对水平慢度的积分。

说明了详尽分析平面波的这些理由，我们现在回到本章的主题。

5.2 反射系数、转换系数、透射系数的基本公式

我们已看到，均匀介质中 $\alpha^2\nabla^2\phi=\ddot{\phi}$ 类型方程的稳态平面波解取 $A\exp[i\omega(\boldsymbol{s}\cdot\boldsymbol{x}-t)]$ 形式，其中 A 是振幅，而 $\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}, 0, \frac{\partial\phi}{\partial z}\right)$ 是沿垂直于 y 轴的方向传播的有关 P 波的位移。在本节，我们将研究沿平面 $z=0$ 接触的两个半空间之间界面的效应。如果半空间由固体，或液体，或真空组成，则有五种需要考虑的有意义的情况：固体/固体，固体/液体，固体/真空，液体/液体，液体/真空。

5.2.1 边界条件

有两类边界条件：关于位移的（常常叫做运动学边界条件）和关于牵引力或应力分量的（动力学边界条件）。

补充 5.3

运动学和动力学的区别

运动学是力学的分支，它只涉及运动而不分析引起或参加运动的力。动力学是直接涉及力系和支配运动的能量平衡的力学分支。根据这些基本定义，应用"运动学的"和"动力学的"这些词，有两个有用的约定。

第一，当只分析位移时，运动学性质是可以由程函方程(4.41)导出的性质，而动力学性质是同位移振幅有关的性质。因此，特定波阵面和射线路径的存在，是当前问题的运动学部分。作为动力学问题的一个例子，我们可以问，在离给定震源一定距离的一个接收点上所观测到的位移，某种近似是否足够。

第二，在我们对位移和有关的应力系两方面都有直接兴趣的问题中，运动学性质是位移场的性质，动力学性质则与应力有关。例如，若已知断层面两侧的相对位移是空间和时间的函数，则我们说有断层运动的运动学描述。若已知断层面上的应力(即牵引力分量)，则我们有动力学描述。作为另一个例子，人们在本节所说的意义上，把边界条件说成是运动学的或动力学的。

对于密接的两种固体，运动学条件是位移的所有三个分量在整个界面上连续。跨越固体半空间与粘滞液体半空间之间的界面，也能有位移的连续性。但是，如果液体是完全非滞性的，则可以发生平行于界面的滑动，但位移的法向分量应是连续的（除非发生成穴作用或液体运动到固体的空隙中去）。对于地震波的典型波长（公里）和周期（秒），似乎地震学中两种重要液体（海洋和地球外核）是非粘滞性的。就是说，它们的粘滞性如此低，以致它们把液体中运动粘滞拖曳，限制到离开如海底或地核-地幔界面这类固液分界面的距离只有一个波长的可忽略的零头。在这些情况下，位移的切向分量实际上可以是不连续的，边界条件所能为力的只在于法向分量。地球内部普遍存在的强大压应力，将不允许发生空穴现象（因为这将产生冲击传播，它的应力间断要比岩石强度大许多数量级）。此外，任何有效的液体向固体内的扩散，都将需要比地震波周期长得多的时间。因此，把固液分界面的运动学边界条件，只取作法向位移的连续，在地震学中，是合适的。

动力学边界条件是分界面上牵引力连续。这个结果可以沿着我们讨论图 2.4 的思路予以证明。设想一个小薄圆盘，它的两个平表面是在不同介质中，作用在这两个面上的牵引力，大小相等方向相反（参看图 2.7）。改变圆盘向外的法线中一个的方向，则圆盘每个表面上的牵引力 $\boldsymbol{T}(\boldsymbol{n})$相同，因而通过分界面是连续的（参看问题2.5）。因为牵引力是向量，这似乎给出三个标量限制条件。但是，其中的一个或两个，可以自然满足，因为一个传播的平面波，不必激发牵引力的所有三个分量。注意，由于我们取分界面作为与 z 轴垂直的平面，所以，这些牵引力分量是应力张量分量$\tau_{xz}, \tau_{yz}, \tau_{zz}$。在与真空的分界面上，这三个应力分量都为零，这实际也是地球或海洋表面的情况，因为大气的弹性常数，比岩石的弹性常数或海水的体积模量小好几个数量级。（对于如likely附录 1 描述的与空气耦合的面波，可以例外。）在 $z=0$ 上，有

$(\tau_{zx},\tau_{zy},\tau_{zz})=(0,\ 0,\ 0)$，叫做$z=0$上的"自由面边界条件"。这是我们要详细研究的第一个反射问题。

5.2.2 平面 P 波和 SV 波在自由面上的反射

假定一平面 P 波正以沿 x 增大方向的水平慢度运行（见图5.4）。这时利用位势 ϕ，可以给出P位移为$\mathbf{u}=\left(\dfrac{\partial\phi}{\partial x},\ 0,\ \dfrac{\partial\phi}{\partial z}\right)$，而相应的牵引力为

$$T(\mathbf{u},\hat{z})=(\tau_{zx},\tau_{yz},\tau_{zz})=\left(2\mu\frac{\partial^2\phi}{\partial z\partial x},0,\ \lambda\nabla^2\phi+2\mu\frac{\partial^2\phi}{\partial z^2}\right). \tag{5.12}$$

为完整起见，这里顺带说一下SV和SH波的相应结果：对于SV波，有标量势ψ，SV位移为$\mathbf{u}=\left(-\dfrac{\partial\psi}{\partial z},\ 0\ ,\ \dfrac{\partial\psi}{\partial x}\right)$，牵引力为

$$(\tau_{zx},\tau_{yz},\tau_{zz})=\left(\mu\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}-\frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}\right),\ \ 0,2\mu\frac{\partial^2\psi}{\partial z\partial x}\right); \tag{5.13}$$

对于SH波，只需要一个位移分量，SH位移为$\mathbf{u}=(0,\ v,\ 0)$，牵引力为

$$(\tau_{zx},\tau_{zy},\tau_{zz})=(0,\mu\frac{\partial v}{\partial z},\ 0). \tag{5.14}$$

利用入射角i（参看图5.4），入射P波的慢度表示为

$$\mathbf{S}=\left(\frac{\sin i}{\alpha},\ \ 0\ ,\ \frac{-\cos i}{\alpha}\right).$$

因为这个波不激发τ_{yz}分量（见(5.12)），所以也就不激发SH分量(见(5.14))，反射的波只是P和SV，其慢度分别为

$$\left(\frac{\sin i^*}{\alpha},\ 0,\ \frac{\cos i^*}{\alpha}\right),\ \left(\frac{\sin j}{\beta},\ \ 0\ ,\ \frac{\cos j}{\beta}\right).$$

因此，总ϕ势由入射分量ϕ入和反射分量ϕ反组成

$$\phi=\phi\text{入}+\phi\text{反}, \tag{5.15}$$

$$\phi\text{入}=A\exp\left[\ i\omega\left(\frac{\sin i}{\alpha}\,x-\frac{\cos i}{\alpha}\,z-t\right)\right], \tag{5.16}$$

$$\phi^{反}=B\exp\left[\,i\omega\left(\frac{\sin i^*}{\alpha}x+\frac{\cos i^*}{\alpha}z-t\right)\right]. \tag{5.17}$$

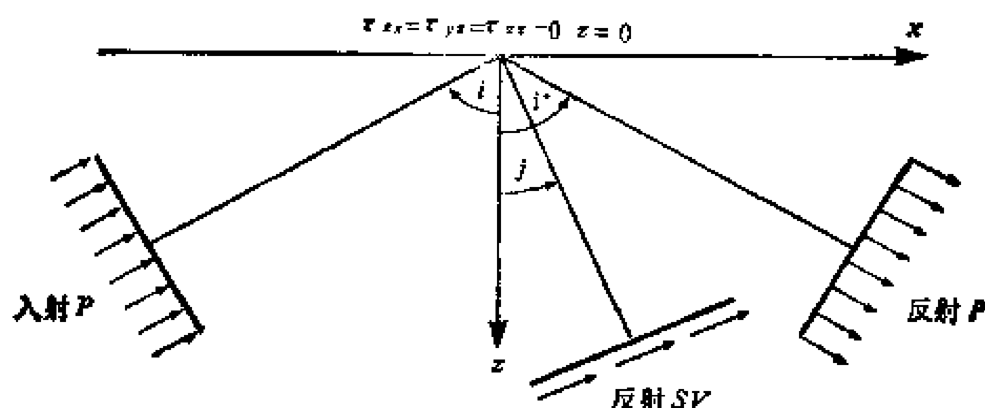


图 5.4

在固体弹性半空间自由表面入射的平面P波及其产生的反射波。一部分平面波的位置用粗线段表示，相联系的一排箭头表示质点运动方向。角i和j分别用与P和SV平面波波阵面正交的射线轨迹来定义。反射角i^*等于入射角i

每个波中的振幅A和B都是常数，总的SV波为

$$\psi=\psi^{反}, \tag{5.18}$$

式中

$$\psi^{反}=C\exp\left[\,i\omega\left(\frac{\sin j}{\beta}x+\frac{\cos j}{\beta}z-t\right)\right]. \tag{5.19}$$

现在用不着考虑运动学边界条件，因为自由面以上的位移没有意义，而固体自由面的位移是不受限制的。能够利用的动力学边界条件是，在$z=0$上$\tau_{zx}=\tau_{zz}=0$，而由方程(5.12)，(5.13)、(5.15)—(5.19)我们发现，τ_{zx}，τ_{zz}各自都是三部分之和，各都带有以下形式的因子：

$$\exp\left[\,i\omega\left(\frac{\sin i}{\alpha}x-t\right)\right]$$

或

$$\exp\left[\,i\omega\left(\frac{\sin i^*}{\alpha}x-t\right)\right]$$

或

$$\exp\left[\,i\omega\left(\frac{\sin j}{\beta}x-t\right)\right].$$

对于所有的 x 和 t，这个边界条件在 $z=0$ 上都成立，于是控制波系水平传播的这些因子必然都一样。特别是，$i^*=i$（P 波的入射角和反射角相等）和 $(\sin i)/\alpha=(\sin j)/\beta$。所以，入射波的水平慢度在反射时保持不变，转换成 SV 时也保持不变。如果有进入上半空间的透射，那么水平向慢度分量也应保持不变，这是 Snell 定律的一种表述法。我们对速度随深度平滑变化的介质，已经证明过它（见（4.45 a））。这里我们要发展一个重要的概念，即由平面波在平面分层介质中的反射和透射所形成的整个波系，以它们共同的水平向慢度值为特征。我们将常常把这个值叫做射线参数，尽管这个名字并不很恰当，因为 $(\sin i)/\alpha=(\sin j)/\beta=p$ 是整个射线系而不仅仅是一条射线的参数。

补充 5.4

阻抗

一个介质对于一个运动的阻抗，是对质点运动的阻力的量度。特殊地说，弹性阻抗是应力与质点速度之比，因此，对于给定的应力，质点速度同阻抗成反比。

不同波动类型的阻抗，可以有相当大的变化，我们现在通过特殊例子来讨论。

第一，考虑位移为 $v=v_0\exp\left\{i\omega\left[px+\frac{\cos j}{\beta}z-t\right]\right\}$ 的 SH 波。这时，对于水平的平面（$z=$常数），切向应力为 $\tau_{yz}=i\mu\omega\frac{\cos j}{\beta}v$，切向质点速度为 $\dot{v}=-i\omega v$，于是阻抗为 $\frac{\tau_{yz}}{\dot{v}}=-\mu\frac{\cos j}{\beta}=-\rho\beta\times\cos j$。对于地壳，代表性的密度和剪切速度值分别为 $\rho=2.8$ 克/厘米^3 和 $\beta=3.5$ 公里/秒，因此，阻抗的量级为 10^6 c. g. s. 单位，所以，振幅为 100 巴（10^8 c. g. s. 单位）的应力波，对应于大约 100 厘米/秒的地面速度。但对于 SH 波，注意，随 $j\to\frac{\pi}{2}$（掠入射），阻抗 $\tau_{yz}/\dot{v}\to 0$。

第二，考虑一个声波（即流体中的 P 波），其中压力给定为 $P=$

$P_0\exp\{i\omega[px+(\alpha^{-1}\cos i)z-t]\}$。这时，由于 $\rho\ddot{u}=-\nabla P$，所以竖向质点速度为 $-i\omega\rho\dot{u}_z=-\partial P/\partial z$，而阻抗为 $P/\dot{u}_z=\rho\alpha/\cos i$。现在请注意，随 $i\to\frac{\pi}{2}$（掠入射），阻抗趋于无穷，这同 SH 波的变化情况形成鲜明对照。

把给出作为势 ϕ 和 ψ 的函数的物理变量的方程（5.12）和（5.13）化简，并用 p，ϕ，ψ，$\partial\phi/\partial z$ 和 $\partial\psi/\partial z$ 把它们写出来，得到

$$\text{对于}P\begin{cases}\text{位移}\left(i\omega p\phi,\ 0,\ \dfrac{\partial\phi}{\partial z}\right)\\ \text{牵引力}\left(2\rho\beta^2 i\omega p\dfrac{\partial\phi}{\partial z},\ 0,\right.\\ \qquad\left.-\rho(1-2\beta^2p^2)\omega^2\phi\right)\end{cases}\tag{5.20}$$

$$\text{对于}SV\begin{cases}\text{位移}\left(-\dfrac{\partial\psi}{\partial z},\ 0,\ i\omega p\psi\right)\\ \text{牵引力}\left(\rho(1-2\beta^2p^2)\omega^2\psi,\ 0,\right.\\ \qquad\left.2\rho\beta^2 i\omega p\dfrac{\partial\psi}{\partial z}\right).\end{cases}\tag{5.21}$$

我们的直接目标是求比值 B/A 和 C/A 的公式，以给出反射波和转换波的振幅，作为入射波振幅的函数。我们可以用的两个方程是，在 $z=0$ 时：

$$\begin{cases}\tau_{xz}=2\rho\beta^2 i\omega p\left(\dfrac{\partial\phi^{\text{入}}}{\partial z}+\dfrac{\partial\phi^{\text{反}}}{\partial z}\right)+\rho(1-2\beta^2p^2)\omega^2\psi^{\text{反}}=0,\\ \tau_{zz}=-\rho(1-2\beta^2p^2)\omega^2(\phi^{\text{入}}+\phi^{\text{反}})+2\rho\beta^2 i\omega p\dfrac{\partial\psi^{\text{反}}}{\partial z}=0.\end{cases}$$

把（5.16），（5.17），（5.19）代入，它们变为

$$2\rho\beta^2 p\frac{\cos i}{\alpha}(A-B)+\rho(1-2\beta^2p^2)C=0,\tag{5.22}$$

$$\rho(1-2\beta^2p^2)(A+B)+2\rho\beta^2p\frac{\cos j}{\beta}C=0, \qquad (5.23)$$

给出的解是

$$\frac{B}{A}=\frac{4\beta^4p^2\frac{\cos i}{\alpha}\frac{\cos j}{\beta}-(1-2\beta^2p^2)^2}{4\beta^4p^2\frac{\cos i}{\alpha}\frac{\cos j}{\beta}+(1-2\beta^2p^2)^2}, \qquad (5.24)$$

$$\frac{C}{A}=\frac{-4\beta^2p\frac{\cos i}{\alpha}(1-2\beta^2p^2)}{4\beta^4p^2\frac{\cos i}{\alpha}\frac{\cos j}{\beta}+(1-2\beta^2p^2)^2}. \qquad (5.25)$$

利用三角恒等式以及各弹性常数间的关系，可以导出上两式的许多不同形式。例如，$1-2\beta^2p^2$ 等于 $\cos 2j$。我们已选定用 p，$\alpha^{-1}\cos i$ 和 $\beta^{-1}\cos j$ 进行计算，因为在第九章我们将表明，这时的反射系数（5.24）和（5.25）可以很容易地推广到研究竖向不均匀的介质。

我们把比值 B/A 和 C/A 叫做“反射系数”，但实际上它们只是势的振幅比。在实践中，我们通常感兴趣的是位移（而有时是能量）的振幅比。对于传播的稳态 P 波，位移振幅是 ω（势振幅）$/\alpha$，同样，对于 S，位移振幅是 ω(势振幅)$/\beta$。因此，对于位移反射系数，我们仍需要当 $P\to P$ 的 B/A，当 $P\to S$ 转换时的 $\frac{C\alpha}{A\beta}$。我们还需要建立反射系数的符号约定，图 5.5 描述了我们的选择。

关于反射系数、转换系数、透射系数，已提出许许多多不同符号。幸而，需要解的问题常常造成只要求少数（一个或两个）特殊系数。在这些情况下，无须用广义符号，因为从上下文可以弄清楚，一个符号如 PP 是反射系数，不会造成关于想要何种特定的反射波与入射波组合的含糊。这正是现在具有自由面的固体半空间问题中的情况，只存在一种入射 P 波，并且只有一种 P

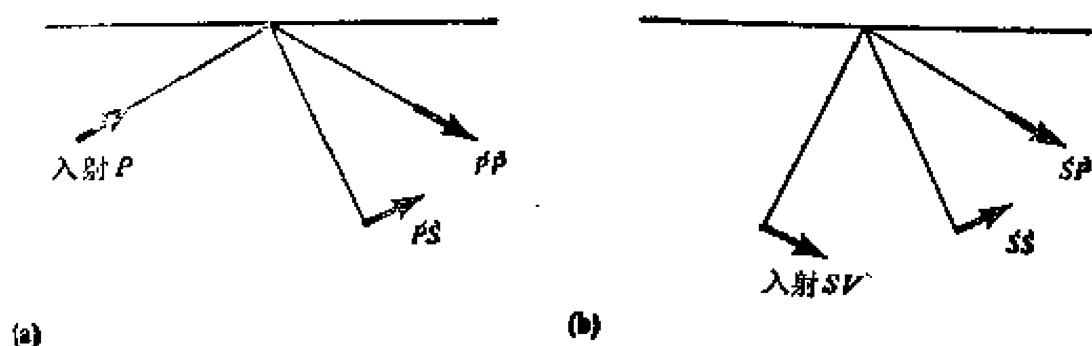


图 5.5

P 或 SV 入射于自由表面时，反射系数和转换系数的记号和符号约定。如果一个运动的向右的分量（即在传播的水平方向上），有与传播因子 $\exp[i\omega(px-t)]$ 一样的相位，则这个运动取为正的

波由它导出。然而，我们不久将讨论固体与固体的分界面，这时，P 波（和 S 波）从上面和下面都能入射。四种可能类型的 P-SV 波入射（P 或 SV，从上面或下面）中的每一种，都能产生所有四种类型的向外走的 P-SV 波，因此，仅仅这一个分界面的完全分析，就包含 16 个系数。所以，在现有问题中，采用能很容易地扩大到较复杂分界面的符号，是适宜的。我们将用 $\acute{P}\grave{P}$ 作为图 5.5a 中的 $P\to P$ 反射系数，$\acute{P}\grave{S}$ 作为 $P\to S$ 转换系数。在图 5.5b 中，$S\to P$ 转换由 $\acute{S}\grave{P}$ 给定，$S\to S$ 反射由 $\acute{S}\grave{S}$ 给定。这种升降符号的使用，直接指出想要的入射波→导出波的顺序，因为所有的波都从左向右运动。所以，升符（如 $\acute{P}$）表示上来的波，降符（如 $\grave{S}$）表示下去的波。把这些符号与图 5.5 的符号约定结合起来，我们在表 5.1 中列出对应于两种可能类型入射波的运动的严格向量形式。

由表 5.1 和方程（5.24），（5.25）得到

$$\acute{P}\grave{P}=\frac{-\left(\dfrac{1}{\beta^2}-2p^2\right)^2+4p^2\dfrac{\cos i}{\alpha}\dfrac{\cos j}{\beta}}{+\left(\dfrac{1}{\beta^2}-2p^2\right)^2+4p^2\dfrac{\cos i}{\alpha}\dfrac{\cos j}{\beta}},\qquad(5.26)$$

$$\acute{P}\grave{S}=\frac{4\frac{\alpha}{\beta}p\frac{\cos i}{\alpha}\left(\frac{1}{\beta^2}-2p^2\right)}{\left(\frac{1}{\beta^2}-2p^2\right)^2+4p^2\frac{\cos i}{\alpha}\frac{\cos j}{\beta}}. \tag{5.27}$$

在 SV 波入射于自由面的情况下，我们可以预期到反射 P 波 ($\acute{S}\grave{P}$) 和反射 SV 波 ($\acute{S}\grave{S}$)。根据表 5.1 中的向量位移，我们得到，在 $z=0$ 上 $\tau_{zx}=0$ 的条件简化为方程

$$-2p\alpha\beta\frac{\cos i}{\alpha}\acute{S}\grave{P}+(1-2\beta^2p^2)(1-\acute{S}\grave{S})=0, \tag{5.28}$$

和在 $z=0$ 上 $\tau_{zz}=0$ 的条件简化为

$$-(1-2\beta^2p^2)\acute{S}\grave{P}+\frac{2\beta^3p}{\alpha}\frac{\cos j}{\beta}(1+\acute{S}\grave{S})=0. \tag{5.29}$$

对 (5.28) 和 (5.29) 求解，我们得到

$$\acute{S}\grave{P}=\frac{4\frac{\beta}{\alpha}p\frac{\cos j}{\beta}\left(\frac{1}{\beta^2}-2p^2\right)}{\left(\frac{1}{\beta^2}-2p^2\right)^2+4p^2\frac{\cos i}{\alpha}\frac{\cos j}{\beta}}, \tag{5.30}$$

$$\acute{S}\grave{S}=\frac{\left(\frac{1}{\beta^2}-2p^2\right)^2-4p^2\frac{\cos i}{\alpha}\frac{\cos j}{\beta}}{\left(\frac{1}{\beta^2}-2p^2\right)^2+4p^2\frac{\cos i}{\alpha}\frac{\cos j}{\beta}}. \tag{5.31}$$

在这个简单的固体半空间自由面反射例子中，我们现已得到矩阵

$$\begin{pmatrix}\acute{P}\grave{P} & \acute{S}\grave{P}\\ \acute{P}\grave{S} & \acute{S}\grave{S}\end{pmatrix}$$

的每个分量的特别公式。这个矩阵概括着所有可能的反射系数，叫做散射矩阵，在图 5.6 中画出它的每个分量随慢度的变化，对于这个非常简单的分界面，发现分量的变化十分剧烈。现只表示出区间 $0\leqslant p<1/\alpha$ 上的情况。对于 0.14 至0 .195 秒/公里区间上的慢度，请注意反射运动几乎都与入射运动的类型相反，即入射 P 几乎全部转换为反射 SV，而入射 SV 几乎全部转换为反射

表 5.1 图 5.5 所示类型的 P—SV 平面波问题中包含的向量位移的明确表达式

入射波		散射波	
类型	位移	类型	位移
上行P	$S(\sin i,0,-\cos i)\exp\left[i\omega\left(\frac{\sin i}{\alpha}x-\frac{\cos i}{\alpha}z-t\right)\right]$	下行P	$S(\sin i,0,\cos i)\acute{P}\grave{P}\exp\left[i\omega\left(\frac{\sin i}{\alpha}x+\frac{\cos i}{\alpha}z-t\right)\right]$
		下行SV	$S(\cos j,0,-\sin j)\acute{P}\grave{S}\exp\left[i\omega\left(\frac{\sin j}{\beta}x+\frac{\cos j}{\beta}z-t\right)\right]$
上行SV	$S(\cos j,0,\sin j)\exp\left[i\omega\left(\frac{\sin j}{\beta}x-\frac{\cos j}{\beta}z-t\right)\right]$	下行P	$S(\sin i,0,\cos i)\acute{S}\grave{P}\exp\left[i\omega\left(\frac{\sin i}{\alpha}x+\frac{\cos i}{\alpha}z-t\right)\right]$
		下行SV	$S(\cos j,0,-\sin j)\acute{S}\grave{S}\exp\left[i\omega\left(\frac{\sin j}{\beta}x+\frac{\cos j}{\beta}z-t\right)\right]$

说明：这里的入射波振幅 S 可用两种方法考虑：作为稳态波的位移振幅，或者，在入射波是与位移阶梯 S 相应的质点速度脉冲情况下，作为质点速度的 Fourier 变换的振幅。

对于位移振幅比，引进了带升降符号的记号。因而它也可以应用于质点速度振幅比和质点加速度振幅比（因为它们包含用同样的频率幂来标度散射波和入射波）。但是，对于势的比值，或能通量的比值，系数是不同的。在需要这些比值的地方[如补充 6.6 和方程(5.41)]，我们将保留带升降符号的位移振幅比符号，并乘以适当的标度校正。

P。在其它分界面问题（固体与液体间的分界面，等等）中，可以出现远为复杂得多的变化，地震学家们经常致力于极其详细地求这些变化的值，以便解释某项特殊资料。因此，为方便起见，我们将给出地震学中另外两种重要分界面的系数公式。很遗憾，这些公式出版上的印刷错误有长期历史（参看 Hales 和 Robert

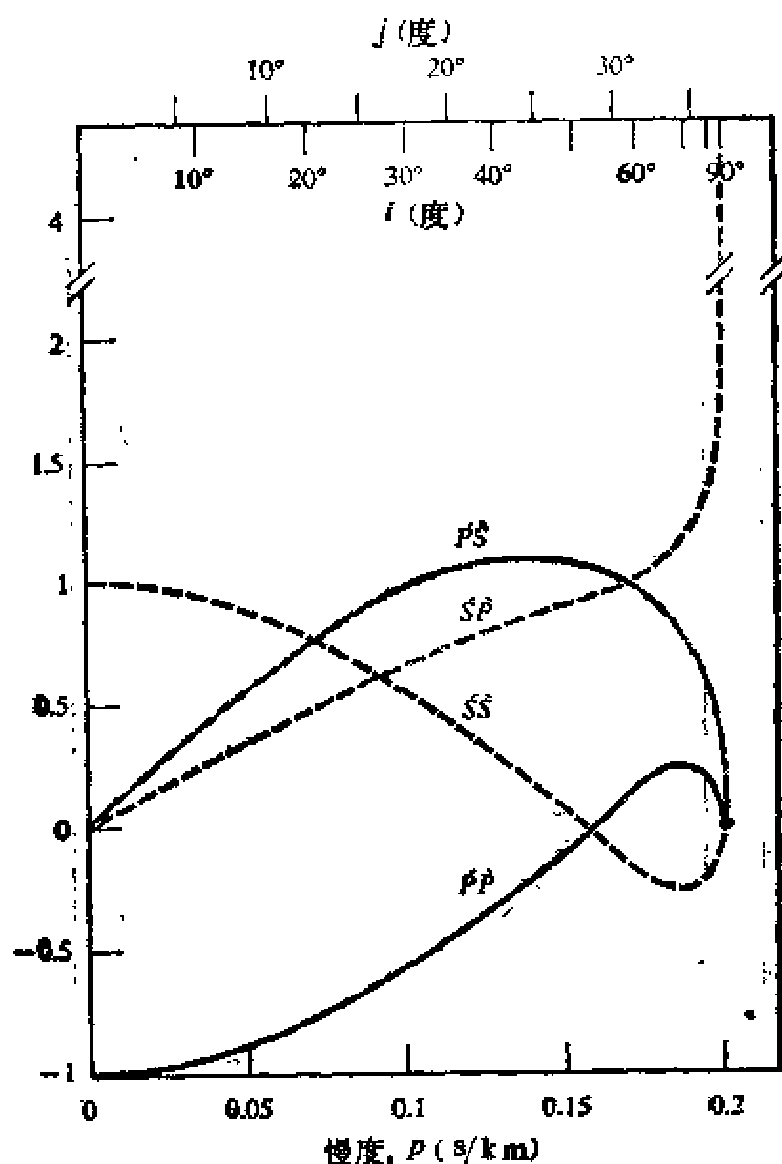


图 5.6

自由面上四种可能的 P-SV 反射系数（位移振幅比）随水平慢度 p 的变化。请参看图 5.5。在此情况下，$\alpha=5$ 公里/秒，$\beta=3$ 公里/秒，我们限定 p 位于区间 $0\leqslant p<1/\alpha$ 内，以便使入射角 i 总是实数。当 $i=90°$ 时，$\acute{S}\grave{P}$ 非常大（~4.1）

在 1974 年，或 Young 和 Braile 在 1976 年的评论)。为使读者在求特殊系数时有信心，在结束本节之前，我们将进行有益的检验，来证实已经给过的公式是正确的。

5.2.3 *SH* 波的反射和透射

应力分量 τ_{zz} 和 τ_{zx} 不是由表 5.2 中所列的位移激发的，所以，唯一能用的动力学边界条件是，穿过 $z=0$ 时 τ_{yz} 连续。位移的 y 分量也是连续的，我们由 (5.14) 得到散射矩阵

表 5.2　图 5.7 所示 *SH* 平面波问题的向量位移

入射波	
类　型	位　　移
下行 *SH*	$(0,S,0)\exp\left[i\omega\left(px+\dfrac{\cos j_1}{\beta}z-t\right)\right]$
上行 *SH*	$(0,S,0)\exp\left[i\omega\left(px-\dfrac{\cos j_2}{\beta_2}z-t\right)\right]$
散射波	
类　型	位　　移
上行 *SH*	$(0,S,0)\ \grave{S}\acute{S}\exp\left[i\omega\left(px-\dfrac{\cos j_1}{\beta_1}z-t\right)\right]$
下行 *SH*	$(0,S,0)\ \grave{S}\grave{S}\exp\left[i\omega\left(px+\dfrac{\cos j_2}{\beta_2}z-t\right)\right]$
上行 *SH*	$(0,S,0)\ \acute{S}\acute{S}\exp\left[i\omega\left(px-\dfrac{\cos j_1}{\beta_1}z-t\right)\right]$
下行 *SH*	$(0,S,0)\ \acute{S}\grave{S}\exp\left[i\omega\left(px+\dfrac{\cos j_2}{\beta_2}z-t\right)\right]$

$$\begin{pmatrix} \grave{S}\acute{S} & \acute{S}\acute{S} \\ \grave{S}\grave{S} & \acute{S}\grave{S} \end{pmatrix}$$

的元素是

$$\begin{aligned} &\grave{S}\acute{S}=\frac{\rho_1\beta_1\cos j_1-\rho_2\beta_2\cos j_2}{\Delta}, \quad \acute{S}\acute{S}=\frac{2\rho_2\beta_2\cos j_2}{\Delta}, \\ &\grave{S}\grave{S}=\frac{2\rho_1\beta_1\cos j_1}{\Delta}, \qquad\qquad \acute{S}\grave{S}=-\grave{S}\acute{S}, \end{aligned} \tag{5.32}$$

其中 $\Delta=\rho_1\beta_1\cos j_1+\rho_2\beta_2\cos j_2$.

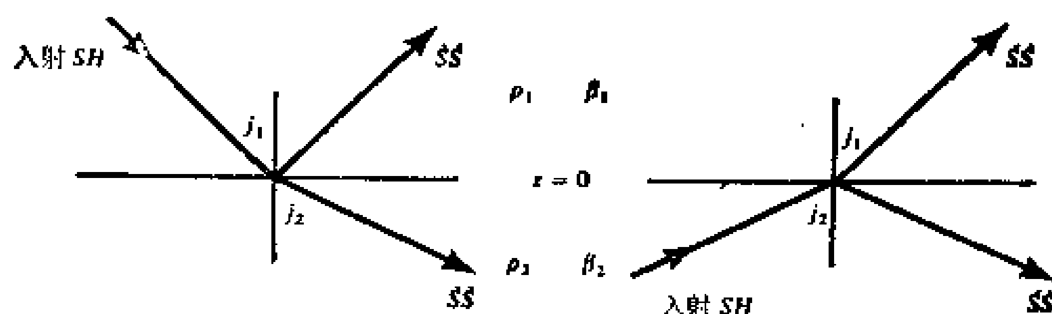


图 5.7
入射 SH 波问题中出现的四种可能的反射系数和透射系数的符号

5.2.4 P-SV 在固体-固体分界面上的反射与透射

散射矩阵现在是

$$\begin{pmatrix} \grave{P}\acute{P} & \grave{S}\acute{P} & \acute{P}\acute{P} & \acute{S}\acute{P} \\ \grave{P}\acute{S} & \grave{S}\acute{S} & \acute{P}\acute{S} & \acute{S}\acute{S} \\ \grave{P}\grave{P} & \grave{S}\grave{P} & \acute{P}\grave{P} & \acute{S}\grave{P} \\ \grave{P}\grave{S} & \grave{S}\grave{S} & \acute{P}\grave{S} & \acute{S}\grave{S} \end{pmatrix},$$

并且它可由位移和牵引力的 x 和 z 分量的连续性得到。此散射矩阵的每一列，代表由一种特定类型的入射波从分界面散射出去的四种波。因此，欲求出所有列的值，似乎必须建立四个方程组，每组包括四个方程，每个方程含有四个未知量。除非细心利用问题中一切可用的对称性，否则，所有 16 个系数的完全表述，可能包含大量的代数运算。用我们现在描述的、以 Nafe 的工作(1957) 为基础的方法，使这种计算量减到最小。

我们将假定所有四种可能的入射波共同存在，如图 5.9 所示，位移振幅分别为 $\grave{P}_1$，$\grave{S}_1$，$\acute{P}_2$，$\acute{S}_2$。现在脚标是必要的，以便区分波传播的介质。假定所有的波具有同样的水平慢度，四种散射波具有位移振幅 $\acute{P}_1$，$\acute{S}_1$，$\grave{P}_2$，$\grave{S}_2$。根据 u_x，u_z，τ_{zx}，τ_{zz} 的连续性，我们得到四个方程

$$
\begin{aligned}
&\sin i_1(\grave{P}_1+\acute{P}_1)+\cos j_1(\grave{S}_1+\acute{S}_1)\\
&=\sin i_2(\grave{P}_2+\acute{P}_2)+\cos j_2(\grave{S}_2+\acute{S}_2),\\
&\cos i_1(\grave{P}_1-\acute{P}_1)-\sin j_1(\grave{S}_1-\acute{S}_1)\\
&=\cos i_2(\grave{P}_2-\acute{P}_2)-\sin j_2(\grave{S}_2-\acute{S}_2),\\
&2\rho_1\beta_1^2 p\cos i_1(\grave{P}_1-\acute{P}_1)+\rho_1\beta_1(1-2\beta_1^2p^2)(\grave{S}_1-\acute{S}_1)\\
&=2\rho_2\beta_2^2 p\cos i_2(\grave{P}_2-\acute{P}_2)+\rho_2\beta_2(1-2\beta_2^2p^2)(\grave{S}_2-\acute{S}_2),\\
&\rho_1\alpha_1(1-2\beta_1^2p^2)(\grave{P}_1+\acute{P}_1)-2\rho_1\beta_1^2p\cos j_1(\grave{S}_1+\acute{S}_1)\\
&=\rho_2\alpha_2(1-2\beta_2^2p^2)(\grave{P}_2+\acute{P}_2)-2\rho_2\beta_2^2p\cos j_2(\grave{S}_2+\acute{S}_2),
\end{aligned}
\tag{5.33}
$$

重新整理这些方程，使散射波都在左边，入射波都在右边，我们得到

$$
\boldsymbol{M}\begin{pmatrix}\acute{P}_1\\ \acute{S}_1\\ \grave{P}_2\\ \grave{S}_2\end{pmatrix}=\boldsymbol{N}\begin{pmatrix}\grave{P}_1\\ \grave{S}_1\\ \acute{P}_2\\ \acute{S}_2\end{pmatrix}. \tag{5.34}
$$

其中系数矩阵为

$$
\boldsymbol{M}=\begin{pmatrix}
-\alpha_1 p & -\cos j_1 & \alpha_2 p & \cos j_2\\
\cos i_1 & -\beta_1 p & \cos i_2 & -\beta_2 p\\
2\rho_1\beta_1^2 p\cos i_1 & \rho_1\beta_1(1-2\beta_1^2p^2) & 2\rho_2\beta_2^2p\cos i_2 & \rho_2\beta_2(1-2\beta_2^2p^2)\\
-\rho_1\alpha_1(1-2\beta_1^2p^2) & 2\rho_1\beta_1^2p\cos j_1 & \rho_2\alpha_2(1-2\beta_2^2p^2) & -2\rho_2\beta_2^2p\cos j_2
\end{pmatrix}, \tag{5.35}
$$

$$
\boldsymbol{N}=\begin{pmatrix}
\alpha_1 p & \cos j_1 & -\alpha_2 p & -\cos j_2\\
\cos i_1 & -\beta_1 p & \cos i_2 & -\beta_2 p\\
2\rho_1\beta_1^2 p\cos i_1 & \rho_1\beta_1(1-2\beta_1^2p^2) & 2\rho_2\beta_2^2p\cos i_2 & \rho_2\beta_2(1-2\beta_2^2p^2)\\
\rho_1\alpha_1(1-2\beta_1^2p^2) & -2\rho\beta_1^2p\cos j_1 & -\rho_2\alpha_2(1-2\beta_2^2p^2) & 2\rho_2\beta_2^2p\cos j_2
\end{pmatrix}. \tag{5.36}
$$

表 5.3　　图 5.8 所示(固体对固体)$P—SV$ 平面波问题的向量位移

入射波 类型	入射波 位移	散射波 类型	散射波 位移
下行 P	$S(\sin i_1, 0, \cos i_1)\exp\left[i\omega\left(px+\frac{\cos i_1}{\alpha_1}z-t\right)\right]$	上行 P	$S(\sin i_1, 0, -\cos i_1)\grave{P}\acute{P}\exp\left[i\omega\left(px-\frac{\cos i_1}{\alpha_1}z-t\right)\right]$
		上行 SV	$S(\cos j_1, 0, \sin j_1)\grave{P}\acute{S}\exp\left[i\omega\left(px-\frac{\cos j_1}{\beta_1}z-t\right)\right]$
		下行 P	$S(\sin i_2, 0, \cos i_2)\grave{P}\grave{P}\exp\left[i\omega\left(px+\frac{\cos i_2}{\alpha_2}z-t\right)\right]$
		下行 SV	$S(\cos j_2, 0, -\sin j_2)\grave{P}\grave{S}\exp\left[i\omega\left(px+\frac{\cos j_2}{\beta_2}z-t\right)\right]$
下行 SV	$S(\cos j_1, 0, -\sin j_1)\exp\left[i\omega\left(px+\frac{\cos j_1}{\beta_1}z-t\right)\right]$	上行 P	$S(\sin i_1, 0, -\cos i_1)\grave{S}\acute{P}\exp\left[i\omega\left(px-\frac{\cos i_1}{\alpha_1}z-t\right)\right]$
		上行 SV	$S(\cos j_1, 0, \sin j_1)\grave{S}\acute{S}\exp\left[i\omega\left(px-\frac{\cos j_1}{\beta_1}z-t\right)\right]$
		下行 P	$S(\sin i_2, 0, \cos i_2)\grave{S}\grave{P}\exp\left[i\omega\left(px+\frac{\cos i_2}{\alpha_2}z-t\right)\right]$
		下行 SV	$S(\cos j_2, 0, -\sin j_2)\grave{S}\grave{S}\exp\left[i\omega\left(px+\frac{\cos j_2}{\beta_2}z-t\right)\right]$

续表

入射波		散射波	
类型	位移	类型	位移
上行P	$S(\sin i_2, 0, -\cos i_2)\exp\left[i\omega\left(px-\frac{\cos i_2}{\alpha_2}z-t\right)\right]$	上行P	$S(\sin i_1, 0, -\cos i_1)\acute{P}\acute{P}\exp\left[i\omega\left(px-\frac{\cos i_1}{\alpha_1}z-t\right)\right]$
		上行SV	$S(\cos j_1, 0, \sin j_1)\acute{P}\acute{S}\exp\left[i\omega\left(px-\frac{\cos j_1}{\beta_1}z-t\right)\right]$
		下行P	$S(\sin i_2, 0, \cos i_2)\acute{P}\grave{P}\exp\left[i\omega\left(px+\frac{\cos i_2}{\alpha_2}z-t\right)\right]$
		下行SV	$S(\cos j_2, 0, -\sin j_2)\acute{P}\grave{S}\exp\left[i\omega\left(px+\frac{\cos j_2}{\beta_2}z-t\right)\right]$
上行SV	$S(\cos j_2, 0, \sin j_2)\exp\left[i\omega\left(px-\frac{\cos j_2}{\beta_2}z-t\right)\right]$	上行P	$S(\sin i_1, 0, -\cos i_1)\acute{S}\acute{P}\exp\left[i\omega\left(px-\frac{\cos i_1}{\alpha_1}-t\right)\right]$
		上行SV	$S(\cos j_1, 0, \sin j_1)\acute{S}\acute{S}\exp\left[i\omega\left(px-\frac{\cos j_1}{\beta_1}z-t\right)\right]$
		下行P	$S(\sin i_2, 0, \cos i_2)\acute{S}\grave{P}\exp\left[i\omega\left(px+\frac{\cos i_2}{\alpha_2}z-t\right)\right]$
		下行SV	$S(\cos j_2, 0, -\sin j_2)\acute{S}\grave{S}\exp\left[i\omega\left(px+\frac{\cos j_2}{\beta_2}z-t\right)\right]$

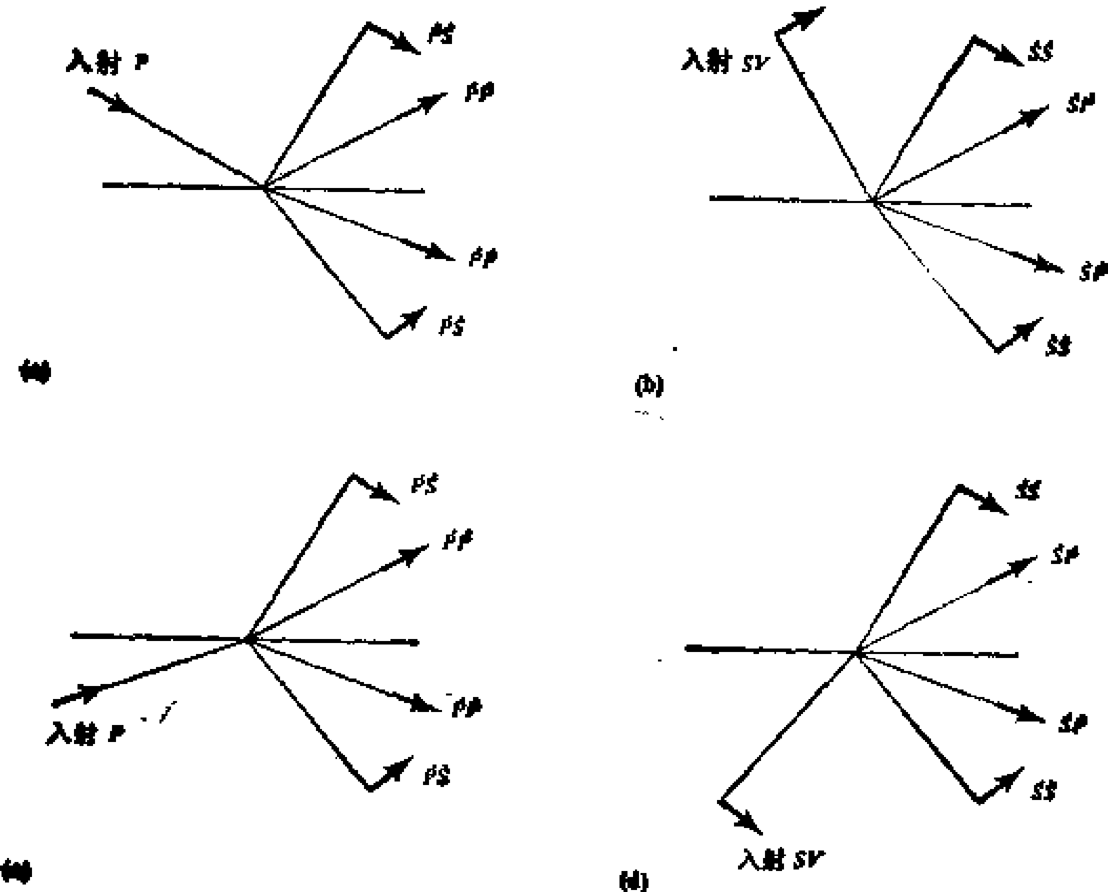


图 5.8

在两个不同固体半空间密接分界面上，$P—SV$ 波问题中出现的 16 个可能的反射与透射的符号。短箭头表示质点运动方向

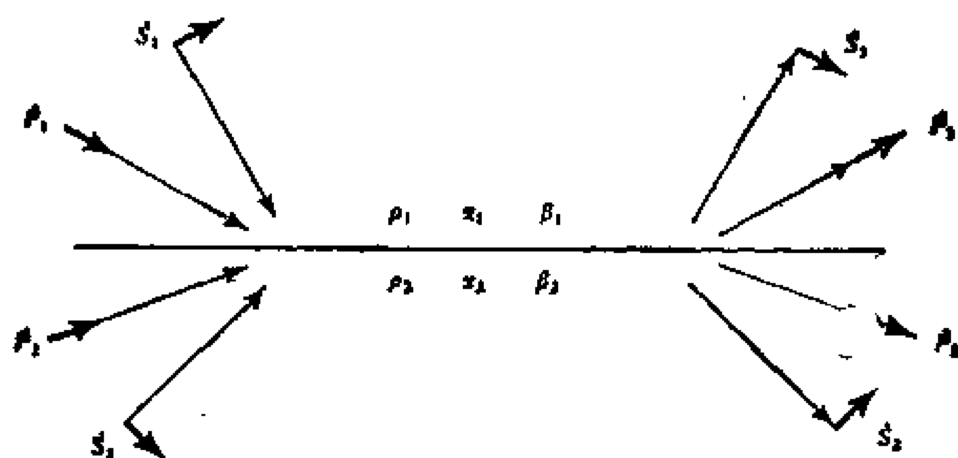


图 5.9

入射的和散射的 $P—SV$ 平面波的完整系统，用它可迅速求得散射矩阵。短箭头表示质点运动方向，长箭头表示波传播方向

在 $\grave{P}_1=1$ 和 $\grave{S}_1=\acute{P}_2=\acute{S}_2=0$ 的情况下，散射矩阵的第一列简单地变为 $(\acute{P}_1,\ \acute{S}_1,\ \grave{P}_2,\ \grave{S}_2)^T$，即变为 $\boldsymbol{M}^{-1}\boldsymbol{N}$ 的第一列。对其它三列，有类似的结果，因此，完整的散射矩阵由下式直接给定：

$$
\begin{pmatrix}
\grave{P}\acute{P} & \grave{S}\acute{P} & \acute{P}\acute{P} & \acute{S}\acute{P} \\
\grave{P}\acute{S} & \grave{S}\acute{S} & \acute{P}\acute{S} & \acute{S}\acute{S} \\
\grave{P}\grave{P} & \grave{S}\grave{P} & \acute{P}\grave{P} & \acute{S}\grave{P} \\
\grave{P}\grave{S} & \grave{S}\grave{S} & \acute{P}\grave{S} & \acute{S}\grave{S}
\end{pmatrix}=\boldsymbol{M}^{-1}\boldsymbol{N}. \qquad (5.37)
$$

幸好，$\boldsymbol{M}$ 与 $\boldsymbol{N}$ 间的许多相似性，导致散射矩阵每个分量的极其简单的公式。详细说，这些公式反复使用下列变量：

$$
\begin{aligned}
a&=\rho_2(1-2\beta_2^2p^2)-\rho_1(1-2\beta_1^2p^2),\\
b&=\rho_2(1-2\beta_2^2p^2)+2\rho_1\beta_1^2p^2,\\
c&=\rho_1(1-2\beta_1^2p^2)+2\rho_2\beta_2^2p^2,\\
d&=2(\rho_2\beta_2^2-\rho_1\beta_1^2),
\end{aligned}
$$

并且还反复使用同余弦有关的项

$$
E=b\frac{\cos i_1}{\alpha_1}+c\frac{\cos i_2}{\alpha_2},\qquad F=b\frac{\cos j_1}{\beta_1}+c\frac{\cos j_2}{\beta_2},
$$

$$
G=a-d\frac{\cos i_1}{\alpha_1}\frac{\cos j_2}{\beta_2},\quad H=a-d\frac{\cos i_2}{\alpha_2}\frac{\cos j_1}{\beta_1},
$$

$$
D=EF+GHp^2=(\det\boldsymbol{M})/(\alpha_1\alpha_2\beta_1\beta_2). \qquad (5.38)
$$

主要公式是

$$
\grave{P}\acute{P}=\left[\left(b\frac{\cos i_1}{\alpha_1}-c\frac{\cos i_2}{\alpha_2}\right)F-\left(a+d\frac{\cos i_1}{\alpha_1}\frac{\cos j_2}{\beta_2}\right)Hp^2\right]\Big/D,
$$

$$
\grave{P}\acute{S}=-2\frac{\cos i_1}{\alpha_1}\left(ab+cd\frac{\cos i_2}{\alpha_2}\frac{\cos j_2}{\beta_2}\right)p\alpha_1/(\beta_1D),
$$

$$
\grave{P}\grave{P}=2\rho_1\frac{\cos i_1}{\alpha_1}F\alpha_1/(\alpha_2D),
$$

$$
\grave{P}\grave{S}=2\rho_1\frac{\cos i_1}{\alpha_1}Hp\alpha_1/(\beta_2D),
$$

$$\grave{S}\acute{P} = -2\frac{\cos j_1}{\beta_1}\left(ab + cd\frac{\cos i_2}{\alpha_2}\frac{\cos j_2}{\beta_2}\right)p\beta_1/(\alpha_1 D),$$

$$\grave{S}\acute{S} = -\left[\left(b\frac{\cos j_1}{\beta_1} - c\frac{\cos j_2}{\beta_2}\right)E - \left(a + d\frac{\cos i_2}{\alpha_2}\frac{\cos j_1}{\beta_1}\right)Gp^2\right]\Big/ D,$$

$$\grave{S}\grave{P} = -2\rho_1\frac{\cos j_1}{\beta_1}Gp\beta_1/(\alpha_2 D),$$

$$\grave{S}\grave{S} = 2\rho_1\frac{\cos j_1}{\beta_1}E\beta_1/(\beta_2 D),$$

$$\acute{P}\acute{P} = 2\rho_2\frac{\cos i_2}{\alpha_2}F\alpha_2/(\alpha_1 D),$$

$$\acute{P}\acute{S} = -2\rho_2\frac{\cos i_2}{\alpha_2}Gp\alpha_2/(\beta_1 D),$$

$$\acute{P}\grave{P} = -\left[\left(b\frac{\cos i_1}{\alpha_1} - c\frac{\cos i_2}{\alpha_2}\right)F + \left(a + d\frac{\cos i_2}{\alpha_2}\frac{\cos j_1}{\beta_1}\right)Gp^2\right]\Big/ D,$$

$$\acute{P}\grave{S} = 2\frac{\cos i_2}{\alpha_2}\left(ac + bd\frac{\cos i_1}{\alpha_1}\frac{\cos j_1}{\beta_1}\right)p\alpha_2/(\beta_2 D),$$

$$\acute{S}\acute{P} = 2\rho_2\frac{\cos j_2}{\beta_2}Hp\beta_2/(\alpha_1 D),$$

$$\acute{S}\acute{S} = 2\rho_2\frac{\cos j_2}{\beta_2}E\beta_2/(\beta_1 D),$$

$$\acute{S}\grave{P} = 2\frac{\cos j_2}{\beta_2}\left(ac + bd\frac{\cos i_1}{\alpha_1}\frac{\cos j_1}{\beta_1}\right)p\beta_2/(\alpha_2 D),$$

$$\acute{S}\grave{S} = \left[\left(b\frac{\cos j_1}{\beta_1} - c\frac{\cos j_2}{\beta_2}\right)E + \left(a + d\frac{\cos i_1}{\alpha_1}\frac{\cos j_2}{\beta_2}\right)Hp^2\right]\Big/ D. \qquad (5.39)$$

5.2.5 能通量

对于在均匀半空间之间的界面上入射的平面波，分界面不能

存储能量。因此，离开界面的能通量必定与入射波的相等。

对于具有振幅 S 和传播因子 $\exp[i\omega(\boldsymbol{s}\cdot\boldsymbol{x}-t)]$ 的稳态位移 P 波，实际的（实数的）位移振幅是 $S\cos[\omega(\boldsymbol{s}\cdot\boldsymbol{x}-t)]$。这时 $\rho\alpha S^2\omega^2\sin^2[\omega(\boldsymbol{s}\cdot\boldsymbol{x}-t)]$ 是穿过波阵面单位面积的能通量（见5.1节）。必须将此结果乘以 $\cos i$，才能得到波以 i 角入射的水平界面单位面积上的能通量（因为只涉及到波阵面面积的 $\cos i$）。同理，S 波的能通量是 $\rho\beta\cos j S^2\omega^2\sin^2[\omega(\boldsymbol{s}\cdot\boldsymbol{x}-t)]$。因为我们前面已经得到的反射系数和透射系数，是关于位移的，所以，比如说，对于图5.8a所示散射波系，进来的和出去的能通量相等，给出

$$\begin{aligned}\rho_1\alpha_1\cos i_1=\rho_1\alpha_1\cos i_1(\grave{P}\acute{P})^2+\rho_1\beta_1\cos j_1(\grave{P}\acute{S})^2\\ +\rho_2\alpha_2\cos i_2(\grave{P}\grave{P})^2+\rho_2\beta_2\cos j_2(\grave{P}\grave{S})^2\end{aligned}\tag{5.40}$$

方程（5.40）是对于固体同固体分界面的散射矩阵第一列的限制条件。要把它简化，可使用新的变量，即位移×（密度×传播速度×入射角的余弦）$^{\frac{1}{2}}$。用这些换算的位移（它们与能通量的平方根成正比），散射矩阵是幺正的 Hermite 矩阵。这个性质可由 Frasier（1970）给出的方程予以证明，并由 Kennett 等（1978）进行了广泛研究。

例如，与前面 $\acute{P}\grave{S}$ 相应的新反射系数是

$$\frac{\text{下行 } SV \text{ 波的位移振幅}\times(\rho_2\beta_2\cos j_2)^{\frac{1}{2}}}{\text{入射上行 } P \text{ 波位移振幅}\times(\rho_2\alpha_2\cos i_2)^{\frac{1}{2}}}$$

（参看图5.8c），它等于 $\acute{P}\grave{S}(\beta_2\cos j_2)^{\frac{1}{2}}/(\alpha_2\cos i_2)^{\frac{1}{2}}$。这个散射矩阵的完整形式是

$$\boldsymbol{S}=\begin{pmatrix}\grave{P}\acute{P} & \grave{S}\acute{P}\left(\frac{\alpha_1\cos i_1}{\beta_1\cos j_1}\right)^{1/2} & \acute{P}\acute{P}\left(\frac{\rho_1\alpha_1\cos i_1}{\rho_2\alpha_2\cos i_2}\right)^{1/2} & \acute{S}\acute{P}\left(\frac{\rho_1\alpha_1\cos i_1}{\rho_2\beta_2\cos j_2}\right)^{1/2}\\ \grave{P}\acute{S}\left(\frac{\beta_1\cos j_1}{\alpha_1\cos i_1}\right)^{1/2} & \grave{S}\acute{S} & \acute{P}\acute{S}\left(\frac{\rho_1\beta_1\cos j_1}{\rho_2\alpha_2\cos i_2}\right)^{1/2} & \acute{S}\acute{S}\left(\frac{\rho_1\beta_1\cos j_1}{\rho_2\beta_2\cos j_2}\right)^{1/2}\\ \grave{P}\grave{P}\left(\frac{\rho_2\alpha_2\cos i_2}{\rho_1\alpha_1\cos i_1}\right)^{1/2} & \grave{S}\grave{P}\left(\frac{\rho_2\alpha_2\cos i_2}{\rho_1\beta_1\cos j_1}\right)^{1/2} & \acute{P}\grave{P} & \acute{S}\grave{P}\left(\frac{\alpha_2\cos i_2}{\beta_2\cos j_2}\right)^{1/2}\\ \grave{P}\grave{S}\left(\frac{\rho_2\beta_2\cos j_2}{\rho_1\alpha_1\cos i_1}\right)^{1/2} & \grave{S}\grave{S}\left(\frac{\rho_2\beta_2\cos j_2}{\rho_1\beta_1\cos j_1}\right)^{1/2} & \acute{P}\grave{S}\left(\frac{\beta_2\cos j_2}{\alpha_2\cos i_2}\right)^{1/2} & \acute{S}\grave{S}\end{pmatrix}\tag{5.41}$$

和

$$S = S^H = S^{-1}. \tag{5.42}$$

(我们用 S^H 表示 S 转置的复共轭。)

一旦 16 个系数 $\grave{P}\acute{P}$，$\grave{P}\acute{S}$ 等由 (5.37) 或 (5.39) 得到，便可用证实 S 满足 (5.42) 来检验它们。事实上，假定慢度慢到足以使所有角 i_1，j_1，i_2，j_2 都是实数，S 的各项（它们的定义已给出）也都是实数，于是 S 的转置矩阵也是 S 的逆矩阵。作为一个特殊例子，在 $(\rho_1, \alpha_1, \beta_1, \rho_2, \alpha_2, \beta_2, p) = (3, 6, 3.5, 4, 7, 4.2, 0.1)$ 情况下，我们得到

$$S = \begin{pmatrix} 0.1065 & -0.1766 & 0.9701 & -0.1277 \\ -0.1766 & -0.0807 & 0.1326 & 0.9720 \\ 0.9701 & 0.1326 & -0.0567 & 0.1950 \\ -0.1277 & 0.9720 & 0.1950 & 0.0309 \end{pmatrix}$$

并且这个特定矩阵确实具有性质 $S = S^T = S^{-1}$。

如果在计算 16 个系数时，用的参考水准是 $z_1 < 0$ 在上半空间，而 $z_2 > 0$ 在下半空间，则应得到有复数项的矩阵 S。这时必须引入额外的相位因子，来说明竖向参考面的移动。在此情况下，S 的复共轭转置矩阵（即 S^H）也是 S 的逆矩阵。最后我们要指出，如果在 $z_1 < z < z_2$ 范围内存在某个较复杂的过渡带（例如弹性性质的连续变化，或密接的有不同弹性常数的各均匀层构成的叠层），但在 z_1 以上和 z_2 以下的区域中是均匀的，则对整个过渡带仍然能确定散射矩阵 S，并且 S 仍是幺正的 Hermite 矩阵。这些性质是能量守恒、互易性和因果律的结果。

5.2.6 关于两种相似半空间之间反射和透射系数的一种有用近似

如果考虑的两个半空间有相似的性质，则可预料，保持相同传播方式的波的透射系数将很大（例如 $\grave{P}\grave{P}$，其入射波和透射波的传播方式都是下行 P），但所有其它方式的散射系数都将很小。因此，如果存在相当于 $\Delta\rho = \rho_2 - \rho_1$，$\Delta\alpha = \alpha_2 - \alpha_1$，$\Delta\beta = \beta_2 - \beta_1$

的性质跃变，并且比值 $\Delta\rho/\rho$，$\Delta\alpha/\alpha$，$\Delta\beta/\beta$ 远远小于 1（这里的 ρ，α，β，是两个半空间的密度和速度的平均值），则可以预料，象 $\acute{P}\grave{S}$，$\grave{S}\acute{P}$ 这些量将很小，但透射 $\grave{P}\grave{P}$ 和 $\acute{S}\acute{S}$ 的量级将近于 1。我们这里将对两个固体半空间的 P-SV 问题，推导密度和速度小跃变的一级效应，因为得到的近似公式（5.44）常常是异常精确的。它们给出对于 $\Delta\rho$，$\Delta\alpha$，$\Delta\beta$ 各自贡献的进一步的理解，Chapman（1976 a）已指出，这些公式在分析非均匀介质中的波时是重要的。

我们将假定，所有角度 i_1，i_2，j_1，j_2 都是实的，并且这些角中没有一个接近 90°。于是，根据联系 i_1 与 i_2，j_1 与 j_2 的 Snell 定律，得到

$$\Delta i = i_2 - i_1 = \tan i(\Delta\alpha/\alpha),\quad \Delta j = j_2 - j_1 = \tan j(\Delta\beta/\beta) \tag{5.43}$$

（速度跃变的一级近似）。将（5.38）中规定的各项展开以后，取跃变 $\Delta\rho$，$\Delta\alpha$，$\Delta\beta$ 的一级近似，代入（5.39），得到

$$\grave{P}\acute{P} = \frac{1}{2}(1-4\beta^2p^2)\frac{\Delta\rho}{\rho} + \frac{1}{2\cos^2 i}\frac{\Delta\alpha}{\alpha} - 4\beta^2p^2\frac{\Delta\beta}{\beta},$$

$$\grave{P}\acute{S} = \frac{-p\alpha}{2\cos j}\left[\left(1-2\beta^2p^2+2\beta^2\frac{\cos i}{\alpha}\frac{\cos j}{\beta}\right)\frac{\Delta\rho}{\rho} - \left(4\beta^2p^2-4\beta^2\frac{\cos i}{\alpha}\frac{\cos j}{\beta}\right)\frac{\Delta\beta}{\beta}\right],$$

$$\grave{P}\grave{P} = 1-\frac{1}{2}\frac{\Delta\rho}{\rho} + \left(\frac{1}{2\cos^2 i}-1\right)\frac{\Delta\alpha}{\alpha},$$

$$\grave{P}\grave{S} = \frac{p\alpha}{2\cos j}\left[\left(1-2\beta^2p^2-2\beta^2\frac{\cos i}{\alpha}\frac{\cos j}{\beta}\right)\frac{\Delta\rho}{\rho} - \left(4\beta^2p^2+4\beta^2\frac{\cos i}{\alpha}\frac{\cos j}{\beta}\right)\frac{\Delta\beta}{\beta}\right], \tag{5.44}$$

$$\grave{S}\acute{P} = \frac{\cos j}{\alpha}\frac{\beta}{\cos i}\grave{P}\acute{S},$$

$$\grave{S}\acute{S} = -\frac{1}{2}(1-4\beta^2p^2)\frac{\Delta\rho}{\rho} - \left(\frac{1}{2\cos^2 j}-4\beta^2p^2\right)\frac{\Delta\beta}{\beta},$$

$$\grave{S}\grave{P} = \frac{-\cos j}{\alpha}\frac{\beta}{\cos i}\grave{P}\grave{S},$$

$$\grave{S}\grave{S} = 1 - \frac{1}{2}\frac{\Delta\rho}{\rho} + \left(\frac{1}{2\cos^2 j} - 1\right)\frac{\Delta\beta}{\beta}.$$

只须改变跃变 $\Delta\rho$，$\Delta\alpha$，$\Delta\beta$ 的符号，很容易从上面给出的八个系数推演出另外八个系数。

(5.44) 中 $\Delta\beta/\beta$ 的系数有比 $\Delta\rho/\rho$，$\Delta\alpha/\alpha$ 的系数大的趋向，这意味着剪切波速的扰动在散射弹性波中相对有效。如果角 i（或 j）接近 90°，近似公式（5.44）将不成立，因为这时只要有速度的小跃变，就将导致 i（或 j）的大变化，甚至会出现波发生全部内反射的情况。Bortfeld（1961）以及 Richards 和 Frasier（1976）给出了一级近似（5.44）的应用。Chapman（1976 a）在一项关于性质随深度变化的介质中点源产生的波的重要研究中，已经指明如何处理（5.44）在 $i=90°$ 和 $j=90°$ 的奇异性。

5.2.7 平面波的反射和透射系数与频率无关

在本节中直到现在，我们只分析了频率为 ω 的稳态平面波（参看表 5.1—5.3），因此，在频率域已经得到反射系数和透射系数。但在系数公式（例如（5.26）、（5.32）、（5.39））中，似乎不存在同频率的关系。我们措词这样小心，使用“似乎”字眼，是因为在 5.3 节将看到，在我们已经得到的系数中，可以有一类依赖于频率的关系（包括与符号有关的相移）。然而，当入射角（指前面各 i，j，j_1，j_2，i_1，i_2）都为实数时，系数确实与频率无关。在此情况下，水平的相速度 p^{-1} 大于 P 和 S 的传播速率 α 和 β。这时的反射系数和透射系数都是实数，并且，它们与频率无关这个事实意味着，离开界面的波必有同入射波一样的脉冲形状（但有不同振幅）。这是一个非常特殊的性质，一般说，如果界面不是平面，或者如果波不是平面波，则不是这种情况。我们后面要描述的重要现象之一是，当入射波阵面是弯曲的（第六章）或

如果界面是稍微弯曲的（第九章）时，反射波或透射波的脉冲形状如何能与入射波的相区别。

5.3 非均匀波，相移和界面波

对于到现在为止我们已描述过的平面波，都意味着传播方向 l 是个其笛卡尔分量为实数的向量(平行于慢度 s)。在本节，我们将研究 l(或 s) 在深度方向的分量是虚数的情况。我们将看到，这种类型的波是可能的，它们的振幅随深度呈指数增大或减小。它们是非均匀波(后面按照(5.92)将给予正式定义)的例子，并且我们将仍利用其水平慢度 p，作为研究它们的性质的独立变量。

以前，我们对于 P 波求得 $s=(\sin i/\alpha,\ 0,\ \pm\cos i/\alpha)=(p,\ 0, \pm\sqrt{1/\alpha^2-p^2})$。如果 s 的深度分量是虚数，则 $p>1/\alpha$。就是说，水平相速度 p^{-1} 小于 P 波的传播速率。我们以前称作"$\sin i$"的量仍是实数，但现在大于 1，因此，角 i 不再是实的。如果 p 甚至更大，使得 $p>1/\beta>1/\alpha$，则相联系的 S 波也是非均匀波，其慢度 s 为$\left(p, 0, \pm\sqrt{\frac{1}{\beta^2}-p^2}\right)$。以前，我们研究过相位因子为 $\exp[i\omega(s\cdot x-t)]$的稳态平面波，其理解是，波在空间和时间中的实际扰动，由该相位因子的实部即 $\cos\omega(s\cdot x-t)$给定。但现在有虚的 s_z，波的实际扰动由类似 $\exp(i\omega s_z z)\ \cos\omega(px-t)$的因子表示，其中实数量 $\exp(i\omega s_z z)$依 ωs_z 是负的还是正的虚数，面给出随深度呈指数增大还是减小。前面我们发现，满足波动方程的要求简化为要求 $s^2=1/c^2$，对于 P 波 $c=\alpha=\sqrt{(\lambda+2\mu)/\rho}$，对于 S 波 $c=\beta=\sqrt{\mu/\rho}$。对于非均匀波，这个要求仍然成立，既然现在 $p=s_x>1/c$，$s^2=s_x^2+s_z^2=\frac{1}{c^2}$，所以我们看到，波动方程提供了基本理由，来说明当慢度的水平向分量充分大时，竖向分

量的慢度为虚数。

作为地震学中需要考虑非均匀波的一个例子，再次考虑图5.5 b所示平面波SV入射于自由面问题。我们在(5.30)和(5.31)中得到过转换系数$\acute{S}\grave{P}$和反射系数$\acute{S}\grave{S}$的公式，并用图5.6表示过，它们的值在区间$0\leqslant p<1/\alpha$内是p的函数。若$1/\alpha<p$，情况将如何？如果p大到$1/\beta<p$，则甚至SV波也是非均匀的，并且弄不清楚“入射波”指的是什么。但在区间$1/\alpha<p<1/\beta$内，SV波却有实的入射角$j=\sin^{-1}(\beta p)$。在此区间内，我们必须把$\cos j$看作正实数，但$\cos i/\alpha=\sqrt{\frac{1}{\alpha^2}-p^2}$是纯虚数。由于表5.1中涉及$\acute{S}\grave{P}$的项给出$P$波位移为

$$S(\sin i,\ 0,\ \cos i)\acute{S}\grave{P}\exp\left(i\omega\frac{\cos i}{\alpha}z\right)\exp\left[i\omega\left(\frac{\sin i}{\alpha}x-t\right)\right], \tag{5.45}$$

以及由于不能使P波随深度呈指数增大，于是有

$$\frac{\cos i}{\alpha}=\pm i\sqrt{p^2-\frac{1}{\alpha^2}},\ \text{依}\ \omega\gtrless 0. \tag{5.46}$$

因此，对于正的频率，我们发现(5.45)变为

$$S(\alpha p,\ 0, i\sqrt{\alpha^2p^2-1})\acute{S}\grave{P}\exp\left(-\omega\sqrt{p^2-\frac{1}{\alpha^2}}z\right)$$
$$\times\exp[i\omega(px-t)]. \tag{5.47}$$

只要我们把“$\cos i$”解释为(5.46)给出的虚数，则在(5.28)—(5.31)中推导$\acute{S}\grave{P}$和$\acute{S}\grave{S}$的步骤不变，于是现在系数$\acute{S}\grave{P}$和$\acute{S}\grave{S}$不再是实的。所以，当取(5.47)中向量分量的实部来获得物理位移时，我们发现存在一个相移量ϕ，对于水平分量$\phi=$相位$(\acute{S}\grave{P})$，对于竖向分量$\phi=\frac{\pi}{2}+$相位$(\acute{S}\grave{P})$。对于固定的p，所有正频率的相移相同，并且容易看出，对于所有负频率的相移赋

方向相反。

虽然导出的P波(5.47)是非均匀波，但反射的S波并不随深度减小，根据表5.1，由于$\cos j$是实的并等于$\sqrt{1-\beta^2p^2}$，故反射S波的位移是

$$S(\sqrt{1-\beta^2p^2},0,-\beta p)\acute{S}\grave{S}\exp\left[i\omega\left(px+\sqrt{\frac{1}{\beta^2}-p^2}z-t\right)\right]. \tag{5.48}$$

但由于$\acute{S}\grave{S}$的相移，反射S波的脉冲形状不再与入射波的相同。根据补充5.6中的论证，反射的脉冲形状，是入射脉冲形状及其Hilbert变换的线性组合。

补充5.5

相移：相位滞后和相位超前

一个传播波的相移，是由各种机制引起的。因此，在相位因子$\exp[i\omega(\mathbf{s}\cdot\mathbf{x}-t)]$中，我们可以定义由传播引起的相移为$\phi(\omega)=\omega\mathbf{s}\cdot\mathbf{x}$。这种相移叫做相位滞后，因为它等于在滞后$\mathbf{s}\cdot\mathbf{x}$的时间上求基本时间变量$\exp(-i\omega t)$的值，即$\exp[-i\omega(t-\mathbf{s}\cdot\mathbf{x})]$。

相移的另一个例子出现在方程(5.47)中，它表明，非均匀P波运动向下竖向分量的相位比传播方向上的水平分量大$\pi/2$。这也是相位滞后：最大向下位移比最大水平位移(沿传播方向)滞后时间$\frac{\pi}{2\omega}$。这是四分之一周期所滞后的时间，导致顺进的质点运动(参看问题5.4)。

相反，由SV波以大于$\arcsin(\beta/\alpha)$的角j在自由面入射引起的、在$\acute{S}\grave{S}$中出现的相移，是相位超前。这可由(5.31)看到，其中$\cos i$有个正的虚部，因而$\acute{S}\grave{S}$的相位是负的(见图5.10)，相应于在较早的时间上求$\exp(-i\omega t)$的值。

我们这里的全部要点是，相移的符号可以依赖于频率的符号(见(5.46))和我们在Fourier时间变换中的符号约定，但是指定"相位滞后"和"相位超前"是比较基本的，它常常更好地指明引起相移的现象的物理意义。因此，在5.5节我们将讨论衰减引起的相位滞后，而在第九章，我们将看到体波触及焦散时出现的相位超前。

补充5.6

Hilbert 变换和与频率无关的相位超前

如果函数$f=f(t)$的 Fourier 分量都超前一个相位$\pi/2$，则造成的时间域相位畸变函数是

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(\omega)\exp\left[-i\,\omega\left(t+\left|\frac{\pi}{2\omega}\right|\right)\right]d\omega$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(\omega)\exp\left(-i\frac{\pi}{2}\mathrm{sgn}(\omega)\right)\exp(-i\omega t)d\omega, \qquad (1)$$

其中依$\omega \gtrless 1$而有$\mathrm{sgn}(\omega)=\pm 1$。将$f(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)e^{i\omega\tau}d\tau$代入(1)得到等效公式

$$\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty} d\omega \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)\sin[\omega(\tau-t)]d\tau, \qquad (2)$$

Titchmarsh(1926)以及 Jeffreys 和 Jeffreys(1972) 把这叫做$f(t)$的关联函数。对(2) 中的ω进行积分，还发现下列形式

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f(\tau)}{\tau-t}d\tau, \qquad (3)$$

其中在$\tau=t$的奇异性，是通过取积分的主值，即消去比t稍大和稍小的τ所做的贡献来处理。

形式(3) 是$f(t)$的 Hilbert 变换的通用定义，我们用符号$\mathscr{H}[f(t)]$表示它。它还可以被看作褶积(用$*$表示)，因此，畸变信号的最后等效形式是

$$f(t) * \left(-\frac{1}{\pi t}\right). \qquad (4)$$

我们将一般地把(1) 一(4) 中的任何一个看作$f(t)$的 Hilbert 变换。实际上，要计算这个变换，最初形式(1) 是最直截了当的：Fourier 变换给出$f(\omega)$，而$\frac{\pi}{2}$相位超前使$f(\omega)$的实部和虚部互换(产生的虚部要改变符号)。这时，Fourier 逆变换回到所要求的$\mathscr{H}[f(t)]$。

注意

$$\mathscr{H}[f(t)]=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty} d\omega \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)\sin[\omega(\tau-t)]d\tau,$$

但是

$$f(t)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} d\omega \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)\cos[\omega(\tau-t)]d\tau.$$

如果对 Hilbert 变换对，即 $f(t)$ 和 $\mathscr{H}[f(t)]$，再求 Hilbert 变换，则产生的一对是$\mathscr{H}[f(t)]$和$-f(t)$。这个极性反向是两个 $\pi/2$ 相位超前的简单结果。

Arons 和 Yennie(1950)指出过，如果函数 $f(t)$ 经受一相位超前 ε，则产生的函数可由 $f(t)$及其 Hilbert 变换的线性组合来计算。这种相移的大量地震学实例，包括所有在诸如地球自由表面、海底、壳-幔界面、核-幔界面等不连续面上超临界反射或透射的平面波。Choy 和 Richards(1975)曾指出几个 SH 波和 SV 波地震图实例。线性组合中的常数可推导如下：

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(\omega)\exp[-i\varepsilon\operatorname{sgn}(\omega)]\exp(-i\omega t)d\omega$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(\omega)[\cos\varepsilon-i\operatorname{sgn}(\omega)\sin\varepsilon]\exp(-i\omega t)d\omega$$

$$=\cos\varepsilon f(t)+\sin\varepsilon\mathscr{H}[f(t)]。\quad (5)$$

最重要的 Hilbert 变换是 Dirac $\delta(t)$函数的 Hilbert 变换，它等于$(-1/\pi t)$。一个在 $0<t<T$ 为 1 而在其它处为零的箱形函数，有 Hilbert 变换$(-1/\pi)(\ln|t|-\ln|t-T|)$。如果 $t\ll T$，则箱形函数趋于 Heaviside 函数 $H(t)$，其 Hilbert 变换趋于$\left(-\frac{1}{\pi}\right)\ln\left|\frac{t}{T}\right|$。

注意，经 Hilbert 变换的函数，具有同原来函数一样的 Fourier 振幅谱。

在图5.10中，我们把 $\acute{S}\grave{P}$ 和 $\acute{S}\grave{S}$ 表示为区间 $0\leqslant p\leqslant 1/\beta$ 中 p 的函数，给出振幅和相位。

作为另一个需要利用非均匀波的例子，考虑如图 5.7 和方程(5.32)所描述的 SH 波的反射和透射。如果 $1/\beta_1<p$，在上部介质中将存在非均匀波，并且，假定我们仍选取

$$\frac{\cos j_1}{\beta_1}=+i\sqrt{p^2-\frac{1}{\beta_1^2}}\text{(在此情况下 }\omega>0\text{)},\qquad (5.49)$$

则此波离开分界面时衰减，因为这时 $1/\beta<p$，随 $z\to-\infty$ 有

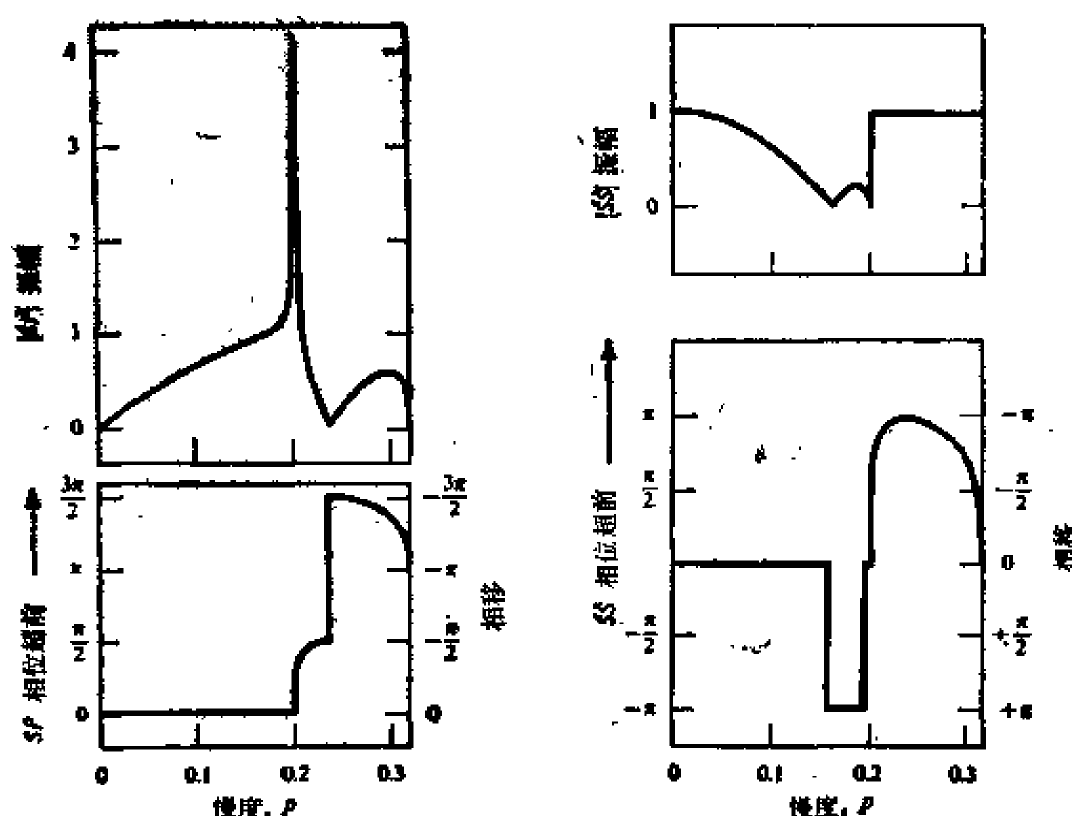


图 5.10

两个反射系数的振幅和相位，作为水平向慢度 p 的函数。这两个系数是 SV 波入射于自由面时的 $\acute{S}\grave{P}$ 和 $\acute{S}\grave{S}$，并取$\alpha=5$公里/秒，$\beta=3$公里/秒，因此，这些系数已在图 5.6 中对区间 $0\leqslant p\leqslant 1/\alpha$ 表示过。这里我们把区间扩大到 $0\leqslant p\leqslant 1/\beta$，以使非均匀$P$波在区间 $1/\alpha<p\leqslant 1/\beta$存在。我们的选择侧重于相位超前而不是相移，因为前者不依赖于频率符号和不依赖于我们的 Fourier 符号约定。实际画出的相位，是由(5.30)和(5.31)确定的 $\acute{S}\grave{P}$ 和 $\acute{S}\grave{S}$ 的相位。注意，系数中的零现在与相位中的 π 跃变相联系

$\exp[-i\omega(\beta^{-1}\cos j)z]\to 0$。如果下部介质(速度 β_2)是慢介质，并且SH 波从下向上入射，则可发生全内反射现象。对于 $1/\beta_1<p<1/\beta_2$区间内的慢度，入射波是普通运行的平面波，而散射波仍由表 5.2和公式(5.32)正确给出，不过其中的 $\cos j$ 由(5.49)解释。尤其要注意$|\acute{S}\grave{S}|=1$，但反射时有相移。[参看 Hudson(1962)对这个问题中能通量的分析。] 因为对于 $0\leqslant p<1/\beta_1$区间内的 p，其性质如此不同，所以很自然地把 $p=1/\beta_1$ 叫做临界值，$j_2=$

arcsin (β_2/β_1)叫做临界入射角。我们将把其慢度分量都是实数的波叫做均匀波，因此，在这个 SH 实例中，透射的波是均匀的还是非均匀的，要看 p 小于还是大于临界值。

一般说，如果由入射波在一特定分界面引起的波中，至少有一个是非均匀波，则所有与该界面相联系的反射系数和透射系数都将为复数。直到现在，我们已看到入射波为均匀波的例子。在这种情况下，至少有一种散射波必定也是均匀波；整个图象仍然是，能量向着界面传播，然后同另一半空间发生相互作用，最后从分界面传播开去。

下一个我们必须考虑的可能性是，所有同界面相互作用的平面波都是非均匀波。对于半空间自由面上的非均匀平面波 P 和 SV（图5.5，表5.1），我们考虑满足 $1/\alpha<1/\beta<p$ 的慢度。在此情况下，整个图象与我们所考虑过的非常不同，因为现在能量不再透过界面并从它散射，而是只有界面本身作为波道。对于半空间，我们不能让波无限大，因此，唯一允许的波动类型是离开界面呈指数减小；对于非均匀 P 波为（第一个因子是单位向量）

$$(\alpha p,\ 0,\ i\sqrt{\alpha^2p^2-1})\exp\left(-\omega\sqrt{p^2-\frac{1}{\alpha^2}}\,z\right)\exp[i\omega(px-t)],\tag{5.50}$$

对于非均匀 SV 波为（此处要注意单位向量）

$$(i\sqrt{\beta^2p^2-1},\ 0,\ -\beta p)\exp\left(-\omega\sqrt{p^2-\frac{1}{\beta^2}}\,z\right)\times\exp[i\omega(px-t)].\tag{5.51}$$

这两种波由边界条件（在 $z=0$ 有 $\tau_{zx}=\tau_{zz}=0$）耦合，并且，正如我们对均匀波所已看到的，波的振幅比是由这些条件决定的。这时的差别在于，我们没有确认耦合系统中的入射波，因此，如果不减少边界条件的数目，需要确定的振幅比就少了一个。如果存在(5.50)和(5.51)类型的波，其大小分别由 $\acute{P}$ 和 $\acute{S}$ 给定，则有

$$2p\alpha\beta i\sqrt{p^2-\frac{1}{\alpha^2}}\acute{P}+(1-2\beta^2p^2)\acute{S}=0$$

$$(\text{据 } z=0 \text{ 处 } \tau_{zx}=0) \tag{5.52}$$

和

$$(1-2\beta^2p^2)\acute{P}-2\left(\beta^3\frac{p}{\alpha}\right)i\sqrt{p^2-\frac{1}{\beta^2}}\acute{S}=0(\text{据 } z=0 \text{ 处 } \tau_{zz}=0). \tag{5.53}$$

因为这是关于同一振幅比($\acute{S}/\acute{P}$)的两个方程，所以，系数行列式必为零，而 p 必须满足 $R(p)=0$，这里

$$\begin{aligned}R(p)&=\left(\frac{1}{\beta^2}-2p^2\right)^2-4p^2\left(p^2-\frac{1}{\alpha^2}\right)^{1/2}\left(p^2-\frac{1}{\beta^2}\right)^{1/2}\\&=\left(\frac{1}{\beta^2}-2p^2\right)^2+4p^2\frac{\cos i}{\alpha}\frac{\cos j}{\beta}.\end{aligned} \tag{5.54}$$

这个 p^2 的函数，只有一个零(对正的虚"余弦")，并且这个函数是实的和正的。由于对所有弹性固体，相应的正 p 值比 $1/\beta$ 稍大(4—14%)，所以耦合的一对非均匀波 P 和 SV 沿半空间表面传播的确是可能的。这个表面波是以 Rayleigh 命名的，他在 1886 年描述了它的性质，而(5.54)定义的 $R(p)$ 叫做 Rayleigh 函数。注意，Rayleigh 函数恰恰是(5.26)、(5.27)、(5.30)、(5.31)中所给平面波系数的分母。Rayleigh 波在地震学中被广泛观测，作为均匀半空间的表面波，我们注意下列主要特征：(i)它们的传播速率 c_R 比剪切波速率小百分之几，c_R 满足 $R(1/c_R)=0$；(ii) c_R 与频率无关，因而波不频散(出现这个性质的物理原因是，在均匀半空间内不存在内禀的长度尺度，虽然我们将在第七章发现，在性质随深度而变的介质中，面波必然频散)；(iii)质点运动轨迹在自由面为逆进的椭圆(见图 5.11)(在本章的问题中发展的这个结果是值得注意的，因为对每个非均匀波的分量，P 和 SV，质点运动都是顺进椭圆)；(iv)在与频率有关的某个深度以下，Rayleigh 波的质点运动由 SV 分量占优势，从而变为

顺进椭圆。

一旦透彻地掌握了上述 Rayleigh 波理论，便很容易推广到两个均匀半空间的界面波(P-SV)。这样一种波，是由在上部介质中向上衰减和在下部介质中向下衰减的非均匀波组成的，所以，质点运动实际被限制在分界面附近 利用表 5.3 中所列“散射”波，我们因而做下列解释(对于正的频率)：

$$\frac{\cos i_1}{\alpha_1} \to +i\sqrt{p^2-\frac{1}{\alpha_1^2}}, \quad \frac{\cos j_1}{\beta_1} \to +i\sqrt{p^2-\frac{1}{\beta_1^2}},$$

$$\frac{\cos i_2}{\alpha_2} \to +i\sqrt{p^2-\frac{1}{\alpha_2^2}}, \quad \frac{\cos j_2}{\beta_2} \to +i\sqrt{p^2-\frac{1}{\beta_2^2}} \qquad (5.55)$$

(试与(5.49)和(5.46)比较)，水平慢度 p 的可能值由 $D(p)=0$ 来确定，此处 D 由(5.38)定义。当然，我们只对实根感兴趣，对于实根，p 比 $(1/\alpha_1, 1/\beta_1, 1/\alpha_2, 1/\beta_2)$ 的最大者还大，因此，(5.55)中的所有“余弦”都是纯虚数。Scholte(1947)证明，$D(p)=0$ 总是有四个根(即两个 p^2 值，四个 p 的根)，但仅仅当比值 ρ_1/ρ_2 和 β_1/β_2 处于某区间时，它们才是实的和适当大的。这些波被命名为 Stoneley 波，Stoneley 在 1924 年发现了它们的主要性质。作为一个特殊情况，Stoneley 波在液体和固体间的分界面上总能存在。请注意，既然频率不进入 D 的定义，所以 Stoneley 波象 Rayleigh 波一样不频散(对于均匀半空间)。

在本节，我们侧重讨论均匀和非均匀波之间的差别，但是通过把这些波作为它们水平慢度的函数来研究，我们把它们的理论统一起来了。在后面的工作中，我们将把这两种类型的波都叫做“平面波”，因为若综合由定点震源产生的波系统，这两种类型都是需要的。

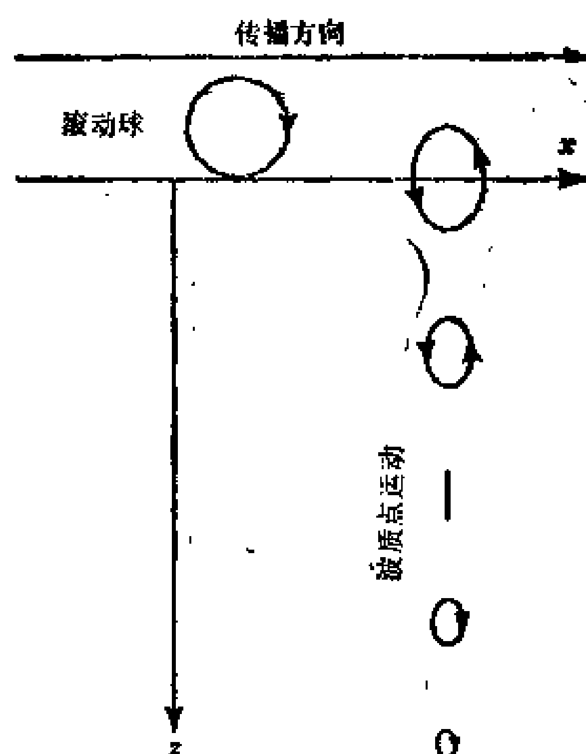


图 5.11

Rayleigh 波质点运动方向随深度的变化。关于区分顺进和逆进运动的方法，也许最好是用沿自由表面从震源向接收点滚动的球来记忆。球的滚动方向是顺进的，它是非均匀P和 SV 波、也是足够深处 Raylieigh 波的运动方向。但是对于 Rayleigh 波，表面上的质点运动是逆进的

5.4 分析均匀介质中平面波的矩阵方法

对于 5.3 节考虑过的所有平面波，可以用下面的方法组成运动方程和本构关系，即只需要应力和位移对深度的一级微商。这就是说，可用

$$\frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial z}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{f} \tag{5.56}$$

类型的方程研究平面波，其中$\boldsymbol{f}=\boldsymbol{f}(t)$ 是给出质点位移和应力同深度的关系的列向量。$\boldsymbol{A}$ 是常数矩阵，它的各项依赖于(均匀)介质的弹性性质，并依赖于水平向慢度 p 和 ω。

例如，表 5.2 中考虑过的 SH 波，都是分析只经由因子

$\exp[i\omega(px-t)]$而依赖于(x, t)的位移$u_y=v=v(x, z, t)$的结果。运动方程是$\rho\ddot{v}=\tau_{yz,z}+\tau_{yx,x}$，而本构关系(2.18)仅仅变为$\tau_{yz}=\mu\frac{\partial v}{\partial z}$，$\tau_{yx}=\mu\frac{\partial v}{\partial x}$。于是，这类$SH$问题可以用由

$$\boldsymbol{f}(z)\exp[i\omega(px-t)]=\begin{pmatrix} v \\ \tau_{yz} \end{pmatrix} \tag{5.57}$$

给定的向量$\boldsymbol{f}$进行讨论，而$\boldsymbol{f}$同深度的关系，由求解具有系数矩阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 0 & \mu^{-1} \\ \omega^2(\mu p^2-\rho) & 0 \end{pmatrix} \tag{5.58}$$

的标准方程(5.56)来给出。

对于压力为P和竖向质点位移为u_z的声波(见补充5.4)，我们取

$$\boldsymbol{f}(z)\exp[i\omega(px-t)]=\begin{pmatrix} u_z \\ p \end{pmatrix}$$

和

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 0 & \frac{p^2}{\rho}-\frac{1}{\rho\alpha^2} \\ \rho\omega^2 & 0 \end{pmatrix}. \tag{5.59}$$

对于P-SV波，我们取

$$\boldsymbol{f}(z)\exp[i\omega(px-t)]=\begin{pmatrix} u_x \\ u_z \\ \tau_{zx} \\ \tau_{zz} \end{pmatrix}$$

和

$$
\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}
0 & -i\omega p & \dfrac{1}{\mu} & 0 \\
\dfrac{-i\omega p\lambda}{\lambda+2\mu} & 0 & 0 & \dfrac{1}{\lambda+2\mu} \\
\dfrac{4\omega^2p^2\mu(\lambda+\mu)}{\lambda+2\mu}-\rho\omega^2 & 0 & 0 & \dfrac{-i\omega p\lambda}{\lambda+2\mu} \\
0 & -\rho\omega^2 & -i\omega p & 0
\end{pmatrix}. \tag{5.60}
$$

关于象$\dfrac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial z}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{f}$这样耦合的一阶微分方程的解，有许多是熟知的（例如，参看 Coddington and Levinson，1955；Gantmacher，1959），我们将在第七至第九章，充分应用这个理论，以便研究非均匀介质中的波传播。但是，我们现在的讨论是关于均匀介质的，这时 $\boldsymbol{A}$ 与 z 无关。

要提到的第一个性质是，如果 $\boldsymbol{V}^{\alpha}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的一个本征向量，而 λ^{α} 是相应的本征值，则(5.56)的一个解由

$$
\boldsymbol{f}=\boldsymbol{V}^{\alpha}\exp[\lambda^{\alpha}(z-z_{\text{反射}})] \tag{5.61}
$$

给出（不对上标 α 求和），其中 $z_{\text{反射}}$ 是相位的参考值。

现在令 $\boldsymbol{F}$ 为一矩阵，其各列由(5.61)型的不同解组成。若$\boldsymbol{A}$是 $n\times n$ 矩阵，则我们可求出 n 个本征值和 n 个线性无关的本征向量($\alpha=1,2,\cdots n$)，因而 $\boldsymbol{F}$ 也是 $n\times n$ 矩阵，它的第 α 列由 $\boldsymbol{V}^{\alpha}\exp[{}^{\alpha}\lambda(z-z_{\text{反射}})]$给定。于是方程 $\partial\boldsymbol{f}/\partial z=\boldsymbol{A}\boldsymbol{f}$ 的最一般解$\boldsymbol{f}$是 $\boldsymbol{F}$ 的各列的某个线性组合，即

$$
\boldsymbol{f}=\boldsymbol{F}\boldsymbol{W}, \tag{5.62}
$$

式中 $\boldsymbol{W}$ 是由常数组成的向量，对在解$\boldsymbol{f}$中出现的 $\boldsymbol{F}$ 的各列加权。

用这类本征值和本征向量来分析平面波是一种很有效的方法，原因在于(5.61)和(5.62)的物理解释。取 SH 波的情况，这时 $\partial\boldsymbol{f}/\partial z=\boldsymbol{A}\boldsymbol{f}$，其中$\boldsymbol{f}$和 $\boldsymbol{A}$ 由(5.57)和(5.58)给定。$\boldsymbol{A}$ 的两个

本征值是 $\pm i\omega\sqrt{\dfrac{1}{\beta^2}-p^2}=\pm i\omega\beta^{-1}\cos j$，这只不过是 i 乘以向下和向上运行的 SH 波的竖向波数。量 $\beta^{-1}\cos j$ 是 S 波的竖向慢度，我们引入符号

$$\eta=\frac{\cos j}{\beta}=\left(\frac{1}{\beta^2}-p^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

与本征值 $\pm i\omega\eta$ 对应的，是本征向量

$$\begin{pmatrix} 1 \\ \pm i\omega\mu\eta \end{pmatrix}.$$

因此，仿照(5.61)，SH 运动的基本解或是

$$\begin{pmatrix} 1 \\ i\omega\mu\eta \end{pmatrix}\exp[i\omega\eta(z-z_{反射})]$$

类型，或是

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -i\omega\mu\eta \end{pmatrix}\exp[-i\omega\eta(z-z_{反射})]$$

类型。显然，第一个类型给出的质点位移和剪切应力是对于下行 SH 波的，而第二个，是对于上行波的。最一般类型的平面 SH 波，是它们的线性组合，所以（在(5.62)中出现的）向量 $\boldsymbol{W}$ 的解释是，它的第一个分量给出存在于总的波系统 $\boldsymbol{f}$ 中的下行波的大小，而它的第二个分量给出上行波的大小。

请注意，矩阵 $\boldsymbol{F}$ 可以明确写为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{F}=&\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i\omega\mu\eta & -i\omega\mu\eta \end{pmatrix}\\ &\times\begin{pmatrix} \exp[i\omega\eta(z-z_{反射})] & 0 \\ 0 & \exp[-i\omega\eta(z-z_{反射})] \end{pmatrix}\\ =&\boldsymbol{E\Lambda},\end{aligned}\tag{5.63}$$

$\boldsymbol{F}$ 被分解为矩阵 $\boldsymbol{E}$ 乘以对角线矩阵 $\boldsymbol{\Lambda}$，这里的 $\boldsymbol{E}$ 由 $\boldsymbol{A}$ 的本征向量组成，$\boldsymbol{\Lambda}$ 包含以 $z_{反射}$ 作参考值的竖向相位因子。$\boldsymbol{F}$ 叫数解矩

阵，或者(在常见的地震学文章里)叫做层矩阵。对于 SH 波，$\boldsymbol{F}$ 的逆矩阵是

$$\boldsymbol{F}^{-1}=\boldsymbol{\Lambda}^{-1}\boldsymbol{E}^{-1}=\begin{pmatrix}\exp[-i\omega\eta(z-z_{\text{反射}})] & 0\\ 0 & \exp[i\omega\eta(z-z_{\text{反射}})]\end{pmatrix}$$

$$\times\begin{pmatrix}\dfrac{1}{2} & \dfrac{-i}{2\,\omega\mu\eta}\\ \dfrac{1}{2} & \dfrac{i}{2\,\omega\mu\eta}\end{pmatrix}. \tag{5.64}$$

对于 P-SV 波，$\boldsymbol{A}$ 的本征值是 $\pm i\omega\xi$(这里的 $\xi=\alpha^{-1}\cos i$ 是 P 波的竖向慢度)和 $\pm i\omega\eta$。$\partial\boldsymbol{f}/\partial z=\boldsymbol{A}\boldsymbol{f}$($\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{f}$ 由 (5.60) 给定) 的一般解仍是 $\boldsymbol{f}=\boldsymbol{F}\boldsymbol{W}$, $\boldsymbol{F}$ 分解因子为 $\boldsymbol{E}\boldsymbol{\Lambda}$, 并且

$$\boldsymbol{E}=\begin{pmatrix}\alpha p & \beta\eta & \alpha p & \beta\eta\\ \alpha\xi & -\beta p & -\alpha\xi & \beta p\\ 2\,i\omega\rho\alpha\beta^2p\xi & i\omega\rho\beta(1-2\,\beta^2p^2) & -2\,i\omega\rho\alpha\beta^2p\xi & -i\omega\rho\beta(1-2\,\beta^2p^2)\\ i\omega\rho\alpha(1-2\,\beta^2p^2) & -2\,i\omega\rho\beta^3p\eta & i\omega\rho\alpha(1-2\,\beta^2p^2) & -2\,i\omega\rho\beta^3p\eta\end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{\Lambda}=\begin{pmatrix}\exp[i\omega\xi(z-z_{ref})] & 0 & 0 & 0\\ 0 & \exp[i\omega\eta(z-z_{ref})] & 0 & 0\\ 0 & 0 & \exp[-i\omega\xi(z-z_{\text{反射}})] & 0\\ 0 & 0 & 0 & \exp[-i\omega\eta(z-z_{\text{反射}})]\end{pmatrix}. \tag{5.65}$$

请注意，$\boldsymbol{f}$ 的分量正是在密接界面上连续的那些物理量。因此，对于 P-SV 问题，我们已看到，在两个不同半空间的水平界面上(比如说 $z=0$)，$u_x, u_z, \tau_{zx}, \tau_{zz}$ 是连续的。所以，根据(5.60)，$\boldsymbol{f}$ 是连续的，尽管 $\boldsymbol{A}$ 不连续。

我们正在发展的矩阵方法，对于研究均匀叠层中传播的平面波，有重要作用。作为一个非常简单的例子，我们来给出公式(5.32)的推导，它给出 SH 波在两个半空间分界面上入射时的所有反射系数和透射系数。

在上部介质($z<0$; 见图 5.7)中，我们有 $\boldsymbol{f}=\boldsymbol{F}_1(z)\boldsymbol{W}_1$, 其中 $\boldsymbol{F}_1$ 由(5.63)给定，所含 ρ, β, j 是在上部介质中的值，$\boldsymbol{W}_1$ 是给出上部介质中下行波和上行波大小的向量。同样，在下部介质中

$(z>0)$中，$\boldsymbol{f}=\boldsymbol{F}_2(z)\boldsymbol{W}_2$。由于$\boldsymbol{f}$在$z=0$连续，所以

$$\boldsymbol{F}_1(0)\boldsymbol{W}_1=\boldsymbol{F}_2(0)\boldsymbol{W}_2, \tag{5.66}$$

它给出两种介质中上行波系和下行波系间的一般关系，不管这些波系可能是什么样了。

为求解 $\grave{S}\acute{S}$ 等，我们应用(5.66)于图 5.7 所示的两种情况。对于从上面入射的 SH 波，我们有

$$\boldsymbol{w}_1=\begin{pmatrix}1\\ \grave{S}\acute{S}\end{pmatrix} \text{ 和 } \boldsymbol{w}_2=\begin{pmatrix}\grave{S}\grave{S}\\ 0\end{pmatrix}.$$

把这些代入(5.66)，给出含有两个未知数 $\grave{S}\acute{S}$ 和 $\grave{S}\grave{S}$ 的两个标量方程。对于从下面入射的 SH 波，我们有

$$\boldsymbol{w}_1=\begin{pmatrix}0\\ \acute{S}\acute{S}\end{pmatrix} \text{ 和 } \boldsymbol{w}_2=\begin{pmatrix}\acute{S}\grave{S}\\ 1\end{pmatrix},$$

可以再把它们代入(5.66)，得到含有 $\acute{S}\acute{S}$ 和 $\acute{S}\grave{S}$ 的两个方程。

实际上常常要把本征向量 $\boldsymbol{v}^a$ 归一化，以便使相关的质点位移有单位振幅。我们上面讨论 SH 和 P-SV 波时已经这样做了。正如将在第七章和第九章看到的，这个方法之所以在计算上有吸引力，原因是矩阵 $\boldsymbol{F}(z)$ 有可用闭合形式表述的逆矩阵 $\boldsymbol{F}^{-1}=\boldsymbol{\Lambda}^{-1}\boldsymbol{E}^{-1}$。事实上，对于 P-SV 波，(5.65)的矩阵 $\boldsymbol{E}$ 有逆矩阵

$$\boldsymbol{E}^{-1}=\begin{pmatrix}\dfrac{\beta^2 p}{\alpha} & \dfrac{1-2\beta^2p^2}{2\alpha\xi} & \dfrac{-ip}{2\omega\rho\alpha\xi} & \dfrac{-i}{2\omega\rho\alpha}\\[2ex] \dfrac{1-2\beta^2p^2}{2\beta\eta} & -\beta p & \dfrac{-i}{2\omega\rho\beta} & \dfrac{ip}{2\omega\rho\beta\eta}\\[2ex] \dfrac{\beta^2 p}{\alpha} & \dfrac{-(1-2\beta^2p^2)}{2\alpha\xi} & \dfrac{ip}{2\omega\rho\alpha\xi} & \dfrac{-i}{2\omega\rho\alpha}\\[2ex] \dfrac{1-2\beta^2p^2}{2\beta\eta} & \beta p & \dfrac{i}{2\omega\rho\beta} & \dfrac{ip}{2\omega\rho\beta\eta}\end{pmatrix} \tag{5.67}$$

5.5 衰减介质中的波传播：平面波基本理论

对于迄今已描述的绝热的波传播，波动一旦由某个特定源产生，便将无限地延续下去。因此，随着波从震源区向外扩散，波动可以在空间上衰减，但是，质点运动的总能量（即动能和弹性应变能在介质中的体积分）却保持为常数。这一点由2.2节的讨论可以知道。和这种理想的情况相反，通常的经验是，因为波在实际物质中传播，波振幅由于各种可在宏观上归纳为"内摩擦"的过程而衰减。

只给出两个例子：传播波中产生的应变和应力，可以导致介质晶体缺陷结构的不可逆变化，以及如果相邻的物质晶粒不是弹性连接，则在介质内的晶粒边界上也能做功。这种介质叫做非弹性的，因为物质质点的形态在某种程度上依赖于所施应力的历史。内摩擦的总效应以在补充5.7中用各种方法（对于稍带非弹性的介质）定义的无量纲量Q来概括。

补充5.7

Q的各种定义

若一物体在应力下以频率ω轮回，则内摩擦(或非弹性)的无量纲量度由

$$\frac{1}{Q(\omega)}=-\frac{\Delta E}{2\pi E} \tag{1}$$

给出。其中E是体内积存的峰值应变能，$-\Delta E$是由于物质的不完全弹性而产生的每一轮回的能量损耗。

这个定义很少有直接用途，因为只在专门实验中才可能以振幅和周期都不变的应力波推动物质元。比较通常的是观测(i) 在固定波数的驻波中振幅随时间的衰减，或(ii) 在固定频率的行波中随空间的衰减。地震学中最通常的情况是一个信号的衰减，而这个信号是由一

个范围内的频率组成的。我们要做一个强有力的假定(以后必须审核)，即衰减是个线性现象，意思是，波可以分解成它的 Fourier 分量，每个分量可用(i)或(ii)进行研究，而随后的 Fourier 合成，给出衰减对实际地震信号的正确影响。

在(i)或(ii)的情况下，对于具有线性应力-应变关系的介质，波振幅 A 比例于 $E^{\frac{1}{2}}$。(例如，A 可以代表最大质点速度，或波的应力分量。我们还假定 $Q\gg 1$，以使相继的峰值几乎有相同的应变能)。因此，

$$\frac{1}{Q(\omega)}=-\frac{1}{\pi}\frac{\Delta A}{A}, \tag{2}$$

由它可求衰减引起的振幅涨落。

在(i)情况下，我们问：给定初始的 $A=A_0$，而在相继的时间 $2\pi/\omega$，$4\pi/\omega$，$2n\pi/\omega$ 上 A 以系数 π/Q 缩小的 $A=A(t)$ 是什么？显然，

$$A(t)=A_0\left(1-\frac{\pi}{Q}\right)^n \qquad \left(对于\, t=\frac{2n\pi}{Q}\right).$$

因此，

$$A(t)=A_0\left[1-\frac{\omega t}{2Qn}\right]^n\to A_0\exp\left(-\frac{\omega t}{2Q}\right)$$

$$(当\, n\, 很大，即时间很长). \tag{3}$$

根据对指数衰减的 $A(t)$ 值的观测，我们用(3)来定义时间域的 Q 值。正是这个值用于描述地球的自由振荡(见第八章)。

我们不得不用离散的时间来上述结果(3)，因为这是以情况(i)为基础的实验的性质。但对情况(ii)，对于距离 x 的形式 $A=A(x)$ 的推导比较容易，因为特定的波峰可沿距离 dx 追踪，而 A 在空间的逐渐减小可以观测。(我们这里假定，最大衰减的方向沿 x 轴，它同时也是传播方向。)这时 $\Delta A=\frac{dA}{dx}\lambda$，其中 λ 是用 ω 和相速度 c 由 $\lambda=\frac{2\pi C}{\omega}$ 给出的波长。方程(2)变为 $\frac{dA}{dx}=-\frac{\omega}{2cQ}A$，其指数衰减的解变为

$$A(x)=A_0\exp\left[-\frac{\omega x}{2cQ}\right]. \tag{4}$$

根据对指数衰减的 $A(x)$ 值的观测，我们用(4)来定义空间域的 Q 值。

当然，几何扩散效应造成的空间衰减，也必须进行研究。在 5.5 节，我们将把注意力局限于均匀介质中的平面波传播，以避开这个问题。这种简单情况，还避开了物质不均一性造成的几何频散的复杂性，它涉及到经由(3)测出的 Q 与用(4)测出的 Q 之间的差别。这些附加的频散效应(它们甚至在理想弹性介质中也存在)，在第七章 7.3.4 节结合面波来考虑。

注意，为求衰减对一个波动解，如 $e^{i(kx-\omega t)}$ 的影响，测量时间域的 Q 的实验，可看作是用复频率代替 ω，测量空间域的 Q 的实验，可看作是用复波数代替 k。在第一种情况，要求 ω 有虚部 $\frac{-i|\omega|}{2Q^{时}}$，在第二种情况，要求 k 有虚部 $\frac{i|k|}{2Q^{空}}$。

由内摩擦(有时叫做固有衰减)造成波衰减的一般课题是非常大的，这可以分三个不同方面的问题来看：

i) 作为材料科学的一个分支，研究引起衰减的基本（微观）过程。Mason(1958)，Jackson 和 Anderson(1970)以及 Norwick 和 Berry(1972)评述了各种晶体缺陷、晶粒边界过程和某些热弹性过程的效应。

ii) Q 同频率的关系作为各种介质的宏观现象来研究。根据地震波中 Q 与频率的关系的观测 (Archambeau 等，1969；Solomon，1972，1973)，人们可以对地球组成的可能性予以限制。Solomon 曾用这个方法试图定量表示上地幔中部分熔融的程度。

iii) 许多作者发展了代替 Hooke 定律的宏观应力-应变关系，从而(用 $\rho\ddot{u}_i=\tau_{ij,j}$)求得带有特殊 $Q=Q(\omega)$ 值的物质的运动方程。这里要紧的是利用因果约束关系来导出衰减介质的频散现象。Lomnitz(1957)，Jeffreys(1958)，Futterman(1962)，Azimi 等(1968)和 Liu 等(1976)的文章是关键性文章。Knopoff(1964a)和 Stacey 等(1975，Savage 于 1976 年作了改正)的评述表明，在

我们理解衰减如何发生，以及它如何影响传播波的脉冲形状方面，仍有一些重要的未知领域。特别是，地震波中的内在频散有多少还了解得不精确，缺乏直接的证据支持（在补充 5.7 中引入的）线性叠加定律。

在本章的剩下部分，我们将讨论(iii)中所述的某些领域，因为地震学中观测到的脉冲形状肯定受内摩擦的影响。主要的结果是，如果在地震学观测频率的很宽范围(0.001—100赫)内，Q 实际是常数，则可通过把体波速度(α 和 β，我们迄今一直认为它们是实数并且与频率无关）看作在(5.88)中定义的、取复数值并依赖于频率的量，来研究衰减地球中的波传播。但是，如果 Q 在地震范围内随频率的变化大于百分之几，则（5.88）可能是不适用的。

5.5.1 衰减介质中物质频散的必然性

取完全弹性均匀介质中，以速率 c 沿正 x 方向传播的一平面波 $\delta(t-x/c)$。如同我们在本章前几节所已知道的，这样一个波严格保持其形状，并且所有频率分量以相同速率 c 一起传播。

现在设想这种波在 $x=0$ 进入一衰减介质。Knopoff (1964) 归纳了衰减的实验结果，结论是，对于各种流体，$Q(\omega)\propto\omega^{-1}$，但在对固体中的观测频率范围内，$Q$ 近似为常数。这类 Q 与频率无关的性质，是我们在地震学中所最关心的。

脉冲的每个 Fourier 分量

$$\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t-x/c)e^{i\omega t}dt=\exp[i\omega x/c],$$

现在将衰减一个因子 $\exp[-\alpha(\omega)x]$，而由补充 5.7 的方程(4)我们看到，这个衰减速率是 $\alpha=\omega/2cQ$。

在距离 x，这时衰减波的脉冲形状 $p(x,t)$ 将是什么样？作为回答这个问题的第一个尝试，让我们假定不存在频散，因而脉冲是所有具相同速率 c 的 Fourier 分量的综合：

$$p(x,t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left[\frac{-|\omega|x}{2cQ}\right]\exp\left[i\omega\left(\frac{x}{c}-t\right)\right]d\omega$$

(5.68)

（显然，如果 $x>0$，必须用 $|\omega|$ 代替负频率衰减因子的 ω）。如果 Q 是常数，则这个积分很容易表示为

$$p(x,t)=\frac{1}{\pi}\left[\frac{\frac{x}{2cQ}}{\left(\frac{x}{2cQ}\right)^2+\left(\frac{x}{c}-t\right)^2}\right], \qquad (5.69)$$

在固定的 x，这个脉冲随时间变化的形状示于图 5.12 中。

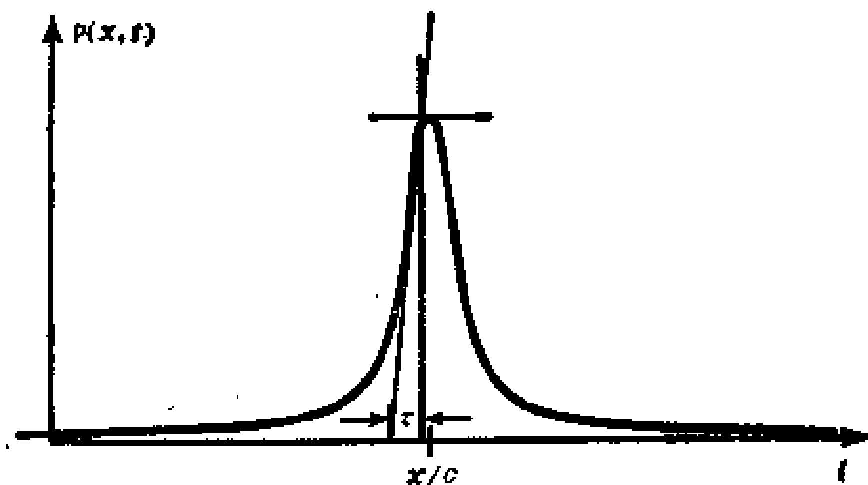


图 5.12

由 (5.69) 给出的在固定距离上随时间变化的脉冲形状 $p(x,t)$。由 $p(x,t)$ 在最大梯度点的切线外插所规定的上升时间 τ，可用 x,c,Q 求出，因为对这个脉冲形状，$\tau=\frac{4}{3\sqrt{3}}\frac{x}{cQ}$，但实验的上升时间短得多

可惜，图 5.12 表示的这个脉冲形状，有若干不可接受的特征。它表示，甚至在 $t=0$ 之前，就有一个(很小的)到达 $x=0$ 的波，这违反我们最基本的因果概念。它表示的上升时间（参看图例)太长（Stacey 等 1975 年报道说，测得的 τ 相对于距离的增长速率仅仅是 $1/2\,cQ$，但图 5.12 和方程(5.69)意味着大约 1.5 倍

于此)，并且脉冲的对称形状也同实验不符，实验给出的是衰减时间比上升时间大得多的非对称形状。

当我们推导这个脉冲形状(5.69)所用的三个假定，即线性、常数Q和无频散，成为疑问时，自然要试图保留前两个而放松第三个。(保留线性的间接证据简单说就是，它曾导致许多细心分析的地震资料中自相一致的结果。没有比地球简正振型更清楚的了，它被几百次地震激发到可观测的水平，当精度很高时可发现，对于不同的源和不同的地震仪，其振荡周期是不变的。)虽然我们将马上丢弃常值Q的假定，但我们这里的要点之一是，我们必须允许某种频散，因为否则衰减脉冲形状的对称性是不可避免的(问题 5.9)。

5.5.2 衰减介质中物质频散的某些假设值

我们给物质频散以定量表示的初步尝试，将借助于非弹性介质的波阵面概念。我们将假定，平面波$u(x, t)$沿x增大方向传播，并且波阵面在$t=0$首先到达$x=0$。因此

$$u(0, t)=0 \qquad \text{当 } t<0. \tag{5.70}$$

在$x>0$的位置上，u的每个 Fourier 分量分解因子为

$$u(x, \omega)=u(0, \omega)\exp(iKx),$$

式中的复波数K现在用相速度$c(\omega)$和衰减因子$a(\omega)$由

$$K=\frac{\omega}{c(\omega)}+ia(\omega) \tag{5.71}$$

给定。利用线性叠加假定，在(x, t)的波为

$$u(x, t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}u(0, \omega)\exp[i(Kx-\omega t)]d\omega,$$

这等效于$u(0, t)$同

$$p(x, t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\exp[i(Kx-\omega t)]d\omega \tag{5.72}$$

的褶积，$p(x, t)$是前面在(5.68)中描述的脉冲的衰减响应。但现在我们允许c依赖于频率，而在补充 5.8 中我们表明，要求

$p(x, t)$ 在到时 x/c_∞之前为零，意味着

$$\frac{\omega}{c(\omega)}=\frac{\omega}{c_\infty}+\mathscr{H}[\alpha(\omega)], \tag{5.73}$$

这里 c_∞ 是 $\omega\to\infty$时 $c(\omega)$的极限，$\mathscr{H}[\alpha(\omega)]$是衰减因子的 Hilbert 变换。

补充 5.8

有因的传播脉冲形状的振幅谱和相位谱间的关系

我们假定传播的脉冲形状 $p(x, t)$ 有 Fourier 分量 e^{iKx}，K的实部和虚部由

$$K=\frac{\omega}{c(\omega)}+i\alpha\ (\omega) \tag{1}$$

给定。这时，如果

$$p\ (x,\ t)\ =0 \qquad (\text{对于 } t<x/c_\infty), \tag{2}$$

我们来证明

$$\frac{\omega}{c(\omega)}=\frac{\omega}{c_\infty}+\mathscr{H}[\alpha(\omega)]. \tag{3}$$

第一，我们注意到（2）中描述的因果关系，完全等效于下列陈述：

由 $F(\omega)=\exp\left[\ i\left(K-\frac{\omega}{c_\infty}\right)x\ \right]$定义的 $F(\omega)$

在上半平面（即ω的虚部$\geqslant0$)是解析的。 (4)

因为，如果（2）是正确的，则

$$F(\omega)=p(x,\ \omega)\exp(-i\omega x/c_\infty)=\int_{x/c_\infty}^{\infty}p(x,\ t)\exp[i\omega(t-x/c_\infty)]dt, \tag{5}$$

根据 Jordan 引理，它在上半平面的确是收敛积分。F 及其所有微商都存在，因而得到（4)。另一方面，如果（4)是正确的，我们写出

$$p(x,\ t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}F(\omega)\exp[-i\omega(t-x/c_\infty)]d\omega, \tag{6}$$

再加上上半平面无穷远处的半圆路径(由于指数为零，如果 $t<x/c_\infty$，则它没有贡献)。这时，(6) 中的被积函数在闭合回路内部处处是解析的，于是得到（2)。

第二，我们还要证明，$\log F(\omega)$ 在上半平面是解析的。为证明这一点，我们只须证明 $F(\omega)$没有这样的零值，使 ω 有非负的虚部。事实上，假定对于 $\mathrm{Im}\ \omega_0 \geqslant 0$ 有 $F(\omega_0)=0$，则对于某 $\lambda>0$ 以及 $f(\omega_0)\neq 0$ 的某 f，有 $F(\omega)=(\omega-\omega_0)^\lambda f(\omega)$。但是如果 x 增大到 $x+\Delta x$，则根据(4)，

$$(\omega-\omega_0)^{\lambda(1+\Delta x/x)}f(\omega)^{1+\Delta x/x}$$

在上半平面是解析的——这是不可能的，因为在这个形式中看到在 ω_0 处有支点。

第三，我们提一下 Cauchy 定理的特殊形式：如果 $g(z)$ 在闭合回路 C 之上和之内是解析的，则对于 C 本身上的一点 x，有

$$g(x)=\frac{1}{\pi i}P\int_c \frac{g(z)}{z-x}dz \tag{7}$$

(此处 P 指取 Cauchy 主值)。

最后，我们应用(7) 于解析函数

$$\begin{aligned}\log F(\omega)&=\log|F(\omega)|+i[F(\omega)\text{的相位}]\\&=-a(\omega)x+i\omega\left(\frac{1}{c(\omega)}-\frac{1}{c_\infty}\right)x,\end{aligned} \tag{8}$$

这里是用以实 ω 轴为直径包围上半复 ω 平面的无限半圆作为 c。对于实 ω 值，得到

$$\log F(\omega)=\frac{1}{\pi i}P\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\log F(\zeta)d\zeta}{\zeta-\omega} \tag{9}$$

(除非半圆弧有贡献；见下面)。由(8) 代入(9) 并分离实部和虚部，得到

$$a(\omega)=-\frac{1}{\pi}P\int_{-\infty}^{\infty}\zeta\left(\frac{1}{c(\zeta)}-\frac{1}{c_\infty}\right)\frac{d\zeta}{\zeta-\omega}=-\mathscr{H}\left[\omega\left(\frac{1}{c(\omega)}-\frac{1}{c_\infty}\right)\right] \tag{10}$$

和

$$\omega\left(\frac{1}{c(\omega)}-\frac{1}{c_\infty}\right)=\frac{1}{\pi}P\int_{-\infty}^{\infty}\frac{a(\zeta)d\zeta}{\zeta-\omega}=\mathscr{H}[a(\omega)], \quad \text{即 (3)}$$

这就是所要求的结果。电磁理论中相应于(3) 的结果叫做 Kramers-krönig 关系。

可能当$|\omega|$很大时，由于半圆弧的贡献（例如，见问题 5.10)，$\log F(\omega)$ 不能使式(9) 成立。但是，我们可以通过把(7) 应用于函数

$\log F(\omega)/\omega$，来修改上述分析。使用同一个无限半圆，现在却导致两个半留数：在 $\zeta=0$ 和 $\zeta=\omega$，

$$\frac{\log F(\omega)}{-\omega}+\frac{\log F(\omega)}{\omega}=\frac{1}{\pi i}P\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\log F(\zeta)}{\zeta(\zeta-\omega)}d\zeta. \tag{11}$$

[如果
$$\log F(\omega)=O(\log\omega) \quad 当|\omega|\to\infty, \tag{12}$$

则大弧没有贡献。$p(x,\ t)$在波阵面 $t=\frac{x}{c_\infty}$的 n 阶间断，将导致 $F(\omega)=O\ (\omega^{-n})$，从而导致（12）和（11）。]

由（11）和（8），得

$$\frac{1}{c(\omega)}=\frac{1}{c_\infty}+\mathscr{H}\left[\frac{\alpha(\omega)}{\omega}\right]以及\frac{\alpha(\omega)-\alpha(0)}{\omega}=-\mathscr{H}\left[\frac{1}{c(\omega)}-\frac{1}{c_\infty}\right]. \tag{13}$$

这是叫做带一个减法的频散关系的比较一般结果的一个简单例子，而 $\alpha(0)$叫做减法常数（Nussenzveig，1972）。

在有些情况下，可以知道函数$f(t)$当 $t<0$ 有 $f(t)=0$，因而$f(\omega)$在上半平面内是解析的，但关于$f\ (\omega)$ 别无所知。（在上述特殊问题中，(4) 对频率域的函数给出特定公式。）在一般情况下，我们不能排除$f(\omega)$有零值的可能性。

假定$f(\omega)$在上半平面的 $\omega=\omega_i$ $(i=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$ 有零值。我们经由

$$f\ (\omega)=f_0(\omega)\ \prod_{i=1}^{n}\frac{\omega-\omega_i}{\omega-\omega_i^*} \tag{14}$$

构成一个函数 $f_0(\omega)$。由于$f_0(\omega)$没有零值，故其振幅和相位 $\phi_0(\omega)$的关系为

$$\phi_0(\omega)=\mathscr{H}[\log|f(\omega)|] \tag{15}$$

(用类似于上面推导（3）的步骤证明；请注意，f 和 f_0 有相同振幅谱)。但是，根据（14），$f(\omega)$的相位 $\phi(\omega)$与 $\phi_0(\omega)$有如下关系：

$$\phi(\omega)=\phi_0(\omega)-\sum_{i=1}^{n}2\ \arctan\left(\frac{\mathrm{Im}\,\omega_i}{\omega-\mathrm{Re}\,\omega_i}\right)$$

现在，给定有相同振幅谱$|f(\omega)|$的时间域中各种可能的脉冲形状后，则与相位谱 $\phi_0(\omega)$相联系的脉冲形状，叫做最小滞后脉冲形状，因为由零值引起的群滞后

$$\frac{d}{d\omega}\{\phi(\omega)-\phi_0(\omega)\}=+2\sum_{i=1}^{n}\frac{\mathrm{Im}\,\omega_i}{\{(\mathrm{Im}\,\omega_i)^2+(\omega-\mathrm{Re}\,\omega_i)^2\}}$$

总是正的（因 $\mathrm{Im}\,\omega_i>0$）。

上面（如在方程(6)中）考虑的，是由传播一个距离 x 后的衰减所造成的特殊脉冲形状，因而是到时 x/c_∞ 以后的最小滞后脉冲形状。

在这一步似乎求 c（ω）值的问题实质上解决了。我们仅仅需要取常数 Q 衰减因子的 Hilbert 变换，然后利用（5.73）。但是，根据补充 5.7 中的方程（4），我们需要

$$\frac{\omega}{c_\infty}+\mathscr{H}[\alpha(\omega)]=2\,Q\alpha(\omega),\tag{5.74}$$

并且不存在用常数 Q 使这个关系得到满足的一对 Hilbert 变换。(如果它被满足，我们就能对（5.74）进行 Hilbert 变换。但这是不能做到的，因为对 ω/c_∞ 的变换是发散积分。) 反之，我们必须允许依赖于频率的 Q 满足（5.74），但用所选择的衰减使 Q 在地震频率范围上实际是常数。Azimi 等（1968）曾采用这个方法，并且他们建议使用的 Hilbert 变换对之一是

$$\alpha(\omega)=\frac{\alpha_0\omega}{1+\alpha_1\omega},\quad \mathscr{H}[\alpha(\omega)]=\frac{2\,\alpha_0\omega}{\pi(1-\alpha_1^2\omega^2)}\ln\left(\frac{1}{\alpha_1\omega}\right),\tag{5.75}$$

其中 α_0，α_1 是常数，ln 是自然对数。

在图 5.13 中，我们表示出由 Azimi 衰减定律（5.75）得到的脉冲形状（5.72）。请注意脉冲形状的不对称性和它相对于前面描述过的无频散脉冲形状的滞后。Stacey 等（1975）发现，Azimi 的脉冲形状的上升时间确实随距离而改变，其变化率由各种固体中的测量所确定，因此，相应于（5.75）的频散，可能是地震学中我们需要的良好近似。(5.75) 后面的假定是，对于所有地震频率都有 $1\gg\alpha_1\omega$，以便直到 ω 非常大时，衰减对 $\alpha(\omega)\propto\omega$ 规律的偏离都不明显。这时我们可忽略 $\mathscr{H}[\alpha(\omega)]$ 表达式中的 $\alpha_1^2\omega^2$，由（5.73）看到，相速度实际上由

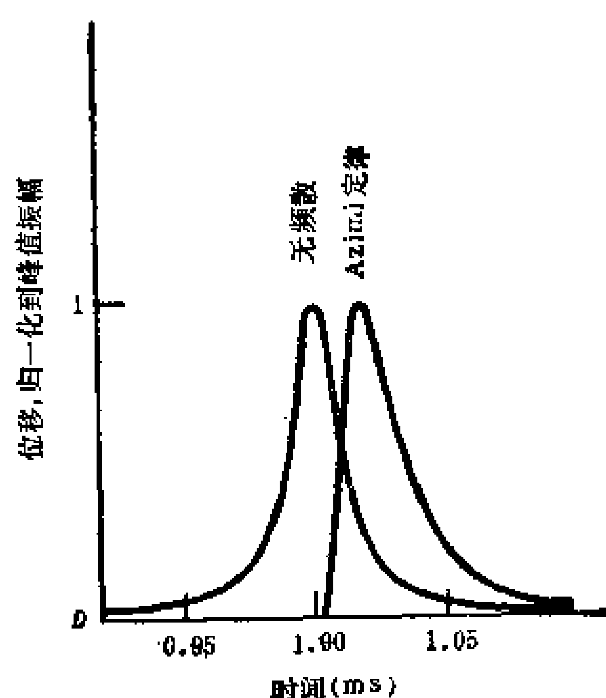


图 5.13

两种衰减的脉冲形状 $\varphi(x, t)$ 的比较，每一种都是在固定的 $x=5$ 米处。在无频散情况下，在所有频率上，$c=5$ 公里/秒而 $Q=50$。在有频散情况下（利用 Azimi 衰减定律（5.75），$c(\omega)$ 和 $Q(\omega)$ 由（5.73）—（5.75）给出），$c_\infty=5$ 公里/秒，而 $(2\alpha_0 c_\infty)^{-1}=50$（引自 Gladwin and Stacey, 1974）

$$\frac{1}{c(\omega)}=\frac{1}{c_\infty}+\frac{2\alpha_0}{\pi}\ln\left(\frac{1}{\alpha_1\omega}\right) \tag{5.76}$$

给出。根据（5.74）和（5.75），Q 有近似值 $(2\alpha_0 c_\infty)^{-1}$，使我们能够由（5.76）得到在两个不同地震频率 ω_1 和 ω_2 的相速度之比：

$$\frac{c(\omega_1)}{c(\omega_2)}=1+\frac{1}{\pi Q}\ln\left(\frac{\omega_1}{\omega_2}\right), \tag{5.77}$$

这是一个重要结果，因为它看起来是当 Q 在地震频率范围上实际为常数时，对各种衰减规律的一个良好近似（参看问题 5.10）。然而，已提出特殊的衰减规律，它们确有实质上为常数的 Q，但频散不是由（5.77）精确给定（例如，参看 Strick, 1970, 以及问题 5.11）。为了看清怎样能出现这种情况，由（5.73）注意

到，在频率 ω 处的相位滞后即 $x/c(\omega)$，是 x/c_∞ 加上一个量 $x\omega^{-1}\mathscr{H}[\alpha(\omega)]$。因此，在一特定频率上的相位滞后，依赖于衰减频谱在全部频率上的积分（Hilbert 变换）。如果选择当 $\omega\to 0$ 和 $\omega\to\infty$ 时 $\alpha(\omega)$ 的渐近行为，使积分收敛缓慢，则在地震频率上可以出现非常大的相位滞后。在这种情况下，对我们来说，可取的是通过回到非弹性的物理性质的讨论，把衰减因子限制在很高和很低的频率上。

假定一个阶梯函数的应力 $\sigma=\sigma_0 H(t)$，作用于初始时处于零应力和零应变状态的固体。对于线性介质，产生的应变 $e(t)$ 可写成

$$M_U e(t)=\sigma_0[1+\phi(t)], \tag{5.78}$$

式中 M_U 是弹性模量，$\phi(t)$ 叫做该模量的蠕变函数。（我们将把(5.78)作为标量间的关系来讨论，因为本节只关心一维的波传播。）对于各向同性弹性介质，$\phi=0$，对于横波 $M_U=\mu$，对于纵波 $M_U=\lambda+2\mu$。对于非弹性物质，有一瞬时应变 σ_0/M_U 以响应所施的应力（注意当 $t\leqslant 0$ 时 $\phi(t)=0$）。这就是我们对模量使用脚标 U 的理由：U 在下述意义上代表未弛豫，即一旦施加应力，在物质向着某个新的位形开始弛豫（经由蠕变）之前，M_U 给出应力和应变间的比例。

应力-应变关系（5.78）很容易推广到一般加载 $\sigma=\sigma(t)$ 的情况，给出

$$M_U e(t)=\left[\sigma(t)+\int_{-\infty}^{t}\sigma(\tau)\dot{\phi}(t-\tau)d\tau\right],$$

这是 Boltzmann 于 1876 年指出过的。由于 $t\leqslant 0$ 时 $\dot{\phi}=0$，故上式可方便地写作褶积

$$M_U e(t)=\sigma(t)+\sigma(t)*\dot{\phi}(t). \tag{5.79}$$

现在考虑以固定频率 ω 沿 x 方向传播的平面波产生 σ 和 e 的情况：$\sigma=\sigma_0\exp i(Kx-\omega t)$，其复波数 K 通过（5.71）与相速度 $c(\omega)$ 和衰减因子 $\alpha(\omega)$ 有关。应力-应变关系这时变为

$$M_U\varepsilon(t)=\sigma(t)\left[1+\int_0^\infty\dot{\phi}(\tau)\exp(i\omega\tau)d\tau\right] \tag{5.80}$$

(利用 $\sigma(t)\propto\exp(-i\omega t)$的特殊形式和 $t\leqslant0$ 时 $\dot{\phi}(t)=0$)。于是应力经由复模量 $M(\omega)$比例于应变，这里

$$M(\omega)=M_U\Big/\left[1+\int_0^\infty\dot{\phi}(\tau)\exp(i\omega\tau)d\tau\right]. \tag{5.81}$$

ϕ 在原点的连续性意味着，当 $\omega\to\infty$时，这里的积分趋于零，表明当 $\omega\to\infty$时 $M(\omega)\to M_U$。

由运动方程 $\rho\ddot{u}=\partial\sigma/\partial x$，我们得到 $\rho\omega^2=K^2M(\omega)$，由此得到下列关系式：

$$\frac{\omega}{c(\omega)}+i\alpha(\omega)=\omega\sqrt{\frac{\rho}{M(\omega)}}=\frac{\omega}{c_\infty}\left[1+\int_0^\infty\dot{\phi}(t)\exp(i\omega t)dt\right]^{1/2}, \tag{5.82}$$

$$\frac{1}{Q(\omega)}=\frac{2c(\omega)\alpha(\omega)}{\omega}=-\frac{\mathrm{Im}M(\omega)}{\mathrm{Re}M(\omega)}=\frac{\mathrm{Im}\left\{\int_0^\infty\dot{\phi}(t)\exp(i\omega t)dt\right\}}{1+\mathrm{Re}\left\{\int_0^\infty\dot{\phi}\exp(i\omega t)dt\right\}}.$$

我们这里用未弛豫模量通过 $c_\infty=(M_U/\rho)^{\frac{1}{2}}$而确定一个速度 c_∞，而(5.82)现在是允许我们把各种蠕变定律变换为衰减和频散定律的形式。

Lomnitz(1956，1957) 用对数定律概括了他关于岩石蠕变的实验室观测：

$$\phi(t)=\begin{cases}0 & t\leqslant0\\ q\ln(1+at) & t\geqslant0,\end{cases}$$

其中基频 a 可高到晶格空位的振动频率 (即 10^{10}赫的量级；参看 Savage and O'Neill, 1975)。这时对于 $\omega\ll a$，$\dot{\phi}$ 的 Fourier 变换是

$$aq\int_0^\infty\frac{\exp(i\omega t)}{1+at}dt\sim-q\left[\gamma+\ln\left(\frac{\omega}{a}\right)-\frac{i\pi}{2}\right]e^{-i\omega/a} \tag{5.83}$$

式中 $\gamma=0.577\cdots$是 Euler 常数。由于 $q\ll1$，所以由(5.82) 和

(5.83)得到

$$\frac{\omega}{c(\omega)}+i\alpha(\omega)=\frac{\omega}{c_\infty}\left\{1-\frac{q}{2}\left[\gamma+\ln\left(\frac{\omega}{a}\right)\right]+\frac{i\pi q}{4}\right\} \quad (5.84)$$

(正确到一级小数)。此式的虚部给出 Lomnitz 常数之一

$$q=\frac{2}{\pi Q}\frac{c_\infty}{c(\omega)}\sim\frac{2}{\pi Q},$$

由这个结果和(5.84)的实部，得到 c 同频率的关系

$$\frac{1}{c(\omega)}=\frac{1}{c_\infty}\left\{1-\frac{1}{\pi Q}\left[\gamma+\ln\left(\frac{\omega}{a}\right)\right]\right\},$$

这与前面对 Azimi 衰减定律建立的关系

$$\frac{c(\omega_1)}{c(\omega_2)}=1+\frac{1}{\pi Q}\ln\left(\frac{\omega_1}{\omega_2}\right) \quad (\text{即 } 5.77)$$

是一致的。

用两种如此不同的方法（衰减的经验形式(5.75)，和对数蠕变的实验室观测）得到了这个相同的频散定律之后，同样令人满意的是，Boltzmann 的方法也成功地给出(5.77)，如果一个蠕变函数，可由十分了解的机制所综合，以使得在地震频率范围内 Q 实际为常数（Liu 等，1976）。因此，直接由常数值 Q 的观测就为(5.77)提供了物理基础。Liu 的假设是，衰减是不同的弛豫现象叠加造成的，每个现象(如果单独起作用）应由应力-应变关系

$$\sigma+\tau_\sigma\dot{\sigma}=M_R(e+\tau_e\dot{e})$$

来表示。(看来，为解释衰减而提出的许多物理机制满足这个关系，它是 Zener 于 1948 年首先详细研究的标准线性体的应力-应变定律。）这里 τ_e 是在施加阶梯应力下，应变的特征弛豫时间；τ_σ 是相应于应变阶梯变化的应力弛豫时间。M_R 是弹性模量，注意，阶梯函数加载 $\sigma(t)=\sigma_0H(t)$ 的响应是

$$e(t)=\frac{\sigma_0}{M_R}\left[1-\left(1-\frac{\tau_\sigma}{\tau_e}\right)e^{-t/\tau_e}\right]. \quad (5.85)$$

将此式与(5.78)对比，并特别考虑 $t=0$ 时的瞬时响应，我们可证实

$$M_R=M_U\frac{\tau_\sigma}{\tau_\varepsilon}$$

和

$$\phi(t)=\left(\frac{\tau_\varepsilon}{\tau_\sigma}-1\right)(1-e^{-t/\tau_\varepsilon}).\qquad(5.86)$$

M_R 叫做弛豫模量，因为(根据(5.85)) 它给出当 $t\to\infty$ 极限时应力与应变之比。为求 Q 值和频散，(5.82)中的变换

$$\int_0^\infty\dot{\phi}(t)\exp(i\omega t)dt$$

是需要的，而根据蠕变函数(5.86)，很容易证明

$$\frac{1}{Q}=\frac{\omega(\tau_\varepsilon-\tau_\sigma)}{1+\omega^2\tau_\sigma\tau_\varepsilon}$$

和

$$[c(\omega)]^2=\frac{M_U}{\rho}\left[1+\left(\frac{M_U}{M_R}-1\right)\frac{1}{1+\omega^2\tau_\varepsilon^2}\right]^{-1}.$$

这两个量画于图 5.14。由此看到，衰减集中在频率$(\tau_\sigma\tau_\varepsilon)^{-1/2}$附近，$Q^{-1}$的变化，对低于此中心峰值的频率，类似于 ω，而对高于它的频率，则类似于 ω^{-1}。此外，相速度 $c(\omega)$ 随频率单调增大，在 $\omega=0$ 的下限为$(M_R/\rho)^{\frac{1}{2}}$。

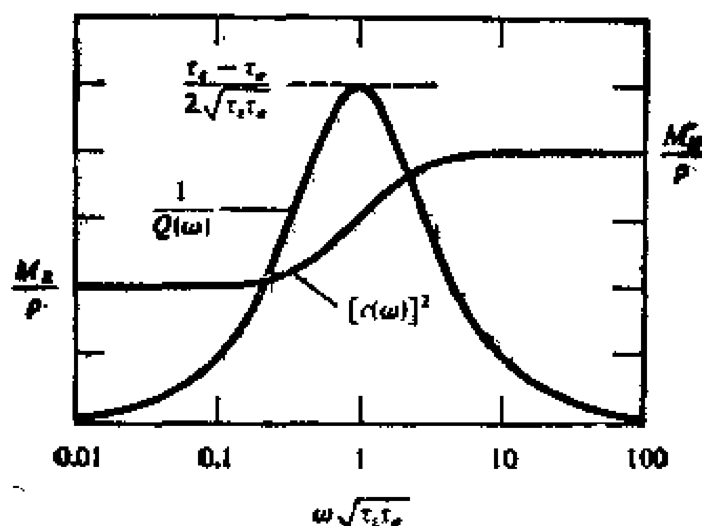


图 5.14

标准线性体(即有单一弛豫机制的物体)内，作为频率的函数的内摩擦 Q^{-1}和相速度的平方$[c(\omega)]^2$ (引自 Liu et al., 1976)

为了使在地震频率内观测到的实际为常数的Q值再现，Liu等(1976)曾用12个图5.14所示类型的都有相同弛豫模量M_R的弛豫峰值进行叠加。他们选了24个可用的非弹性参数(每种机制的τ_ε和τ_σ)，以给出图5.15所示的Q^{-1}和相速度。在0.0001—10赫的范围内，看到Q^{-1}在1%以内实际为常数，而相速度与$\ln\omega$为线性关系。在进一步的分析中，他们还考虑了用密度函数表示的弛豫的连续叠加，也发现$c(\omega)$同$\ln\omega$是类似图5.15所示的线性关系。事实上，他们能够解析地求出$c(\omega)$的梯度，并指出比值$c(\omega_1)/c(\omega_2)$有现在熟悉的值$1+(\pi Q)^{-1}\ln\frac{\omega_1}{\omega_2}$。

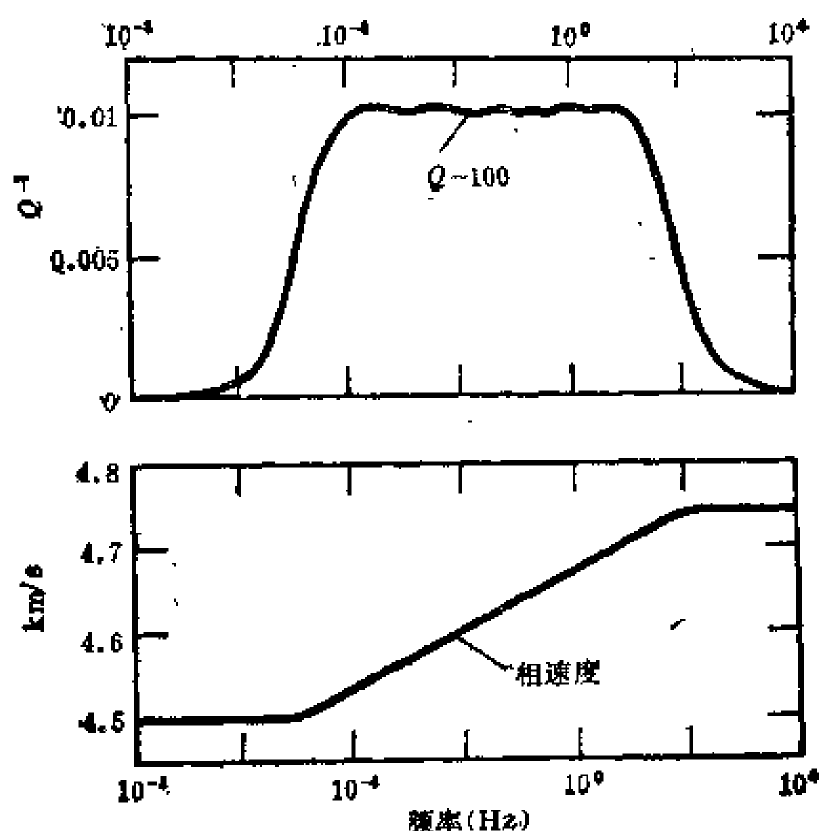


图 5.15

根据12个不同弛豫峰值的叠加，由(5.82)得到的内摩擦值（上图）和相速度(下图)（引自Liu et al., 1976）

现在这个对数频散用于Q值被观测为常数的物质是有足够依

据的。因而，一旦弹性介质的类似问题得到解决，如何求解非弹性介质的波传播问题就很清楚了。我们看到，弹性介质的传播因子

$$\exp[i(kx-\omega t)]=\exp[i\omega(x/c-t)]$$

被下列因子取代：

$$\exp i(Kx-\omega t)=\exp\left[\frac{(-\omega x)}{2c(\omega)Q(\omega)}\right]\exp\left[i\omega\left(\frac{x}{c(\omega)}-t\right)\right].$$

虽然 c 作为弹性解中不依赖于频率的常数而出现，$c=c_e$，但这个解将是 c_e 的解析函数。根据解析延拓，则非弹性解可通过用下列规则代替 c_e 而给定：

$$\frac{1}{c_e}\to\frac{1}{c(\omega)}\left(1+\frac{i}{2Q(\omega)}\right).\tag{5.87}$$

如果 Q 实际为常数，则我们可期望能够利用对数频散定律(5.77)。这里需要固定一个参考频率，相对于这个频率才可确认频散。我们将选择 1 赫(即 $\omega=2\pi$) 作为参考。这时，弹性速度 c_e 由下列规则取代：

$$c_e\to c_1\left[1+\frac{1}{\pi Q}\ln\left(\frac{\omega}{2\pi}\right)-\frac{i}{2Q}\right]\tag{5.88}$$

(正确到 Q 的一级微量)，其中 c_1 是在频率 1 赫上的体波相速度。

在整个这一节，我们至今都假定所讨论的衰减平面波是一维波。因此，对于用 $\exp(-\alpha x)\exp i\omega[x/c(\omega)-t]$ 描述的传播波，最大衰减方向同时也是相位滞后增大的方向。对于一般情况下的平面波，这两个方向是不同的。下面我们将给出二维波传播情况下(5.87)的一个例子，说明甚至当波是衰减的时，用它们的水平慢度来分析平面波仍是富有成效的。

考虑求解方程

$$\nabla^2\psi+K^2\psi=0,\tag{5.89}$$

其中 $K^2=\omega^2\rho/\mu$ 是复数，因为剪切模量 μ 是复数。一般说，(5.89)的稳态平面波解是一个常数乘以

$$\exp(-\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{x})\exp[i\boldsymbol{P}\cdot\boldsymbol{x}-\omega t], \qquad (5.90)$$

式中 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{P}$ 是具有实笛卡尔分量的向量。$\boldsymbol{A}$ 是最大衰减的方向，$\boldsymbol{P}$是波传播的方向（即相位滞后增大的方向）。把（5.90）代入（5.20），给出

$$P^2-A^2=\mathrm{Re}\{K^2\}, \qquad (5.91)$$

$$PA\cos\gamma=\frac{1}{2}\mathrm{Im}\{K^2\}, \qquad (5.92)$$

式中 P 和 A 是 $\boldsymbol{P}$ 和 $\boldsymbol{A}$ 的振幅，γ 是 $\boldsymbol{P}$ 和 $\boldsymbol{A}$ 间的夹角。按照 $\gamma=0$ 或 $\gamma\neq0$，波是均匀的或非均匀的。我们以前在关于弹性介质的5.3 节中遇见过这些名称。如 Buchen(1971)和 Borcherdt (1973)所指出的，对于弹性介质，必须有 $A=0$ 或 $\gamma=\pi/2$。这是由(5.92)用 $\mathrm{Im}\{K^2\}=0$ 得到的。但是，对于非弹性介质，必须有 $A\neq0$ 并且 $\gamma\neq\frac{\pi}{2}$。以前在本节我们只考虑了 $A\neq0$ 和 $\gamma=0$，这是均匀的衰减波。但处理非弹性半空间之间分界面的影响时，必须考虑非均匀平面波，这时有 $0<\gamma<\pi/2$。

幸而，这些比较一般的平面波，仍能作为独立变量 p 的函数进行研究，因为

$$\exp[i\omega px+i(K^2-\omega^2p^2)^{1/2}z-i\omega t] \qquad (5.93)$$

也是波动方程的一般平面波解。解(5.93)和(5.90)是等效的，其 y 轴垂直于 $\boldsymbol{P}$ 和 $\boldsymbol{A}$。$\boldsymbol{P}$ 和 $\boldsymbol{A}$ 的笛卡尔分量是

$$\boldsymbol{P}=(\mathrm{Re}\{\omega p\},0,\mathrm{Re}\{(K^2-\omega^2p^2)^{1/2}\}),$$
$$(5.94)$$
$$\boldsymbol{A}=(\mathrm{Im}\{\omega p\},0,\mathrm{Im}\{(K^2-\omega^2p^2)^{1/2}\}).$$

这些表达式考虑到 p 也可能是复数。我们将看到，这是第六章—第九章中所希望的。水平慢度(物理的)是 $\mathrm{Re}\{p\}$。

Buchen(1971)和 Borcherdt (1973, 1977) 用向量 $\boldsymbol{P}$ 和 $\boldsymbol{A}$ 广泛研究了平面波的性质。各单一平面波的物理性质这时很易辨认。例如，相对于竖直方向，入射角简单地等于 θ，这里

$$\boldsymbol{P}\cdot\hat{\boldsymbol{z}}=p\cos\theta. \qquad (5.95)$$

相速度是 ω/p，于是，根据 $K^2=\omega^2\rho/\mu$ 和 (5.91)—(5.92) 得到，这个速度精确地等于

$$\left(\frac{\mathrm{Re}\{\mu\}}{\rho}\right)^{1/2}\left(\frac{2(1+Q^{-2})}{1+(1+\sec^2\gamma Q^{-2})^{1/2}}\right)^{1/2}. \tag{5.96}$$

注意，(5.96)根据的是这样一个 Q，即 $Q^{-1}=-\mathrm{Im}\{\mu\}/\mathrm{Re}\{\mu\}$；参看(5.82)。这可能在科学家们用过的关于 Q 的若干不同定义中是最好的一个(参看 O'Connell and Budiansky, 1978)。在补充5.7中，我们提到过当 $Q\gg1$ 时导出的几种性质，它们可以用作 Q 的定义。但如果把它们应用于强衰减的介质，则这些定义将互不相符。

因为现在需要用两个角（θ 和 γ）表征入射于分界面的平面波，所以对于界面上的每个波，用如 $\boldsymbol{P}$ 和 $\boldsymbol{A}$ 这些物理量表述的 Snell 定律，其形式是极其复杂的（Borcherdt, 1977）。但使用(5.93)表示的平面波，让 K 在界面两边取不同的（复数）值，则 Snell 定律便简化到熟知的规则，即对于由界面耦合的所有平面波，参量 p 都相同。这使我们能够非常迅速地推广以前对于弹性介质的反射系数、转换系数、透射系数所得到的全部公式，让它们能应用于非弹性情况。所以，要得到在两个非弹性半空间之间穿过的 SH 波的透射系数 $\grave{S}\grave{S}$（见图 5.7 a)，我们首先必须用独立参数 p 解释角 j_1和 j_2：

$$\begin{aligned}
&\frac{\sin j_1}{\beta_1}=p=\frac{\sin j_2}{\beta_2},\\
&\frac{\cos j_1}{\beta_1}=\left(\frac{1}{\beta_1^2}-p^2\right)^{1/2}=\eta_1,\\
&\frac{\cos j_2}{\beta_2}=\left(\frac{1}{\beta_2^2}-p^2\right)^{1/2}=\eta_2.
\end{aligned} \tag{5.97}$$

这里的入射波比例于 $\exp[i\omega(px+\eta_1 z-t)]$，导致(5.32)的代数运算在这里给我们以

$$\grave{S}\grave{S}=\frac{2\rho_1\beta_1^2\eta_1}{\rho_1\beta_1^2\eta_1+\rho_2\beta_2^2\eta_2}=\frac{2\mu_1\eta_1}{\mu_1\eta_1+\mu_2\eta_2} \tag{5.98}$$

计算透射波 $\grave{S}\grave{S}\exp[i\omega(px+\eta_2 z-t)]$ 的入射角和出射角时，必须小心。为此，我们必须利用(5.94)和对于每个单一平面波所确定的(5.95)中的角 θ。一般说要注意，入射角和出射角将不是 j_1 和 j_2，因为这些角只在(5.97)中有意义，我们是选用 p (而不是比如说 j_1)作为独立变量。

检验将表明，(5.98) 中的系数 $\grave{S}\grave{S}$ 直接依赖于复数的体波速度 β_1和 β_2(或 μ_1和 μ_2)以及 p。我们早先对衰减的描述，限制在一维均匀波。令人满意的是，我们对于这些简单波所引入的复弹性常数，都是求二维平面波时所需要的，即使后者可能是非均匀波。因此，衰减介质界面的反射系数、转换系数和透射系数，可仅仅用替换复弹性常数而由弹性介质的类似结果[如(5.32)]得到，只要我们小心地解释象"入射角"和"出射角"这些概念。

5.6 各向异性弹性介质中的波传播：平面波的基本理论

均匀各向异性介质中的稳态平面波将以慢度 $\mathbf{s}$ 传播，假定位移 $\mathbf{u}=\mathbf{U}\exp[-i\omega(t-\mathbf{s}\cdot\mathbf{x})]$ 满足 $\rho\ddot{u}_i=c_{ijkl}u_{k,lj}$。$\mathbf{U}$ 是给出质点运动方向的固定的偏振向量，它是个常数。对于需要满足的波动方程，我们要求行列式为零，即

$$\det|\rho\delta_{ik}-c_{ijkl}s_js_l|=0. \qquad (5.99)$$

在各向同性介质中，(5.99)简化为对慢度分量的三个分离的二阶方程，对应于P 波和两种 S 波[见(4.36)—(4.39) 和(5.2)]。但对一般的各向异性情况，不可能直接用 ρ 和 $\mathbf{c}$ 的分量来解析地求解 $\mathbf{s}$ 或$|\mathbf{s}|$。

一个有用的辅助物用来得到波阵面慢度形象的就是慢度面 S。用笛卡尔轴 (s_1, s_2, s_3) 表示慢度空间中的点，则S由满足(5.99)的点组成。对于各向同性介质，(4.40)指明 S 由三个同心球组成，一个的半径是$[\rho/(\lambda+2\mu)]^{\frac{1}{2}}$，另两个重合，半径是

$[\rho/\mu]^{\frac{1}{2}}$。但在较普遍的情况下，S有三个分离的且非球形的叶片。

由慢度面能够构成另一个三叶的面$W(t)$，以表示与点源相联系的波阵面的位置（在给定的时间t）。显然，W与满足$t=\boldsymbol{s}\cdot\boldsymbol{x}$的解（$x_1,x_2,x_3$）有关。这里的问题是，对于波阵面上的每个$\boldsymbol{x}$，在慢度面上将有一个不同的$\boldsymbol{s}$。我们定义$W$为$\boldsymbol{s}$在慢度面上变化时平面$t=\boldsymbol{s}\cdot\boldsymbol{x}$的包络。Musgrave(1970) 描述了$S$上的$\boldsymbol{s}$点与$W$上的相应$\boldsymbol{x}$点之间的几何关系。$S$在$\boldsymbol{s}$的法线平行于$\boldsymbol{x}$。据此，可以制定$W$的图形（因为$\boldsymbol{x}$现为已知，$|\boldsymbol{x}|$由$t=\boldsymbol{s}\cdot\boldsymbol{x}$确定)。相反的关系也成立，而且从地震学观点看，也许这是更重要的，这个关系是：W在$\boldsymbol{x}$的法线平行于$\boldsymbol{s}$。波阵面的最简单的可以观测的量，大概是它前进的方向（它自身的法线)，这由$\boldsymbol{s}$给定。然而，正如Vlaar(1968)所描述的，作为能量输送方向的射线方向，一般不沿$\boldsymbol{s}$，而沿慢度面在$\boldsymbol{s}$的法线。计算各向异性非均匀介质中波阵面

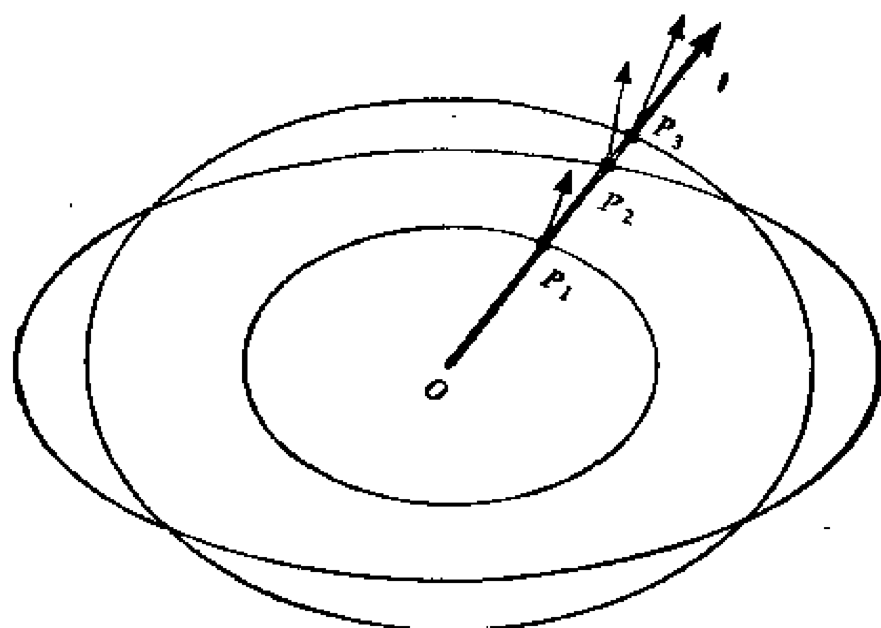


图 5.16

有三个叶片的慢度面S。在l方向有三个可能的慢度，其量值为OP_1，OP_2和OP_3。S在P_1，P_2，P_3的法线，给出三个慢度中各个的能量传播（射线）方向

几何扩散的一般方法，是由Červený(1972)给出的。

对于给定的单位慢度方向$\boldsymbol{l}$，有三个不同的数值$|\boldsymbol{s}|$，使$\boldsymbol{s}=|\boldsymbol{s}|\boldsymbol{l}$位于慢度面上（见图5.16）。它们对应于三个不同的体波，其慢度的数值由解本征值问题

$$\det[\boldsymbol{M}-(\rho/|\boldsymbol{s}|^2)\boldsymbol{I}]=0 \tag{5.100}$$

来求得，式中$M_{ip}=c_{ijpq}l_jl_q$，而$I_{ip}=\delta_{ip}$。$\boldsymbol{M}$是对称的，而$M_{ip}U_p=(\rho/|\boldsymbol{s}|^2)U_i$，所以偏振$\boldsymbol{U}$的三个本征向量互相正交。

为准备分析均匀半空间的水平分界面，我们以前取x_2方向，使得$\boldsymbol{s}=(p,o,s_3)$。对于同x_3轴垂直的分界面，Snell定律简化为，对于在分界面上耦合的所有平面波，有$s_1=p$，$s_2=0$，面s_3对每个波是不同的。同样的方法在各向异性介质中是有帮助的，图5.18表示出在两个半空间水平分界面的任一边平面波的s_3分量的构造

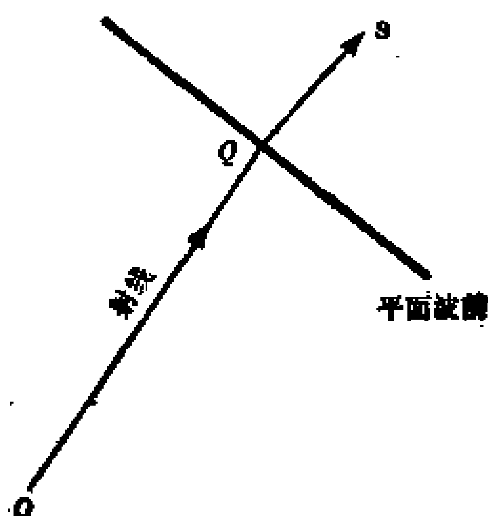


图 5.17

对于平面波阵面，射线方向（由能通量给定）一般说既不垂直于波阵面，也不必位于弧矢平面内

图。图5.18中描绘出的包含所有耦合慢度向量的平面，叫做弧矢平面。它同时还是入射面，如果它改变，则可以转动(x_1，x_2)轴，以保持$s_2=0$。这样做的代价是，$\boldsymbol{c}$的笛卡尔分量必须被变换到新坐标系。

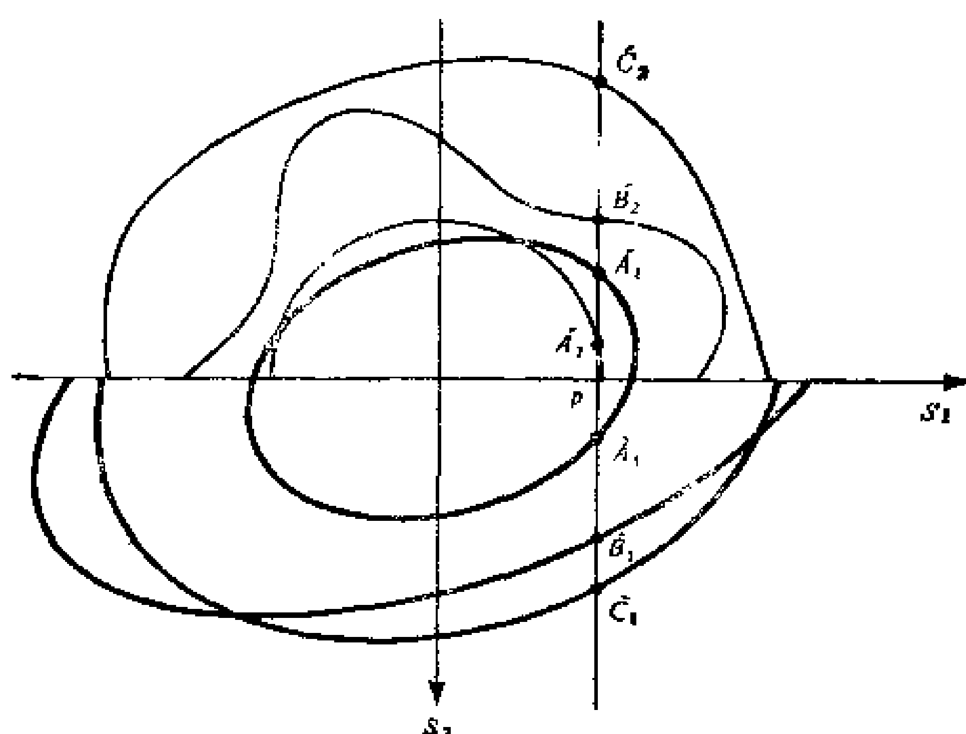


图 5.18

对于在两个各向异性半空间的水平分界面上散射的每个平面波，计算向量慢度的图解法。粗曲线是有三个叶片的慢度面在下部介质的部分，入射波（向上传播）的慢度坐标由$\acute{A}_1$给出。六个散射波都有同一水平慢度p。正的s_3值代表下部介质中的下行波，而负值（在中等粗的曲线上，它们是慢度面在上部介质中的部分）代表透射波。如果p大到足以使一部分或全部s_3值是虚数，则相应的平面波随深度呈指数增大或减小

定量地表示分界面反射和透射性质的一个好方法，是以$d\boldsymbol{f}/dz=\boldsymbol{A}\boldsymbol{f}$形式展开运动方程（在分界面的任一边），式中

$$\boldsymbol{f}\exp[i\omega(px-t)]=(u_x,u_y,u_z,\tau_{zx},\tau_{yz},\tau_{zz})^T. \qquad (5.101)$$

$\boldsymbol{A}$是个6×6矩阵，它的六个本征值是六个$i\omega s_3$的值。这里的根s_3用图解表示（对于给定的p和给定的半空间）于图5.18。我们作一个矩阵$\boldsymbol{E}$和一个相位矩阵$\boldsymbol{\Lambda}$，$\boldsymbol{E}$的各列是$\boldsymbol{A}$的本征向量，而$\boldsymbol{\Lambda}$是对角的，对于六个不同的s_3有六个表值$\exp(i\omega s_3 z)$。适当整理$\boldsymbol{E}$和$\boldsymbol{\Lambda}$的各列的顺序，每个均匀介质中的一般平面波解由$\boldsymbol{f}=\boldsymbol{E}\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{w}$给出，这里$\boldsymbol{w}$是个常数6维向量。5.4节的方法现在可用

来求作为 p 和弧矢平面空间取向的函数的三十六个不同的反射、透射系数。(一般说，矩阵**A**依赖于这个空间取向。)Keith和Crampin（1977）给出了某些数值例子。

若干特殊类型的各向异性，在地震学中具有某种重要意义。对各向同性的最简单偏离是它的弹性张量(**c**) 在与一特定方向 x_3 垂直的所有方向上是各向同性的。这样一种介质，常被叫做横向各向同性的，并用五个独立常数来表征。竹内和斋滕（Takeuchi and Saito，1972）把异常方向 x_3 取作竖直向，广泛分析了横向各向同性物质中 $d\mathbf{f}/dz=\mathbf{A}\mathbf{f}$ 的系数矩阵。在此情况下，与各向同性介质之间只存在极小的差别。SH 与准 P 和准 SV 解耦，而后者常被写成 ${}_qP$ 和 ${}_qSV$。相对于竖直轴的对称性，意味着波动解不依赖于弧矢平面的空间取向。这个重要简化，对于任何其它类型的各向异性，都是不可能的。

在各向异性微弱而其它方面都完全一般的情况下，Backus (1965) 指出，在特定平面内传播的体波的速度，对该平面内的传播方向有个简单依赖关系。例如，在 (x_1, x_2) 平面内以慢度 $(\cos\phi, \sin\phi, 0)$ 传播的 ${}_qP$ 波，有近似由

$$\rho\alpha^2 = A + B\cos 2\phi + C\sin 2\phi + D\cos 4\phi + E\sin 4\phi \quad (5.102)$$

给出的相速度 $\alpha(\phi)$。Backus 关于 $\alpha=\alpha(\phi)$ 这个形式的发现，受到Hess (1964) 从发表的资料所得到的结果的促进，这个结果是，沿海底莫霍界面下边折射的 P 波，有百分之几的速度各向异性。反过来，特殊形式 (5.102)又鼓励人们试图（例如Crampin and Bamford，1977）用五个其它弹性参数（系数 A，B，C，D，E，它们自身是**c**分量的线性组合）来反演 α 的观测。

建议进一步阅读的文献

Coddington, E. A., and N. Levinson. *Theory of Ordinary Differential Equations*(Chap. 6). New York: McGraw-Hill,

1955.

Gantmacher, F. R. *The Theory of Matrices* (2 vols.). New York: Chelsea Publishing Co., 1959.

Kraut, E. A. Advances in the theory of anisotropic elastic wave propagation. *Reviews of Geophysics*, **1**, 401-448, 1963.

Liu, H. -P., D. L. Anderson, and H. Kanamori. Velocity dispersion due to anelasticity; implications for seismology and mantle composition. *Geophysical Journal of the Royal Astronomical Society* **47**,41-58,1976.

Randall, M. J. Attenuative dispersion and frequency shifts of the earth's free oscillations. *Physics of the Earth and Planetary Interiors*,**12**,1-4,1976.

White,J.E. *Seismic Waves*. New York: McGraw-Hill,1965.

Zener, C. *Elasticity and Anelasticity of Metals*. University of Chicago Press, 1948.

问　题

5.1 如果一个固体半空间的表面不受牵引力，我们知道，可以存在位移表面波（Rayleigh 波）。如果表面是刚性的，试证明不能有相应的牵引力表面波。（提示：求一行列式，对于合适的 p 值，它不为零。）

5.2 为什么在两个均匀半空间的边界上，不能有界面 SH 波？

5.3 对于固体半空间 $z>0$（见图 5.5 和表 5.1），当在 $z=0$ 的边界条件由(a)$u_z=0$ 和$\tau_{xz}=0$，及由(b)$u_x=0$ 和 $\tau_{zz}=0$ 给定时，求 P-SV 散射矩阵。[可以从方程（5.33）开始做，以简化代数运算。]

如果 P 波和SV 波能量的组合，是向表面$z=0$ 传播，试证明，通过由边界条件(a)导出的反射与相应于(b)的反射相加，所有向下的反射都相抵消。（Smith 于1974、1975 指出，这是一个在用有限元和有限差分法做数值计算时，消掉

不希望要的网格边界反射的有用方法。）

5.4 a）扼要证明非均匀P波（5.50）和非均匀SV波（5.51），每个都有顺进椭圆质点运动。

b）根据（5.50）—（5.54），证明 Rayleigh 波在自由面（$z=0$）上的质点位移向量比例于向量

$$\left(\frac{2i}{c_R}\sqrt{\frac{1}{c_R^2}-\frac{1}{\beta^2}},0,\ \frac{2}{c_R^2}-\frac{1}{\beta^2}\right).$$

c）然后证明自由面的质点运动是逆进椭圆。

d）以简要论据说明，在充分大的深度上质点运动又成为顺进椭圆。

5.5 试证明，正是 Rayleigh 波的水平（而不是竖直）分量，随深度的增大而变化时通过零值，如图 5.11 所示。

5.6 因为地震仪常常设于（或非常接近于）不受牵引力的地球表面，所以有意义的是求得从下面入射的P，SV或SH平面波造成的半空间自由表面总位移。利用表 5.1 和图 5.5 的符号，证明当P波（振幅$\acute{P}$）从下面入射时，表面上的这个总位移是

$$\frac{\acute{P}\left[\frac{4\alpha p}{\beta^2}\frac{\cos i}{\alpha}\frac{\cos j}{\beta},0,\frac{-2\alpha}{\beta^2}\frac{\cos i}{\alpha}\left(\frac{1}{\beta^2}-2p^2\right)\right]\exp[i\omega(px-t)]}{\left(\frac{1}{\beta^2}-2p^2\right)^2+4p^2\frac{\cos i}{\alpha}\frac{\cos j}{\beta}},$$

当SV波（振幅$\acute{S}$）从下面入射时，总位移是

$$\frac{\acute{S}\left[\frac{2}{\beta}\frac{\cos j}{\beta}\left(\frac{1}{\beta^2}-2p^2\right),0,\frac{4p}{\beta}\frac{\cos i}{\alpha}\frac{\cos j}{\beta}\right]\exp[i\omega(px-t)]}{\left(\frac{1}{\beta^2}-2p^2\right)^2+4p^2\frac{\cos i}{\alpha}\frac{\cos j}{\beta}}.$$

[在$1/\alpha<p<1/\beta$范围内，最后这个公式可用来以正虚数$\frac{\cos i}{\alpha}=i\sqrt{p^2-\frac{1}{\alpha^2}}$给出当$SV$波以超临界角$j>j_c=$

$\arcsin\left(\dfrac{\beta}{\alpha}\right)$入射时地面位移的相移。]

对于 SH 入射，试证明自由面的质点运动简单地等于入射波质点运动的二倍。

5.7 给定（5.60）所定义的$\boldsymbol{f}$的形式后，证明对P-SV波的确有$\partial \boldsymbol{f}/\partial z=\boldsymbol{A}\boldsymbol{f}$，假定$\boldsymbol{A}$有（5.60)所给的形式。证明当$\rho$，$\lambda$和$\mu$是$z$的函数时，$\boldsymbol{A}$仍有此形式，但一般说，这时（5.61）不给出（5.56）的解。

5.8 设有P波势$\phi=A\exp[i\omega(px+\xi z-t)]$。对于均匀介质，它满足$\alpha^2\nabla^2\phi=\ddot{\phi}$，假定$\xi=(\alpha^{-2}-p^2)^{\frac{1}{2}}$。证明由这种势得出的$u_x$，$u_z$，$\tau_{zx}$，$\tau_{zz}$，实质上构成为（5.65）所给 F [illegible]的第一列。(差别只是由于这个下行P波的归一化不同。)

对于 SV势 $B\exp[i\omega(px+\eta z-t)]$（这里$\eta=(\beta^{-2}-p^2)^{\frac{1}{2}}$），$P$势$C\exp[i\omega(px-\xi z-t)]$，和$SV$势$D\exp[i\omega(px-\eta z-t)]$，重复进行上述讨论。[这里的要点在于，(5.65)中F的不同的列是下行的和上行的P和SV波，其中明确地给出每个波的位移和应力分量。]

证明用势描述的这四种波等效于波系统$\boldsymbol{f}=\boldsymbol{F}\boldsymbol{w}$，其中

$$\boldsymbol{w}=\begin{bmatrix}\dfrac{i\omega A}{\alpha}\\ -\dfrac{i\omega B}{\beta}\\ \dfrac{i\omega C}{\alpha}\\ \dfrac{i\omega D}{\beta}\end{bmatrix}.$$

5.9 证明Q一般是ω的偶函数（即$Q(-\omega)=Q(\omega)$），因而如果没有频散，则（5.68)描述的衰减脉冲相对于$t=x/c$总是对称的。

5.10 求下列情况下的近似式（5.77)：

a) $\alpha(\omega)=\dfrac{\alpha_0\omega}{1+\alpha_2\omega^2}$,

b) $\alpha(\omega)=\alpha_0\omega\{H(\omega-\omega_l)-H(\omega-\omega_h)\}$

(ω_l和ω_h是低截频和高截频，H是Heaviside 阶梯函数)；推导（5.77）时可利用$0<\omega_l<\omega<\omega_h$。上述两衰减函数的Hilbert 变换将是需要的。注意规则$\alpha(-\omega)=\alpha(\omega)$；上面的规定是对于$\omega>0$的。这时相应的$\mathscr{H}[\alpha(\omega)]$，对a)为

$$\frac{\alpha_0}{\pi}\frac{\omega}{1+\alpha_2\omega^2}\ln\left(\frac{1}{\alpha_2\omega^2}\right),$$

对b)为

$$\frac{\alpha_0\omega}{\pi}\ln\left(\frac{\omega_h^2-\omega^2}{\omega_l^2-\omega^2}\right).$$

5.11　Azimi等(1968)和Strick(1970)审查过s刚刚小于1时的衰减定律$\alpha(\omega)=\alpha_0|\omega|^s$。这给出在观测频率上$\alpha(\omega)$与$\omega$的实际上的线性关系。根据补充5.8中的关系式(13)和Hilbert变换$\mathscr{H}[\mathrm{sgn}\omega|\omega|^{s-1}]=|\omega|^{s-1}\tan\dfrac{s\pi}{2}$，试证明

$$\frac{1}{c(\omega)}=\frac{1}{c_\infty}+\frac{\alpha(\omega)}{|\omega|}\tan\frac{s\pi}{2}.$$

对于上述实际为线性的衰减定律，$\alpha(\omega)/|\omega|$必然实际是常数。利用上面的最后方程，证明在地震频率范围内不同频率分量间的相对频散可能变化很小，因面难于检测，虽然对于只刚刚比1小的s的绝对频散(相对于相速度c_∞)可能很大。(这个奇异结果是由于Hilbert变换积分收敛缓慢。在兆赫和更高频率上的振幅谱，控制着在地震频率上的相位滞后。这是难以置信的，并且可以避免，因为比较合理的衰减定律具有不同的高频变化过程。)

5.12　如果$Q^{-1}\ll1$和（5.96）按二项式定理展开，我们发现，衰减的平面S波的相速度一般是$\left(\dfrac{\mathrm{Re}\{\mu\}}{\rho}\right)^{\frac{1}{2}}\left(1+\dfrac{1}{Q^2}\text{级的项}\right)$。

这是否违反5.5节的一个重要结论——即表因介质中的衰减对速度的影响引入一项$1/Q$级的修正?

5.13 一种衰减介质，若其全部损耗都局限于剪切，而纯压缩中没有损耗，则可表征为复刚性系数，但体积模量是纯实数。证明这种介质P波的Q与S波的Q之比是$3\alpha^2/4\beta^2$，其中α和β是两种波的速度（假定$Q\gg1$）。

5.14 对于诸如$|t-T|\ll T$的时间t，证明可以认为Heaviside 函数$H(t-T)$有Hilbert变换$\left(-\frac{1}{\pi}\right)\ln\left|\frac{t-T}{T}\right|$。

第六章　球面波的反射和折射；Lamb 问题

作为一般规则可以说，解释地震资料所需的基本理论分为两类：研究在现实地球模型中传播的波的逐渐近似，或者在高度理想介质中传播的波的严格形式。因此，第一类包括几何射线理论(第四章)，而第二类包括我们在第五章中关于平面波和均匀半空间的所有工作。随着我们发展了比较精致的方法，在下述意义上这两类逐渐合併：我们想要相当精确地计算在比较现实的地球模型中传播的波。

本章主要致力于上面提到的第二类理论的发展，因为我们将从事在只由两个均匀半空间组成的介质中，从点源辐射出的波的计算。在 1904 年，Horace Lamb 给出了一个这种问题的精确解，其中的源是垂直施加于固体半空间自由表面上一点的脉冲。但是，由于他的文章包含的内容远不止此，所以，"Lamb 问题"一词，现在用来指比较一般的有一个分界面的源和介质的几何关系，其中的主要兴趣在于精确计算(在时间域)由脉冲线源或点源发射出的波。

我们通过把点源发射出的球面波表示为平面波的叠加(Weyl 积分)和作为柱面波的叠加(Sommerfeld 积分)来引入这个课题。当球面波与两个不同半空间的平界面相交时，产生的波系统自然可分为三大类：(i) 从界面直接反射或透过界面的波；(ii) 从源点向接收点传播的波，它所经过的路径中有以体波速度(首波)沿界面的折射；(iii) Rayleigh 或者 Stoneley 型的波，其振幅随离界面的距离呈指数减小。这些结果由巧妙处理复射线参数平面内的积分路径而得出。给出三大类波动的一般轮廓以后，利用频率

域，我们以 Cagniard 和 De Hoop 的工作为基础，发展精确的求解方法。这些方法使用时间的 Laplace 变换，但最后结果在时间域内表述。基本划分为三个不同的波类型仍是明显的，漏能模式(另一类界面波)的贡献很小。

在开始我们必须强调，解 Lamb 问题的最好方法，是用 Laplace 变换和 Cagniard 反演方法。这时复射线参数平面内的积分路径，讨论起来比较简单；而求时间域中脉冲形状的 Laplace 变换的实际反演做起来省力。在 6.4 节和 6.5 节中给出这些方法的比较完整的描述。但我们用 Fourier 变换来引入这个题材。这部分地得感谢关于这个课题的大量文献，包括 Ewing 等(1957)，Brckhovskikh(1960)，Červený 和 Ravindra(1971) 的书以及几百篇文章。但结合 Lamb 问题发展 Fourier 变换方法的主要理由，是为第九章打基础。第九章给出计算真实结构中地震图的实际方法。我们将在那里看到，分层介质的反射率法和掠入射问题的强效解法，是以用 Fourier 变换进行数值计算，而不是以 Laplace 变换的分析反演为基础的。

6.1 作为平面波和柱面波叠加的球面波

考虑一个非齐次波动方程，其点源在原点，

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2}-c^2\nabla^2\phi=4\pi c^2\delta(\mathbf{x})\exp(-i\omega t). \qquad (6.1)$$

由(4.4) 得到这个方程的解（在无限均匀空间中）为

$$\phi(\mathbf{x},t)=\frac{1}{R}\exp\left[i\omega\left(\frac{R}{c}-t\right)\right], \qquad (6.2)$$

式中 $R=(x^2+y^2+z^2)^{\frac{1}{2}}$。

求解方程(6.1)，还可以通过确认 $\phi(\mathbf{x},t)$ 与时间的关系为稳态振动 $\exp(-i\omega t)$，然后再用 Fourier 变换方法推导与空间的关系。我们得到

$$\phi(\boldsymbol{k},t)=[4\pi c^2/(k^2c^2-\omega^2)]\exp(-i\omega t),$$

式中 $k^2=k_X^2+k_y^2+k_z^2$。于是，根据(6.2)和 $\phi(\boldsymbol{k},t)$ 的三重逆变换，有

$$\frac{1}{R}\exp\left[i\omega\left(\frac{R}{c}-t\right)\right]=\frac{\exp(-i\omega t)}{2\pi^2}\iiint_{-\infty}^{\infty}\frac{\exp(i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x})}{k^2-\frac{\omega_2}{c^2}}$$

$$\times dk_x\,dk_y\,dk_z. \tag{6.3}$$

(6.3) 的左边是以速率 c 自源点向外传播的球面波。其振幅只是径向距离的函数，且无方向变化。(6.3)的右边有权函数$\left[2\pi^2\times\left(k^2-\frac{\omega^2}{c^2}\right)^2\right]^{-1}$和在整个$k_x$，$k_y,k_z$区间上的平面波$\exp[i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}-\omega t)]$的叠加。因而看起来我们已经完成用平面波的叠加表示球面波的任务。但是，仔细看看(6.3) 中的平面波就发现，它们有从0到∞的任意速度(ω/k)，所以它们还不具有在介质中有给定速度 c 的平面波的形式。

为了求 Weyl 积分，我们必须对于波数分量中的一个进行积分；我们取 k_z，因此，剩下的积分是对于水平向波数的。

如果我们把 k_z 扩展到复数，并应用留数理论，则 (6.3)中对 k_z 的积分很简单。对于给定的 k_x 和 k_y，被积函数在 $k_z=\pm[(\omega^2/c^2)-k_x^2-k_y^2]^{\frac{1}{2}}$有极点，唯一的困难是(对一定范围的 k_x 和 k_y 值)这些极点位于实 k_z 轴上，与积分路径冲突 (参看图 6.1 a)。为方便起见，我们用使 $1/c$ 为复数的办法，引入一个小衰减。如我们在第五章[方程(5.87),(5.88)]已看到的，这样做的适当方法，是把$1/c$看作一个参考值加一个小复数修正的和，该复数有正的虚部。所以，$\mathrm{Im}\{1/c\}=\varepsilon,\varepsilon>0$(对于 $\omega>0$)。直接结果是把极点的位置变到第一和第三象限(见图 6.1 b)，消除了与积分路径的冲突。

我们定义第一象限中极点的位置为

$$k_z=i\gamma=+\left(\frac{\omega^2}{c^2}-k_x^2-k_y^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

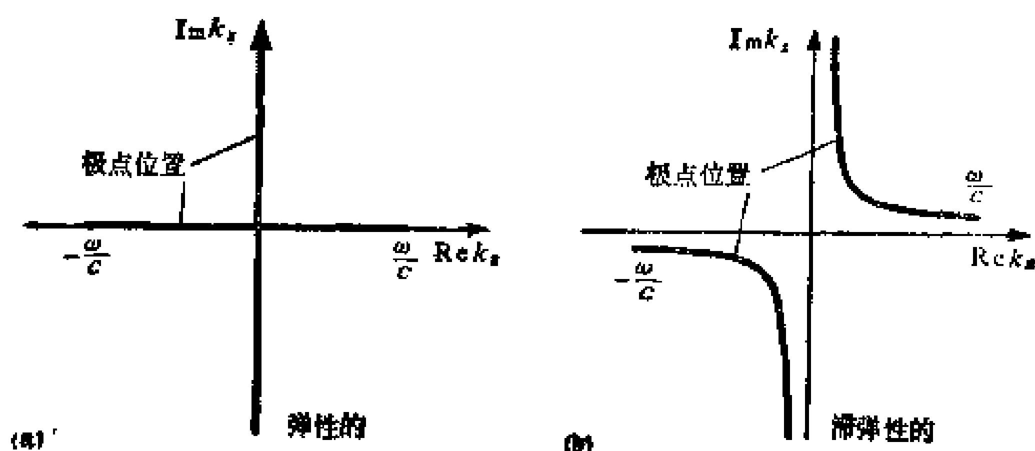


图 6.1

对于不同的实 k_x, k_y 值和固定的 $\omega>0$, 复 k_z 平面内极点的位置。
(a) 弹性介质, (b) 衰减介质

这时另一个极点(第三象限)的位置是

$$k_z=-i\gamma=-\left(\frac{\omega^2}{c^2}-k_x^2-k_y^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

在两种情况下，我们发现 $\mathrm{Re}\{\gamma\}$是正的，$\mathrm{Im}\{\gamma\}$是负的。

求留数值现在很简单。对于 $z>0$, 如果积分 (6.3) 沿上半平面中足够大的半圆进行(参看图 6.2 a)，则因子 $\exp(ik_zz)$抑制 (6.3) 中的被积函数。把这个半圆同沿实轴的积分路径加起来，我们有绕着第一象限中 $k_z=i\gamma$ 的极点沿正方向前进的闭合回路，于是有

$$\phi=2\pi i\times\text{留数}=\frac{\exp(-i\omega t)}{2\pi}\iint_{-\infty}^{\infty}\frac{\exp(ik_xx+ik_yy-\gamma z)}{\gamma}\times dk_x\,dk_y.$$

对于 $z<0$，我们加下半平面中足够大的半圆，以得到沿负方向(即顺时针)的闭合回路，它包括第三象限中 $k_z=-i\gamma$ 的极点：

$$\phi=-2\pi i\times\text{留数}=\frac{\exp(-i\omega t)}{2\pi}\iint_{-\infty}^{\infty}\frac{\exp(ik_xx+ik_yy+\gamma z)}{\gamma}\times dk_xdk_y.$$

把这些结果概括起来，我们得到 Weyl 积分

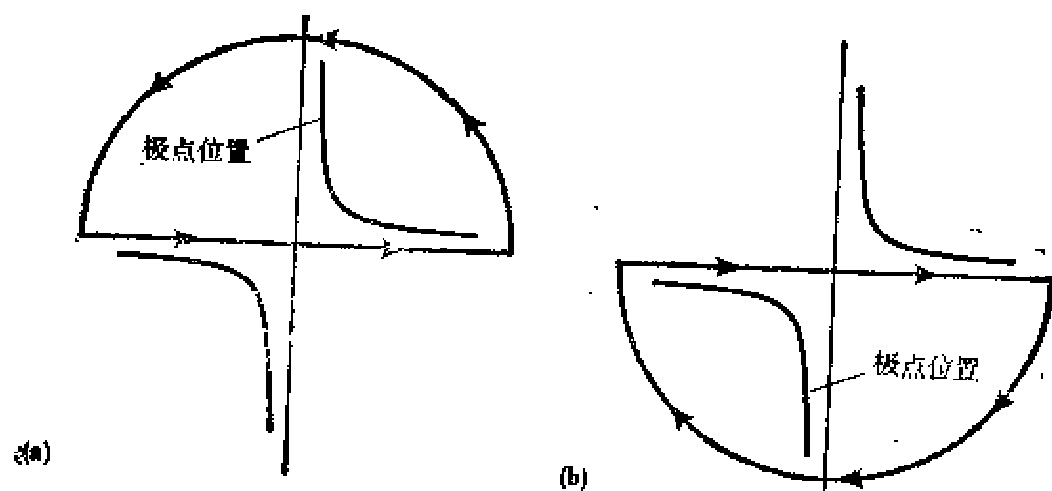


图 6.2

关于求 Weyl 积分的复 k_z 平面内的积分路径。(a) 当 $z>0$ 时的路径，(b) $z<0$

$$\frac{1}{R}\exp\left(i\omega\frac{R}{c}\right)=\frac{1}{2\pi}\int\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\exp(ik_x x-ik_y y-\gamma|z|)}{\gamma}dk_x\,dk_y, \tag{6.4}$$

式中 $\gamma=(k_x^2+k_y^2-\omega^2/c^2)^{\frac{1}{2}}$，$\gamma$ 符号的选择是使 $\mathrm{Re}\gamma>0$。在零衰减的极限情况下，它变为 $\mathrm{Re}\gamma\geqslant0$。

在上式中，被积函数中的平面波满足具有速度 c 的波动方程，所以球面波确实被表示为这种平面波的叠加。注意，对(k_x, k_y)积分的某些部分，平面波是非均匀的。这发生在 $\omega^2/c^2<k_x^2+k_y^2$，因而 γ 变为正实数，而相应的非均匀波平行于 xy 平面传播，在 z 方向振幅变化最快。

如前面已提到过的，别的波数分量也可代替 k_z 而被用于积分。如果我们用 k_x，我们就会发现非均匀波平行于 yz 平面传播，同样代表球面波。我们之所以选择用波数的深度分量进行计算，是因为结果 (6.4)很适于分析水平面上的边条件。

为得到 Sommerfeld 积分，我们改变积分变量(k_x, k_y)为(k_r, ϕ')：

$$k_x = k_r\cos\phi', \quad k_y = k_r\sin\phi'. \tag{6.5}$$

因此，$i\gamma=(\omega^2/c^2-k_x^2-k_y^2)^{\frac{1}{2}}=(\omega^2/c^2-k_r^2)^2$，而面积元 $dk_x dk_y$ 被代之以 $dk_r(k_r d\phi')$，整个水平的波数平面（$-\infty<k_x<\infty$；$-\infty<k_y<\infty$）被 $0\leqslant k_r<\infty$，$0<\phi'<2\pi$ 所覆盖。积分（6.4）变为

$$\frac{1}{R}\exp\left(i\omega\frac{R}{c}\right)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{\infty}dk_r\int_0^{2\pi}d\phi'\frac{k_r}{\gamma}\exp[ik_r r\cos(\phi-\phi')-\gamma|z|], \tag{6.6}$$

这里我们引入了$(r,\ \phi)$作为关于$(x,\ y)$的极坐标 $x=r\cos\phi$，$y=r\sin\phi$。我们常把 r 叫做水平变程，或简称变程，ϕ 是柱极或球极的方位坐标。因为 z 是向下测量的，所以从上面看水平面时，ϕ 是顺时针增大的。

(6.6)中对ϕ'的积分可明确地给出，利用关系式$2\pi J_0(k_r r)=\int_0^{2\pi}\exp(ik_r r\cos\Phi)d\Phi$ 以便求出Sommerfeld 积分

$$\frac{1}{R}\exp\left(i\omega\frac{R}{c}\right)=\int_0^{\infty}\frac{k_r J_0(k_r r)\exp(-\gamma|z|)}{\gamma}dk_r, \tag{6.7}$$

式中 $i\gamma=(\omega^2/c^2-k_r^2)^{\frac{1}{2}}$，$\mathrm{Re}\{\gamma\}>0$。这里的被积函数是新种类的基波——柱面波（对于竖直轴为对称），其中以分离的因子依赖于 r 和 z。

补充 6.1

Weyl 积分和 Sommerfeld 积分的基本意义

具有特定边界条件的波动方程的解的总体是个向量空间，而对于各种坐标系，都可建立一向量基，来构成这个空间。Weyl 积分以平面波为基，将它们加起来给出点源的解。Sommerfeld 积分，是使用柱面波的类似结果。常常我们把基向量看成适合于特定坐标系的本征向量或本征函数。平面波和柱面波被看成与用分离变量法解波动方程的研究有关的本征函数[例如，参看第五章方程(5.9)和(5.10)]。

这些观念在后面各章的下列情况中一再重复出现：当本征函数可

以是向量位移的面波振型时，当源可能有复杂的辐射图案时，当坐标系可以包含以地球心为原点的球极时，以及当本征函数的离散和比我们此处所用的对水平向波数的积分更为合适的时候。

求适合于特定源的本征函数的特殊积分(或求和)问题，就是求展开式中每个(适当归一化的)本征函数的系数。这个系数是特定本征函数被激发程度的有用量度。

所有这些源的展开式(诚如 Weyl 积分，以及第七和第八章中描写的对面波和简正振型的较复杂展开式）的一个共同性质是，被积函数（或求和中的每一项）可以分解为在源点求值的竖向本征函数、在接收点求值的竖向本征函数、以及依赖于源点和接收点的水平向距离的传递波函数。（就我们这里的情况来说，例如（6.4)和（6.9)，在源点和接收点的竖向本征函数，是沿正方向运行的波，所以只出现与竖向距离成正比的不同相位。）描述积分中不同项的独立变量，实质上是水平慢度，这个变量的函数规定着被积函数的权因子。

在第五章我们看到，选取垂直于传播方向的 y 轴，然后通过 $k_x=\omega\sin i/c=\omega p$ [例如方程(5.16)] 使 k_x 与射线参数一致，这样来分析平面波是很方便的。但是现在，如同(6.6)中对 ϕ' 的积分所直接表明的，由点源发出的平面波系统，包含所有可能的水平传播方向。水平向波数与射线参数的关系因而变为

$$k_x=\omega\sin i\cos\phi'/c=\omega p\cos\phi',$$

$$k_y=\omega\sin i\sin\phi'/c=\omega p\sin\phi'.$$

与(6.5)对比，我们看到

$$k_r=\omega p. \tag{6.8}$$

因此，根据(6.7)，我们能够把球面波表示为对所有射线参数积分的形式

$$\frac{1}{R}\exp\left(i\omega\frac{R}{c}\right)=i\omega\int_0^\infty\frac{p}{\xi}J_0(\omega pr)\exp(i\omega\xi|z|)\,dp. \tag{6.9}$$

这里我们取 $i\gamma=\omega(c^{-2}-p^2)^{\frac{1}{2}}=\omega\xi$。再回顾一下，$\text{Re}\{\gamma\}>0$。

所以有

$$\xi=(c^{-2}-p^2)^{\frac{1}{2}}，且必须选 \mathrm{Im}\{\xi\}>0 的一支， \quad (6.10)$$

对于理想弹性介质，它变为 $\mathrm{Im}\{\gamma\}\geqslant 0$。用这个平方根的规定，(6.9) 中的竖向波函数可以很容易与第五章的公式一致：它是 $\exp[i\omega(c^{-1}\cos i)|z|]$，如果 $1/c<p$，则其中的 $(c^{-1}\cos i)=(c^{-2}-p^2)^{\frac{1}{2}}=\xi$ 是正虚数。注意，ξ 是竖向慢度，$i\gamma$ 是相应的竖向波数，但 p 是水平向慢度。对于 S 波，我们将用 η 作为竖向慢度，$i\nu$ 作为竖向波数。因此，$\xi^2+p^2=1/\alpha^2$，$\eta^2+p^2=1/\beta^2$。因为本章主要讨论体波和无频散面波，故用慢度 p，ξ，η 进行计算实际上是合适的。所以，我们在这里将始终用(6.9)而不是(6.7)进行计算。对于第七章描述的面波，当强频散能存在且竖向慢度为虚数时，我们将转回到利用 k_r，γ，ν 这些变量。

6.2 球面波在平界面上的反射：声波

在本节和下一节，我们将审查当弯曲波阵面入射于两种不同介质间分界面时的基本现象。对于这方面的最初工作，我们将使用固定频率上的波，因为地震学中的许多观测都能从物理上解释为这种波的综合（Fourier 逆变换）。在较后的工作中，为得到时间域中的精确波动解，我们将转到用 Laplace 变换发展较为方便的方法。

我们要解的第一个问题（见图 6.3），是关于在由沿 $z=0$ 接触的两种不同均匀半无限流体组成的物体中的声波。源点位于介质 1 中(密度 ρ_1，速度 α_1)的深度 $z_0<0$ 处，我们还要考虑介质 1 中的观测点(x, y, z)。源点—接收点距离给定为

$$R=[x^2+y^2+(z-z_0)^2]^{\frac{1}{2}},$$

我们将假定，声源产生下列形式的压力波：

$$P=P^{\wedge}=A\frac{1}{R}\exp\left[i\omega\left(\frac{R}{\alpha_1}-t\right)\right],$$

A 为常数。

利用 6.1 节的结果，我们将把 $P^{入}$ 表示为柱面波的叠加。然后我们应用第五章的理论，求反射和透射的平面波，它们必然也是叠加的。所以

$$P^{入}=\frac{A}{R}\exp\left[i\omega\left(\frac{R}{\alpha_1}-t\right)\right]$$
$$=i\omega\exp(-i\omega t)\int_0^\infty\frac{Ap}{\xi_1}J_0(\omega pr)\exp(i\omega\xi_1|z-z_0|)dp, \tag{6.11}$$

式中 $\xi_1=\alpha_1^{-1}\cos i_1=(\alpha_1^{-2}-p^2)^{\frac{1}{2}}$，当 $\frac{1}{\alpha_1}<p$ 时为正虚数。若把这里的被积函数看成对平面波的方位积分［与方程(6.6)比较］，自然就要试用反射场和透射场的解

$$P^{反}=i\omega\exp(-i\omega t)\int_0^\infty\frac{Bp}{\xi_1}J_0(\omega pr)\exp[-i\omega\xi_1(z+z_0)]dp$$
$$当z<0, \tag{6.12}$$

和

$$P^{透}=i\omega\exp(-i\omega t)\int_0^\infty\frac{Cp}{\xi_1}J_0(\omega pr)\exp(-i\omega\xi_1z_0+i\omega\xi_2z)dp$$
$$当z>0. \tag{6.13}$$

使压力和竖向位移在 $z=0$ 连续的条件是 $A+B=C$ 和 $\frac{\xi_1}{\rho_1}(A-B)=\frac{\xi_2}{\rho_2}C$，这两个方程决定平面波反射系数和透射系数：

$$\frac{B}{A}=-\frac{\rho_1\xi_2-\rho_2\xi_1}{\rho_1\xi_2+\rho_2\xi_1}=-\frac{\rho_1\frac{\cos i_2}{\alpha_2}-\rho_2\frac{\cos i_1}{\alpha_1}}{\rho_1\frac{\cos i_2}{\alpha_2}+\rho_2\frac{\cos i_1}{\alpha_1}} \tag{6.14}$$

和

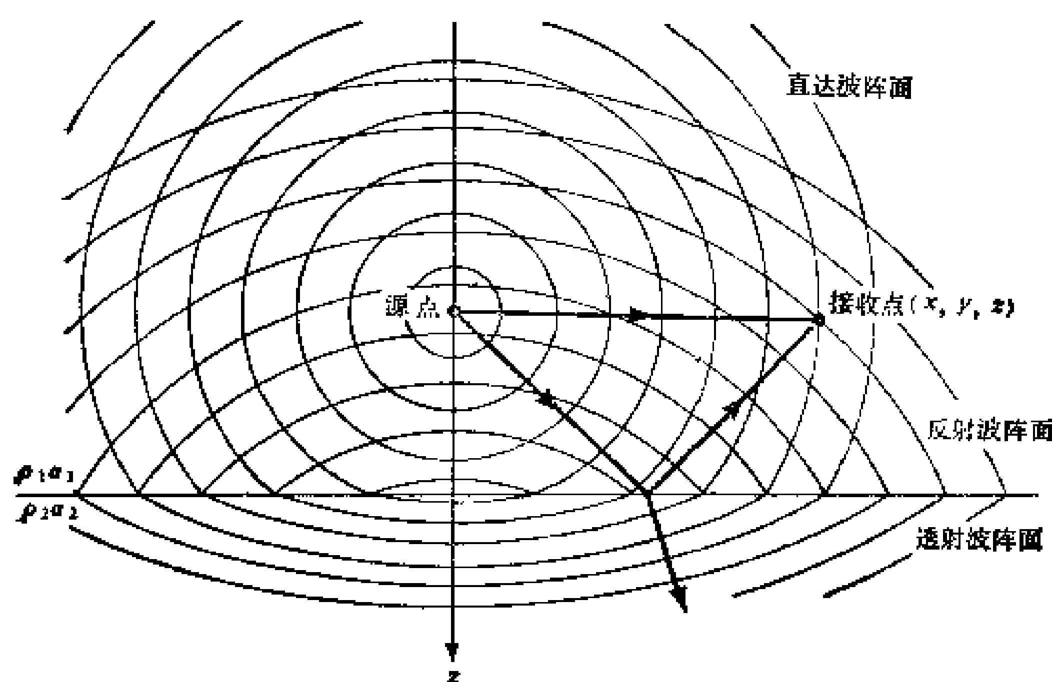


图 6.3
密度为 ρ_1，速度为 α_1 的流体半空间 $z<0$ 中，源点和接收点的示意图。另一个流体半空间(ρ_2, α_2)占据 $z>0$，压力和竖向位移在分界面上连续。由于波阵面系统很复杂，所以通常只用射线

$$\frac{C}{A}=\frac{2\,\rho_2\xi_1}{\rho_1\xi_2+\rho_2\xi_1}=\frac{2\,\rho_2\dfrac{\cos i_1}{\alpha_1}}{\rho_1\dfrac{\cos i_2}{\alpha_2}+\rho_2\dfrac{\cos i_1}{\alpha_1}}.$$

还要注意到，当 $1/\alpha_2<p$ 时，$\alpha_2^{-1}\cos i_2=\xi_2=(\alpha_2^{-2}-p^2)^{\frac{1}{2}}$ 为正虚数，以保证(6.13)随深度呈指数减小。

在本节的下余部分，我们将求反射波(6.12)的近似值，用的是标准鞍点积分法，并从 $\alpha_1>\alpha_2$ 的情况开始。

第一步是利用 Hankel 函数 $H_0^{(1)}$ 代替 J_0 写出 (6.12)。因 $J_0(x)=\frac{1}{2}[H_0^{(1)}(x)+H_0^{(2)}(x)]$ 和 $H_0^{(2)}(x)=-H_0^{(1)}(-x)$，所以得到

$$P^{反}=\frac{i\omega}{2}\exp(-i\omega t)\int_{-\infty}^{\infty}\frac{Bp}{\xi_1}H_0^{(1)}(\omega pr)\exp[-i\omega\xi_1$$

$$\times(z+z_0)]dp \tag{6.15}$$

(利用B是p的偶函数)。

第二，假定变程r是波长的许多倍，使得pr很大，因而能用$H_0^{(1)}(\omega pr)$的渐近展开式取近似值

$$H_0^{(1)}(\omega pr)=\left(\frac{2}{\pi\omega pr}\right)^{1/2}\exp[i(\omega pr-\pi/4)]$$
$$\times\left[1-\frac{i}{8\,\omega pr}+O\left(\frac{1}{\omega^2p^2r^2}\right)\right]. \tag{6.16}$$

[对于零附近的p值，上面的展开式是不精确的。但后面我们将使积分路径变形，以避开$p=0$。变形后由(6.16)代换是比较正确的。]近似结果现在为

$$P^{反}=\left(\frac{\omega}{2\,\pi r}\right)^{1/2}\exp[-i(\omega t-\pi/4)]$$
$$\times\int_{-\infty}^{\infty}\frac{Bp^{1/2}}{\xi_1}\exp[i\omega(pr-\xi_1z-\xi_1z_0)]dp, \tag{6.17}$$

其中略去了被积函数中$1/\omega$级的项，而包含ξ_1和ξ_2的$B=B(p)$由(6.14)给定。

补充 6.2

确定复p平面中$(\alpha^{-2}-p^2)^{\frac{1}{2}}=\xi$的分支切割以使在整个平面上$\text{Im}\xi\geqslant0$

我们希望把ξ表示为p的单值解析函数，而平方根符号的两重性要求我们用两个p平面(Riemann 叶)完全地描述ξ。说到顶叶和底叶时，是按照$\text{Im}\xi>0$和$\text{Im}\xi<0$，它们沿由$\text{Im}\xi=0$所确定的线（分支切割)相连接。显然，割线含有$\xi=0$的点(分支点)，它们是$p=\pm1/\alpha$。我们需要了解，如何以ξ在整个路径上随p平滑变化的方式，做成绕分支点的闭合路径。

由于分支切割取决于$\text{Im}\xi=0$，所以$\alpha^{-2}-p^2$在割线本身上为非负的实数，因而有

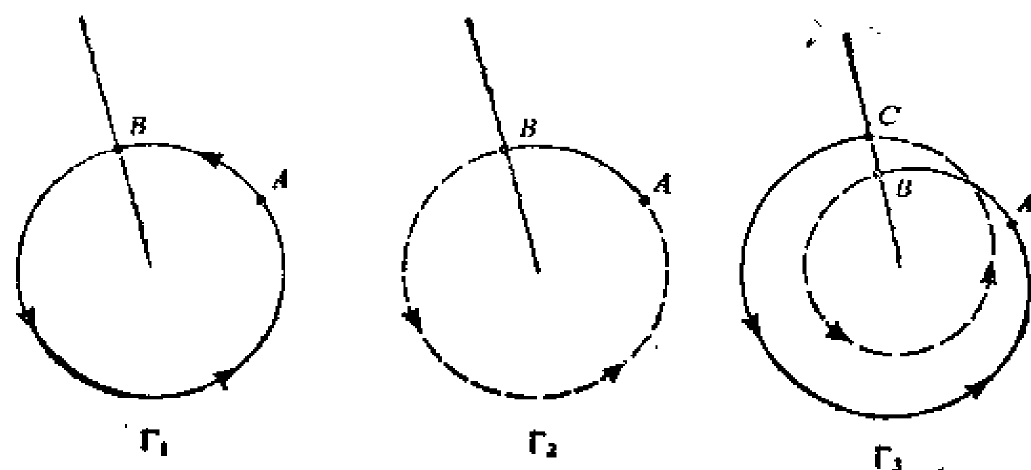
$$1/\alpha^2-(\text{Re}p)^2+(\text{Im}p)^2-2\,i(\text{Re}p)(\text{Im}p)\geqslant0. \tag{1}$$

但由于 $\text{Im}(1/\alpha^2)$是很小的正数，所以，要求(1)的左边为实数，这意味着，在完全弹性的极限情况下，

$$(\text{Re}p)(\text{Im}p)=\varepsilon,\ \varepsilon>0,\ \varepsilon\to 0.$$

因此，分支切割位于第一和第三象限内的双曲线上。由(1)得出的进一步限制是，$(\text{Im}p)^2\geqslant(\text{Re}p)^2-\text{Re}\left(\frac{1}{\alpha^2}\right)$，分支切割的极限位置示于图 6.4。

为看清如何导出分支切割，以及如何从通常认为双值的函数 $\xi=\xi(p)$中，做成单值解析函数，现考虑下列三个圆：



从 A 点开始，闭合圆 Γ_1 完全是在同一叶上画出的，ξ 是单值的，但在 B 点通过分支切割时甚至不是连续的。对于圆 Γ_2，ξ 在 B 是解析的，要求 Γ_2 进到不同的叶（虚线）；但这时 Γ_2 不使 ξ 回到与最初在 A 相同的值。最后，Γ_3 表示绕分支点两次的路径，ξ 在全路程上的变化是解析的，并回到它在 A 的初始值。

在补充 6.2 中描述了对于 ξ_1 和 ξ_2 的分支切割位置，而 $P^{反}$ 的割线表示于图 6.4。我们现在的目的是将积分路径变形，以使仅仅一个有限范围的 p 值的贡献是有意义的，然后估算积分本身。为此，我们利用鞍点分析的标准方法，来求在足够大频率上有效的 $P^{反}$ 的近似值。

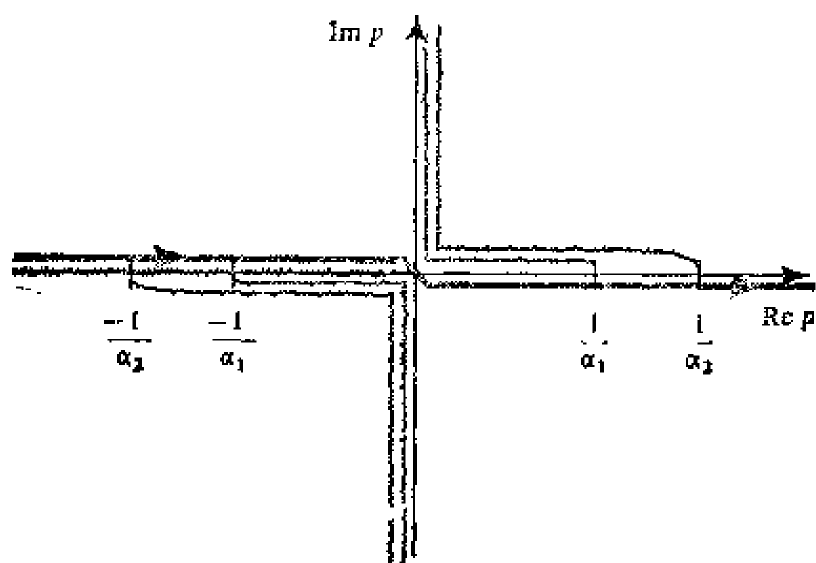


图 6.4

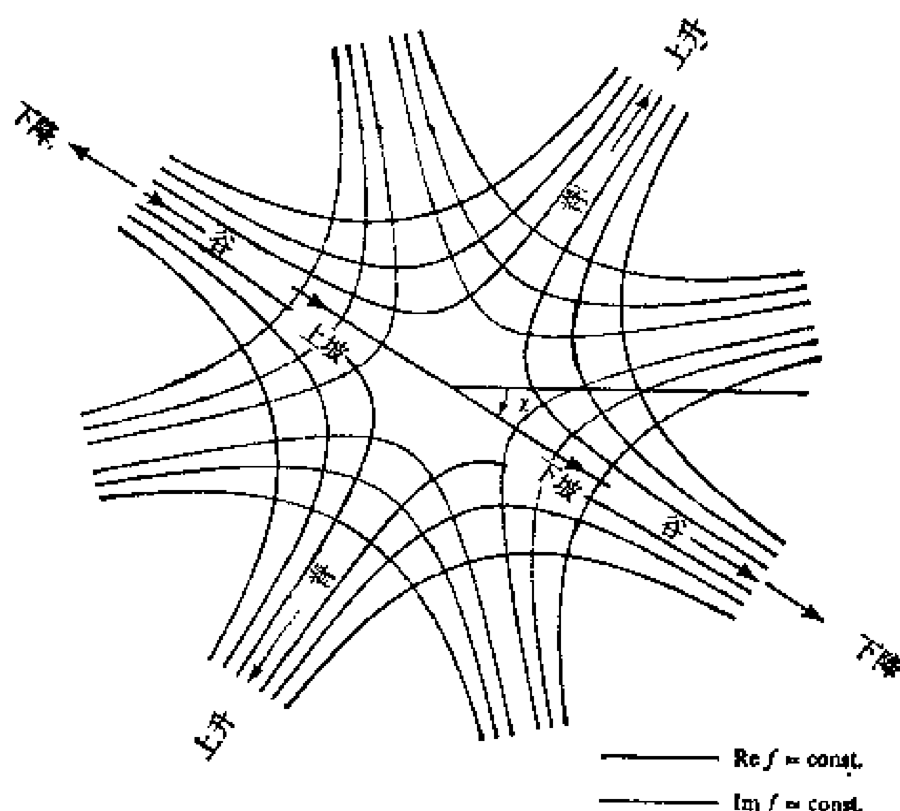
复 p 平面中 ξ_1，ξ_2 和 $p^{\frac{1}{2}}$ 的分支切割。这些割线由 $\mathrm{Im}\,\xi_1=0$，$\mathrm{Im}\,\xi_2=0$；以及 $\mathrm{Re}\,p^{\frac{1}{2}}=0$ 给定（这是(6.16)所假定的割线。事实上这直接就是一条 $H_2^{(1)}(\omega pr)$ 的分支切割)。P 层(见（6.17)）的积分路径，位于三条割线稍上一点的负实轴上和位于两条割线稍下一点的正实轴上

补充 6.3

用最速下降法估算 $I(x)=\int_c F(\zeta)\exp[xf(\zeta)]d\zeta$

我们假定读者对此方法有些了解(例如，参看 Jeffreys and Jeffreys，1972)。这里的目的是说一下表示符号和某些应用。首先，假定 $f(\zeta)$ 在 $\zeta=\zeta_0$ 有一鞍点。此处 f 是解析的。$\mathrm{Re}\,f=$ 常数的回路与 $\mathrm{Im}\,f=$ 常数的回路互相正交。在 ζ_0 附近，这些回路是双曲线，如下图所示。(χ 角大约是 $-32°$，实际上，它总是在 $-\pi/2\leqslant\chi\leqslant\pi/2$ 范围内。)

名称"谷"和"脊"，以及上升和下降的方向，描述在 ζ_0 附近由 $\mathrm{Re}\,f$ 给定高度的表面形状。$I(x)$ 的被积函数（在大小上）主要受控于 $\exp(x\mathrm{Re}\,f)$；因此，既然假定 x 为大正数，所以"谷"和"脊"自然应用于该被积函数。取积分路径沿着一谷向上，在脊的最低点穿过脊，再沿着对面的谷向下，这样常可使对估算 $I(x)$ 有意义的积分范围达到最小。回路如何变形(以便从谷到谷时穿过鞍点)的细节，将依赖于被积



函数的奇点和分支切割，并依赖于C的终点。我们将假定C被变形为如上面所说的上坡和下坡路径，该路径与正的实ξ轴构成角χ（$-\pi<\chi<\pi$）。做出$f(\xi)$对ξ_0的 Taylor 级数展开，很容易证明$f''(\xi_0)e^{2i\chi}$是负实数。忽略掉$f(\xi)$展开式之中的$O[(\xi-\xi_0)^3]$项，发现鞍点对$I(x)$的贡献渐近为

$$\left|\frac{2\pi}{xf''(\xi_0)}\right|^{\frac{1}{2}}F(\xi_0)e^{i\chi}\exp[xf(\xi_0)] \quad 当x\to\infty. \tag{1}$$

但是这个公式在地震学中意义不大，因为我们将发现，它只不过给出用几何射线理论也能得到的答案。比较重要的是，在鞍点上取数值积分而不必对$f(\xi)$用粗略的近似方法。常常我们要追随 Ref 的“谷”到离鞍点本身很远的距离以外(例如，参看图 6.6)，在此情况下，谷的趋势不在鞍点与脊的趋势正交。

采用补充 6.3 中的符号，使$x=\omega$，$\xi=p$，我们看到

$$f(p)=i(pr+\xi_1|z+z_0|) \quad (z<0,\ z_0<0),$$

$$f'(p)=i(r-p|z+z_0|/\xi_1),\tag{6.18}$$
$$f''(p)=-i|z+z_0|/(\alpha_1^2\xi_1^3),$$
它指明一个鞍点 $p=p_s$，使得有 $r\xi_1=p_s|z+z_0|$。

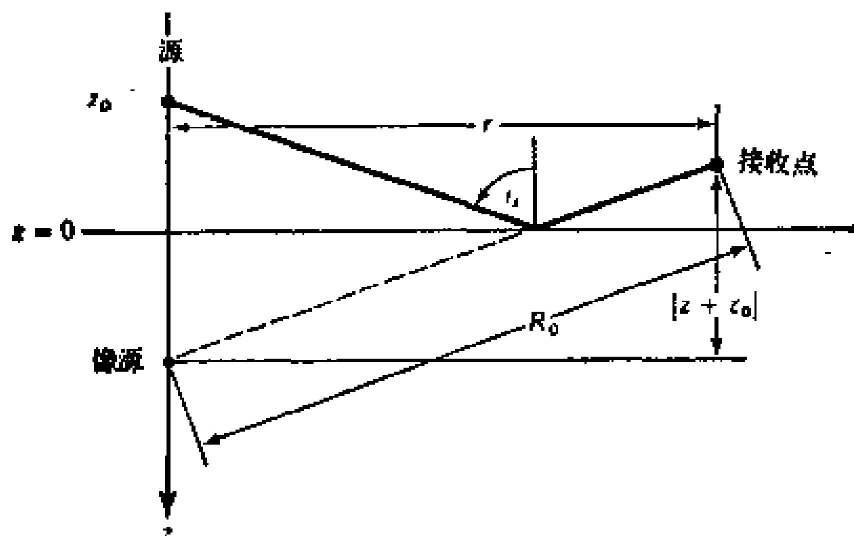


图 6.5

源点和接收点间界面反射射线的几何示意图。它有特殊射线参数 $p_s=\alpha_1^{-1}\sin i_s$。$R_0$是像源（在 $z=-z_0$）与接收点间的距离。注意三角关系 $r=R_0p_s\alpha_1$，$pr+\alpha_1^{-1}\cos i_s|z+z_0|=R_0/\alpha_1$，和 $r\cos i_s=|z+z_0|\sin i_s$

用一个角表示，$p_s=\alpha_1^{-1}\sin i_s$，这时 $\xi_1=\alpha_1^{-1}\cos i_s$，于是 $r\cos i_s=|z+z_0|\sin i_s$。根据图 6.5，现在很明显，鞍点恰好出现在给出源点和接收点间反射射线的 p 值上。通过采用补充 6.3 中的近似式(1)，少量的代数和几何运算给出渐近结果

$$p^{\text{反}}\sim\frac{B(p_s)}{R_0}\exp\left[i\omega\left(\frac{R_0}{\alpha_1}-t\right)\right]\qquad 当\ \omega\to\infty\tag{6.19}$$

只须（6.17）中实的积分路径能够变形到 $p=p_s$上的最速下降路径，而无须获取由被积函数的奇点或分支切割造成的任何更多的贡献。[②]鞍点本身位于两条分支切割上，因此，乍一看似乎不可能利用最速下降路径。的确，如果该路径只限定在$\text{Im}\xi_1\geqslant0$，$\text{Im}\xi_2\geqslant0$ 的 Riemann 叶上，它是不可能的。但是，利用（在第一象限）$\text{Im}\xi_1<0,\text{Im}\xi_2<0$ 的叶，得到如图 6.6 所示的路径 Γ，它具有下

列性质：

i) 量 $i(pr-\xi_1 z-\xi_1 z_0)$ 是个解析函数，在鞍点取值为 iR_0/α_1；

ii) 在Γ上，$i(pr-\xi_1 z-\xi_1 z_0)-iR_0/\alpha_1$ 处处为负实数；

iii) Γ 的渐近线为图 6.6 所示的直线，与负实轴和正实轴构成角 i_s。

对于作为实数 X 的函数的 p，这三个性质来自 $i(pr-\xi_1 z-\xi_1 z_0)=-X^2+iR_0/\alpha_1$ 的解。后面（在图 6.12 c 的图注中，以及对于同 Cagniard 理论相联系的有关路径）我们将给出这些解的更多细节。这里剩下的问题是，当 $\alpha_1>\alpha_2$，不难从（6.17）的实轴路径变到图 6.6 的路径Γ。在第一和第二象限，需要把弧 C_1和 C_2 连接起来，但在它们上面，被积函数呈指数消失。如果要避免被积函数的间断，在 B 点，Γ必须离开 Riemann 顶叶。在到达鞍顶时，Γ重新出现在顶叶，在这里对于路径的其余部分，它保持不变。在证明了分支切割和奇点不做贡献之后，再回过头来讨论渐近解（6.19）。

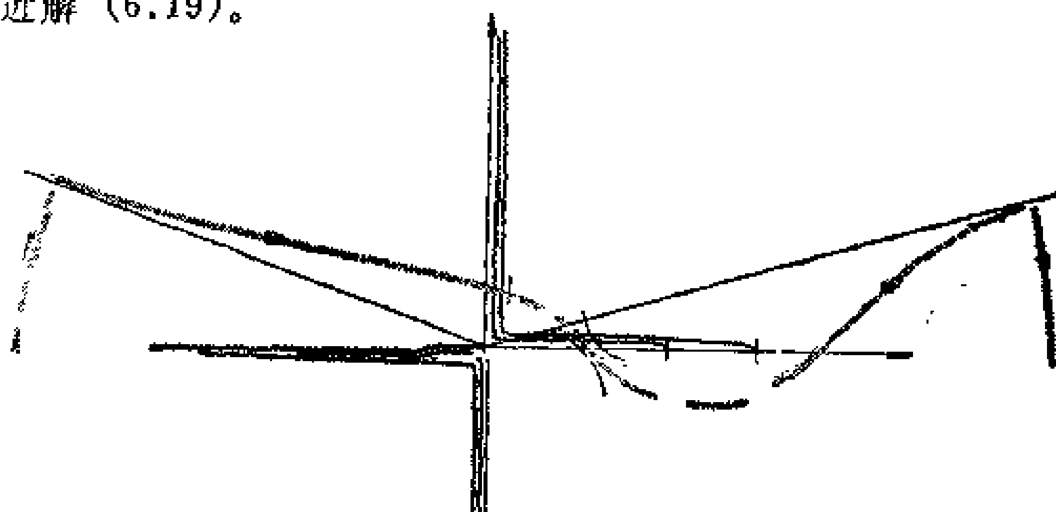


图 6.6

当 $\alpha_1>\alpha_2$ 时，为得到P反(见(6.17))，复射线参数平面中的最速下降路径Γ。利用 $\omega f(p)-\omega f(p_s)$是负实数，因而 $\exp[\omega f(p)]$ 离开鞍点呈指数衰减的规则，我们已对其全部长度指出精确路径。在鞍点本身附近，脊和谷为补充 6.3 中对 $\chi=-\pi/4$ 所示。虚线路径是在 Riemann 下叶上，对于它，Im ξ_1 和 Im ξ_2 是负的

我们首先注意到，反射波的几何扩散因子应当恰恰是 $1/R_0$，其走时应当是 R_0/α_1。根据几何射线理论，这时的期望值应当是 $P^{反} \sim A(1/R_0)\exp[i\,\omega(R_0/\alpha_1-t)]$ 乘以代表界面上反射/入射压力比值的一个因子。我们已在第五章得到关于平面波的这种比值，但这里的入射波有球形波阵面。然而，如果曲率半径足够大，只要 $B=B(p)$ 是在射线参数值 p_s（相应于实际反射角 i_s）上求值，则(6.14)所给的平面波反射系数 $B/4$ 将是适用的。我们现在用几何射线理论和平面波反射系数给予解(6.19)以物理解释。这是令人满意的。我们将发现，当我们的理论方法推进到处理甚至更实际的地球模型时，这些解释仍将有效。但是，如果这就是用复射线参数平面中的积分所能够达到的全部目的，这种努力就不很值得了。经过(6.19)的推导，我们看到已做了若干不同的近似，开始是忽略 (6.16) 中的高阶项，继之在补充 6.3 中用 $f(p_s)+(p-p_s)^2f''(p_s)$ 来近似 $f(p)$。这个最后的近似是特别差的，因为它只在鞍点附近有效，却被用于整个 p 平面。就像在第九章将看到的，定量地震学的现代方法常常在做(6.16)近似时，只保留第一项并对整个复 p 平面鉴别最速下降路径 Γ，但这时处理 Γ 附近合适路径上的积分，是用数值方法，精确地求 $f(p)$ 的值。

保留推导(6.19)时所用近似式的附加项，对于 $\alpha_1>\alpha_2$，可形式上表示为

$$P^{反}=\frac{B(p_s)}{R_0}\left[1+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\left(\frac{i}{\omega}\right)^n\right]\exp\left[\,i\omega\left(\frac{R_0}{\alpha_1}-t\right)\right], \tag{6.20}$$

当 $\omega\to\infty$，其中常数 a_1，a_2，…依赖于源点一接收点几何关系。在时间域这个结果变为，当 $t\to R_0/\alpha_1$，

$$P^{反}=\frac{B(p_s)}{R_0}\left\{\delta\left(t-\frac{R_0}{\alpha_1}\right)+H\left(t-\frac{R_0}{\alpha_1}\right)\left[a_1+a_2\left(t-\frac{R_0}{\alpha_1}\right)+a_3\left(t-\frac{R^0}{\alpha_1}\right)^2+\cdots\right]\right\}, \tag{6.21}$$

因此，在时间域中反射波比入射波的尾部长 $\left[P^{\text{入}}=\left(\frac{A}{R}\right)\delta\left(t-R/\alpha_1\right)\right]$。等效式(6.20)和(6.21)是波阵面展开式。如同我们在第四章指出过的(采用(4.78))，它们在地震学中的应用是有限的，虽然第一项能够具有给出波阵面本身性质的意义。

为继续分析两个不同半空间中的声波，下面讨论 $\alpha_1<\alpha_2$ 的情况，它允许首波存在。方程(6.17)仍有效，而且分支切割与我们在图 6.4 中得到的一样，只不过现在 $1/\alpha_1$ 是在 $1/\alpha_2$ 的右边。像以前一样，有一个必定位于 0 与 $1/\alpha_1$ 之间的鞍点 $p_s=\alpha_1^{-1}\sin i_s$，但现在有可能 p_s 位于 $1/\alpha_2$ 的右边。在图 6.7 中定义了临界角 $i_c=\sin^{-1}(\alpha_1/\alpha_2)$，并辨别出相应于 $p_s=\alpha_1^{-1}\sin i_s<1/\alpha_2$ 和 $p_s=\alpha_1^{-1}\sin i_s>1/\alpha_2$ 的空间区域。

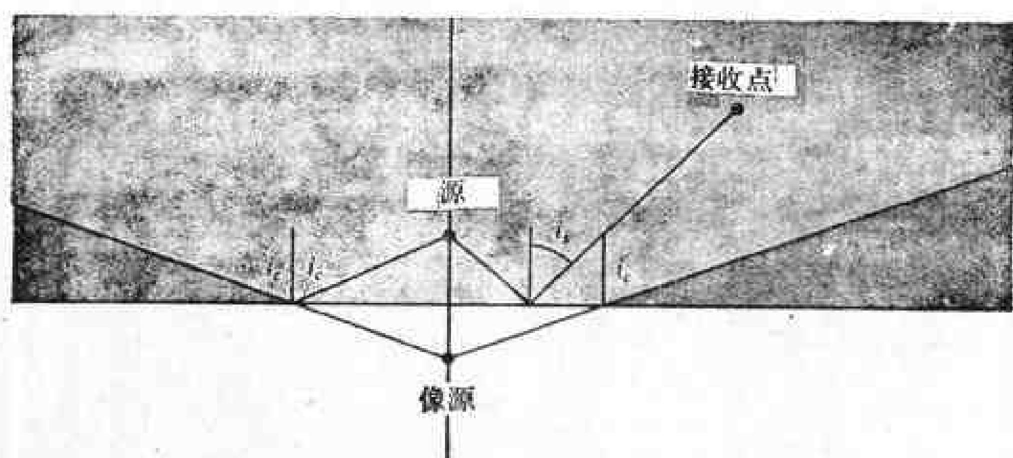


图 6.7

对于浅灰色区域中的接收点，反射射线的入射角 $i_s<i_c$，如图所示。我们定义 $i_c=\sin^{-1}(\alpha_1/\alpha_2)$，因此，根据 Snell 定律，以这个角入射的射线，在下半空间以 $i_2=\pi/2$ 出射，即沿水平方向。所以，下部介质中具有该射线参数的平面波，应该是不均匀的波。正是在深灰色区域中的接收点，才可以观测到首波

首先，考虑接收点在图 6.7 的浅灰色区域即 $p_s<1/\alpha_2$ 的情况。这时的反射波 $P^{\text{反}}$，可用与我们以前所求得的完全一样类型的最速下降路径 Γ 来详细进行分析。该路径表示于图 6.8，并且

它仍必须呈现在第一象限中 $\text{Im}\,\xi_1<0$，$\text{Im}\,\xi_2<0$ 的叶上，前面关于几何射线解(6.19)的讨论不变。

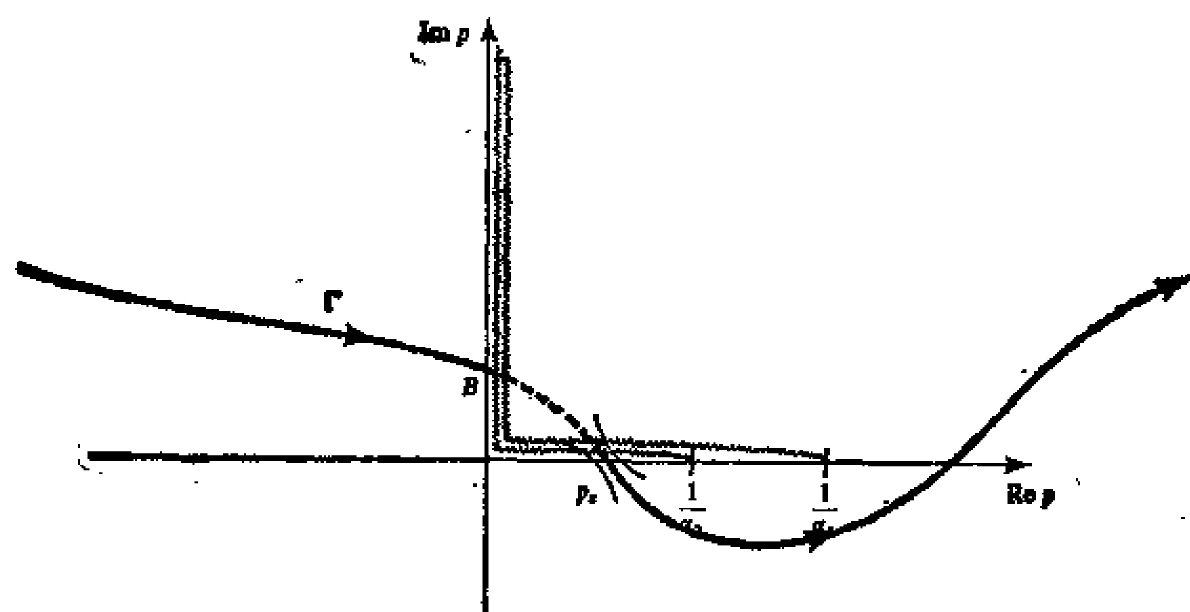


图 6.8

为求 PR(见(6.17))，复射线参数平面中的最速下降路径 Γ，这时 $\alpha_1<\alpha_2$，但 $p_s<1/\alpha_2$。该路径与图 6.6 中的类似

其次，考虑接收点在图 6.7 的深灰色区域即 $p_s>1/\alpha_2$ 的情况。虽然 p_s 仍是 $i(pr-\xi_1 z-\xi_1 z_0)$的一个鞍点，但现在的问题是，第一象限中的路径谷位于 $\text{Im}\,\xi_1<0$，$\text{Im}\,\xi_2>0$ 的叶上。由该叶，如何能绕过分支切割并从一叶跨到另一叶，而另一叶上的路径是在 $\text{Im}\,\xi_1>0$，$\text{Im}\,\xi_2>0$ 叶上的第二象限中开始（这是要求的）？图 6.9 详细表示出一个解。

在考虑这个复杂的积分路径时，必须记住，被积函数是以指数递减的小数，因而对于除在实轴附近以外的所有点，是可忽略不计的。在鞍点上的积分，再次给出近似为

$$\frac{B(p_s)}{R_0}\exp\left[\ i\omega\left(\frac{R_0}{\alpha_1}-t\right)\right] \tag{6.22}$$

的一项，虽然现在的反射系数有一个相移，它是下部介质中不均

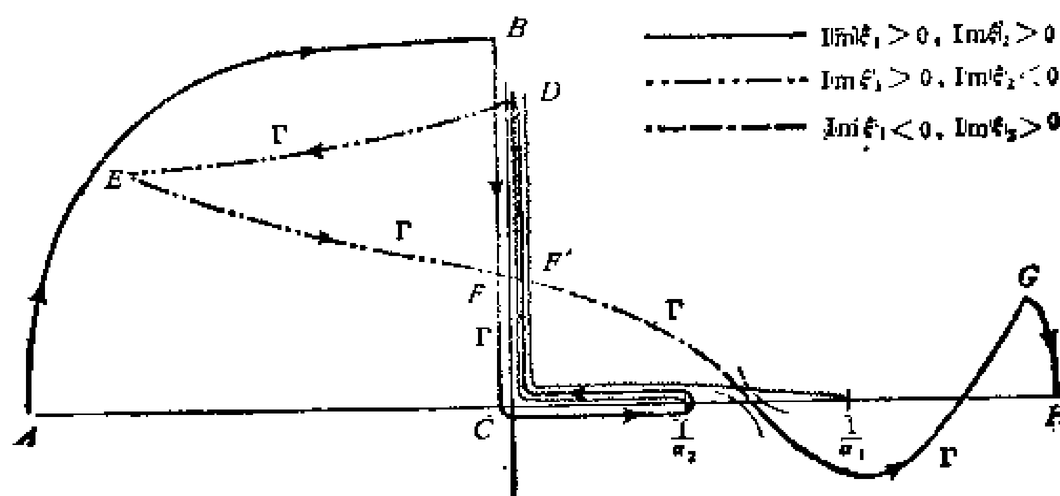


图 6.9

为求$p^{反}$(见(6.17)),复射线参数平面中的积分路径Γ,这时$\alpha_1<\alpha_2$,但$p_s>1/\alpha_2$。注意,如右上方所示,需要三个 Riemann 叶。从A点开始,弧AB没贡献。关于BC,C到$1/\alpha_2$,并绕割线$\mathrm{Im}\,\xi_2=0$,路径停在到D的顶叶,D是某个在上方足够远、能给出可忽略的被积函数的点。在D穿过割线时,路径必须下降到$\mathrm{Im}\,\xi_1>0$,$\mathrm{Im}\,\xi_2<0$,以便保持被积函数是解析的。从E到鞍点并一直到G,正是最速下降路径;在F,路径穿至$\mathrm{Im}\,\xi_1<0$,$\mathrm{Im}\,\xi_2>0$,并在鞍点穿回至顶叶。大弧GH没贡献

匀的波所产生的,与$1/\alpha_2<p_s$有联系。由于可从图 6.7 看出的理由,所以(6.22)近似给出的波在地震学中叫做广角反射(注意$i_s>i_c$)。由于$B(p_s)$中的相移,反射脉冲形状以 5.3 节和补充 5.6 中所描述的方式发生畸变。

图 6.9 中路径Γ的另一贡献来自绕ξ_2的分支切割的积分。在这条割线稍下一点的正实轴上,ξ_2是正实数,等于$\alpha_2^{-1}\cos i_2$,在割线稍上方,$\xi_2=-\alpha_2^{-1}\cos i_2$。于是,根据(6.17)和(6.14),这个贡献为

$$A\left(\frac{\omega}{2\pi r}\right)^{1/2}\exp[-i(\omega t-\pi/4)]\left(\int_{i\infty}^{0}+\int_{0}^{1/\alpha_2}\right)$$

$$\times\left[\frac{-\rho_1\alpha_1\cos i_2+\rho_2\alpha_2\cos i_1}{+\rho_1\alpha_1\cos i_2+\rho_2\alpha_2\cos i_1}-\frac{+\rho_1\alpha_1\cos i_2+\rho_2\alpha_2\cos i_1}{-\rho_1\alpha_1\cos i_2+\rho_2\alpha_2\cos i_1}\right]

$$\times\frac{\alpha_1 p^{1/2}}{\cos i_1}\exp[\omega f(p)]dp, \tag{6.23}$$

式中指数函数 $f(p)$在(6.18)中给定。在 $p=0$ 和 $p=1/\alpha_2$ 之间，$f(p)$是虚线，所以(6.23)中的被积函数有迅速的振荡。主要贡献来自满足 $\mathrm{Im}\{f'(p)\}$为最小值的 p 值，而由(6.18)看到，这个最小值恰恰出现在 $p=1/\alpha_2$ 处。事实上，只有分支切割的右端部有相当的贡献，因而，要得到分支切割积分(6.23)的近似解，我们利用展开式

$$f(p)=f\left(\frac{1}{\alpha_2}\right)+\left(p-\frac{1}{\alpha_2}\right)f'\left(\frac{1}{\alpha_2}\right),$$

求 $\cos i_1$ 和 $p^{\frac{1}{2}}$在 $p=1/\alpha_2$ 的值，并取 $\cos i_2=(2\alpha_2)^{\frac{1}{2}}(1/\alpha_2-p)^{\frac{1}{2}}$。根据(6.18)和图 6.10 中的三角学关系，求得 $f(1/\alpha_2)=it_h$，其中 $t_h=|z+z_0|/(\alpha_1\cos i_c)+\frac{L}{\alpha_2}$是首波的到时，且有$f'(1/\alpha_2)=iL$。(6.23)的近似解变为

$$-A\left(\frac{\omega}{\pi r}\right)^{1/2}\frac{\exp[i\omega(t_h-t)]e^{i\pi/4}4\rho_1\alpha_1^2}{(1-\alpha_1^2/\alpha_2^2)\rho_2\alpha_2}\int_0^{1/\alpha_2}\left(\frac{1}{\alpha_2}-p\right)^{1/2}$$

$$\times\exp\left[i\omega L\left(p-\frac{1}{\alpha_2}\right)\right]dp. \tag{6.24}$$

令 $(p-1/\alpha_2)=iy^2$ 并利用 $\int_0^\infty y^2e^{-ay^2}dy=\frac{1}{4}\frac{\pi^{\frac{1}{2}}}{a^{3/2}}$，最后得到近似解

$$\frac{i}{\omega}A\frac{z\rho_1\alpha_1^2}{\rho_2\alpha_2(1-\alpha_1^2/\alpha_2^2)r^{1/2}L^{3/2}}\exp[i\omega(t_h-t)]\quad 当\omega\to\infty. \tag{6.25}$$

把整个分支切割积分(6.23)看作首波，是基于我们刚刚已得到的近似结果。我们再次强调，数值方法（无须对被积函数做近似)给出了更精确的结果。

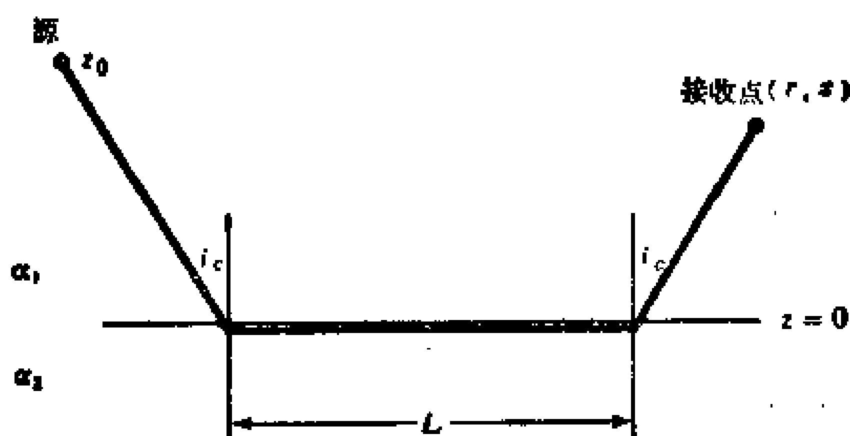


图 6.10

首波走时 t_h 与上部介质中的一段长度 $|z_0|\sec i_c$，下部介质中（水平向传播）的一段长度 L，再加上上部介质中的一段长度 $|z|\sec i_c$ 相对应。因此

$$t_h=(\alpha_1^{-1}\sec i_c)|z+z_0|+L/\alpha_2,$$

可以证明它等于 $r/\alpha_2+(\alpha_1^{-1}\cos i_c)|z+z_0|$。距离 L 显然是

$$r-|z+z_0|\tan i_c$$

补充 6.4

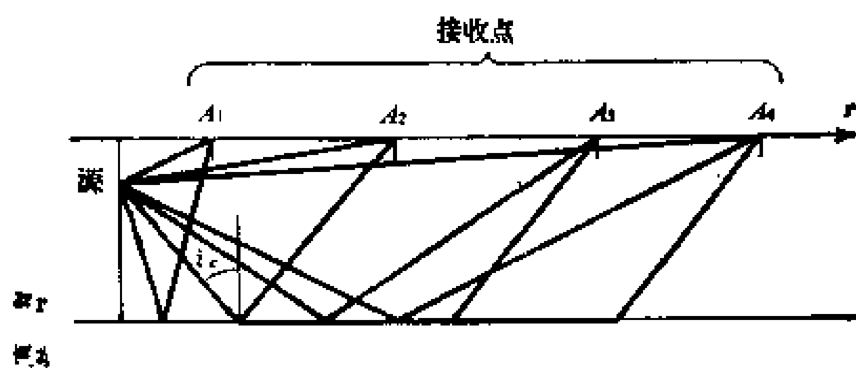
首波的显著特征

(i) 振幅随距离的衰减为 $r^{\frac{-1}{2}}L^{\frac{-3}{2}}$，当 $r\gg|z+z_0|$ 时，将近似为 r^{-2}，所以，这个衰减比球面波 P入或广角反射强烈得多。

(ii) 因于 i/ω 对应于时间域内的积分，使波形比较平滑，与 P入的波形相比，其出射起始程度较高而尾部较长。

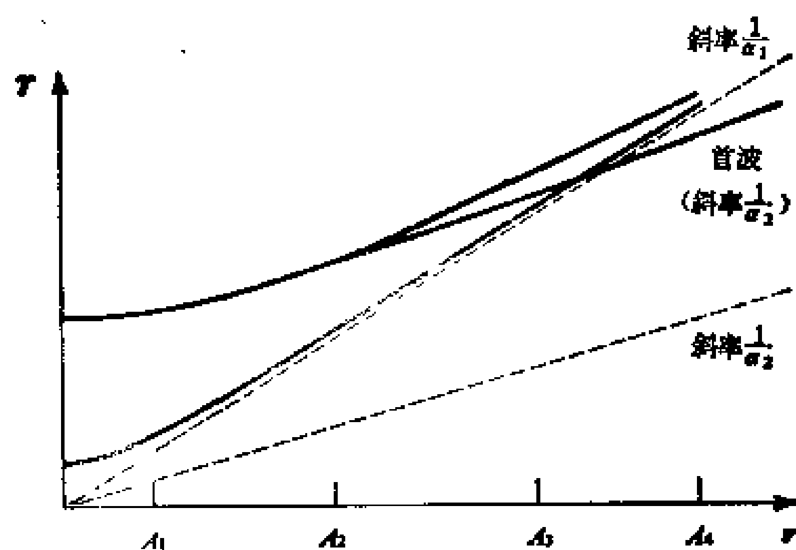
(iii) 在首波正式能存在的临界距离附近，L 很小（见图 6.10），随 $L\to0$，即随着从上面 $i_1\to i_c$，我们的近似公式 (6.25) 就不能成立。关于反射公式 (6.20)，可证明相应的缺点为，随着由下面 $i_1\to i_c$ 有 $a_1\to\infty$，因此我们的渐近公式在临界距离上完全失效。可以发展另外的渐近公式并专门应用于临界范围 $i_1\sim i_c$(Brekhovskikh，1960，第 22 节)，但对实际用途来说，迫切的是发展可用于所有距离范围的数值方法。

首波在地震文献中还被叫做"锥形波"或"侧面波"，它们的传播路径，是首先由 Mohorovičić 在研究 1909 年一次欧洲地震的某些波的到时认出的。我们现在称为 P_n 的这些波是沿地幔顶部折射的。它们



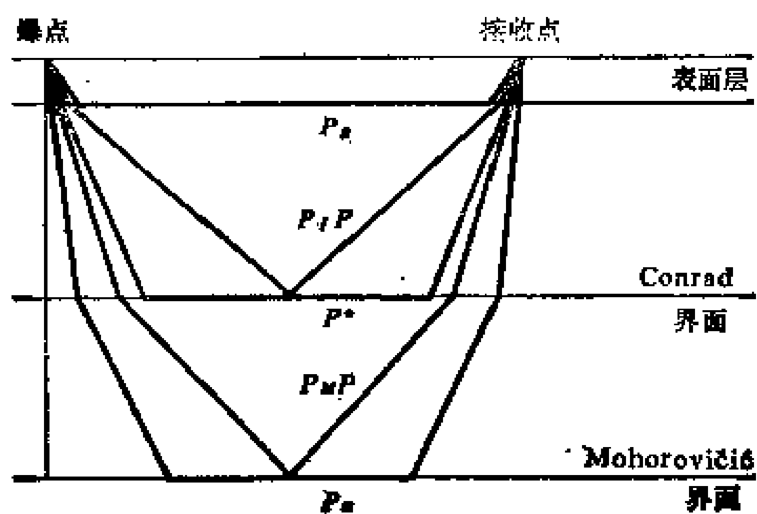
接收点
A_1
A_2
A_3
A_4
r
源
i_c

图 A



T
斜率$\frac{1}{\alpha_1}$
首波
（斜率$\frac{1}{\alpha_2}$）
斜率$\frac{1}{\alpha_2}$
A_1
A_2
A_3
A_4
r

图 B



爆点
接收点
表面层
P_g
P_IP
Conrad
界面
P^*
P_MP
Mohorovičić
界面
P_n

图 C

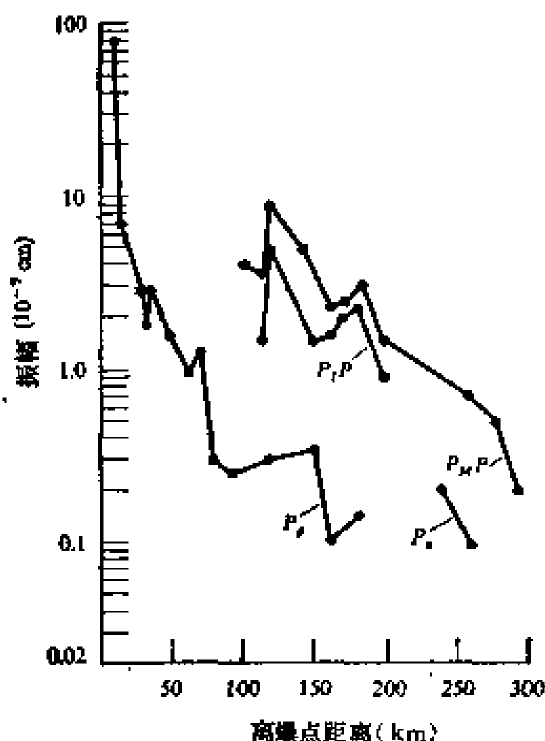


图 D

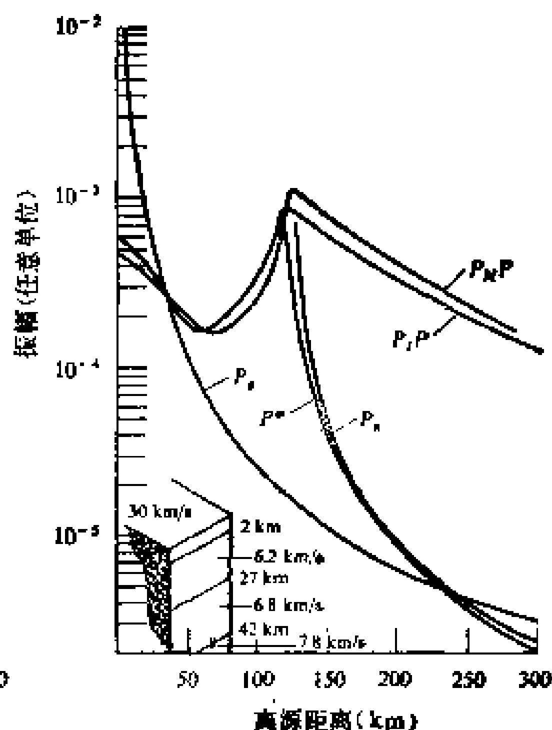


图 E

的到时与水平向距离成线性关系，同反射波或直达波的走时曲线不一样，如图 A 和 B 所示。在足够大的距离上，首波是第一个到达波（参看接收点 A_4），但这优点按照上面第(i)点中所说的，被振幅的衰减抵消了。Jeffreys(1926)首先提出首波作为可识别的震相的理论。Berry 和 West(1966)推广了我们在 6.2 节所用的方法，并用来解释以前美国地质调查局在科罗拉多高原记录到的 P_g，P_n，P^*，P_1P，P_MP 波。图 C 给出这些波的传播路径：P_g，P^* 和 P_n 是首波，P_1P 和 P_MP 是反射波。图 D 中给出观测值，并且一般来说，同对于图 E 所示由一种特殊地球模型计算出的振幅相符。[这里的图 D 和 E，引自 Berry and West (1966)。] 首波的振幅小，使它们难于检测，除非它们比所有反射波到得早。主要分歧在于反射波，它们的观测值比计算值小得多。Berry 和 West 把这个效应归因于 Conrad 界面和 Moho 界面的粗糙性。

6.3 弹性半空间中的球面波：Rayleigh 极点

在 5.2 节我们看到，自由面能导致 P 和 S 平面波非常强的相互作用。例如，对于入射 P 波，在某些入射角上，反射系统完全由 S 波组成(参看图 5.6)。由于球面波现在被看作平面波的积分，所以可以预期，关于发自半空间中点源的弹性波的详细讨论，将要求细心研究 P 和 S 在界面上的耦合。

这个问题是 Lamb(1904)首先解出的，而后许多作者重新进行了审查。我们这里将仿照 Lapwood (1949)，把弹性波场分解为若干分量波，每一个具有简单的物理解释。(但是，本节关心的是点源，而 Lapwood 的工作是针对线源。)尤其是，我们将研究 Rayleigh 波的发生，该波在自由面上远观测点的地震图上，是占优势的部分。后面我们将用 Cagniard-De Hoop 方法解这个问题，给出总波场的精确解。

我们假定体波速度为 α 和 β，密度为 ρ 的均匀各向同性弹性体占据半空间 $z>0$。点源位于 $z=h$，$(x^2+y^2)=r^2=0$。我们将通过 P-SV 问题(参看补充 6.5)进行计算，为简便起见，假定它相对于过源点的竖直线为轴对称。在这个意义上，该问题是二维的，解只依赖于$(r,\ z)$。我们将利用笛卡尔坐标$(x,\ y,\ z)$和柱坐标$(r,\ \phi,\ z)$，它们有相同深度方向。因此，位移表示为

$$\mathbf{u}=\nabla\phi+\nabla\times\nabla\times(0,\ 0,\ \psi),$$

其中 P 波势 ϕ 满足

$$\ddot{\phi}=\frac{\Phi}{\rho}+\alpha^2\nabla^2\phi, \tag{6.26}$$

SV 波势 ψ 满足

$$\ddot{\psi}=\frac{\Psi}{\rho}+\beta^2\nabla^2\psi,$$

而 Φ 和 Ψ 是体力 f 的势：

$$f=\rho\ddot{u}-(\lambda+2\mu)\nabla(\nabla\cdot u)+\mu\nabla\times(\nabla\times u)$$
$$=\nabla\Phi+\nabla\times\nabla\times(0,\ 0,\ \Psi). \tag{6.27}$$

补充 6.5

物质间断为水平向的分段均匀介质中 P-SV 运动和 SH 运动的独立性

分段均匀介质由不同区域组成，每个区域是均匀的。我们在第五章已经看到，两种均匀介质间水平的平面分界面，导致 P 和 SV 平面波的耦合，而 SH 独立传播。这里，我们推广这个结果。

从 Lamé 定理(4.1 节)开始，我们注意到波动方程

$$\ddot{\phi}=\Phi/\rho+\alpha^2\nabla^2\phi,\ \ddot{\psi}=\Psi/\rho+\beta^2\nabla^2\psi \tag{1}$$

可以用同位移 u 和体力 f 有关的、由下式表示的势来满足：

$$u=\nabla\phi+\nabla\times\psi,\ f=\nabla\Phi+\nabla\times\Psi,$$

其中

$$\nabla\cdot\psi=0,\ \nabla\cdot\Psi=0.$$

波动方程(1)等效于三个标量方程

$$\ddot{\phi}=\Phi/\rho+\alpha^2\nabla^2\phi,$$
$$\frac{d^2}{dt^2}(\nabla\times\psi)_z=\frac{1}{\rho}(\nabla\times\Psi)_z+\beta^2\nabla^2[(\nabla\times\psi)_z], \tag{2}$$
$$\ddot{\psi}_z=\Psi_z/\rho+\beta^2\nabla^2\psi_z.$$

在没有体力的情况下，根据(2)，显然任一运动都可分解为三种运动；即每种运动中，三个函数 ϕ，$(\nabla\times\psi)_z$，ψ_z 中的两个处处为零。

(i) 第一种运动有 $(\nabla\times\psi)_z$ 和 ψ_z 为零，显然是 P 波。它们的特征是 $\nabla\cdot u$ 不为零，但 $\nabla\times u=0$。

(ii) 第二种运动含有 $\phi=0$，$\psi_z=0$。既然也是 $\nabla\cdot\psi=0$，故我们得知 $\frac{\partial\psi_x}{\partial x}+\frac{\partial\psi_y}{\partial y}=0$。这是满足 $\psi_x=\frac{\partial M}{\partial y}$，$\psi_y=-\frac{\partial M}{\partial x}$，即 $\psi=\nabla\times(0,0,M)$ 的某个函数 M 存在的条件。事实上，惯常把 M 写作标量 ψ。这时

$$u=\nabla\times\nabla\times(0,0,\psi)=\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial z\partial x},\ \frac{\partial^2\psi}{\partial z\partial y},\ -\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}-\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}\right).$$

对于这些运动，$\nabla\cdot u=0$ 和 $(\nabla\times u)_z=0$，因此 SV 属于这个范畴。

(iii) 第三种运动含有 $\phi=0$，$(\nabla\times\psi)_z=0$。这时 $\nabla\cdot\boldsymbol{u}=0$ 和 $u_z=0$，所以这里的位移同(ii)中的 ψ 相像：存在一个函数 χ，使 $\boldsymbol{u}=\nabla\times(0,0,\chi)$。此运动显然与 SH 相像，其特征为 $(\nabla\times\boldsymbol{u})_z\neq0$，$u_z=0$，$\nabla\cdot\boldsymbol{u}=0$。

与此类似，(2) 中三种体力的每一种可用一标量势描写，而 $\boldsymbol{f}=\nabla\Phi+\nabla\times\nabla\times(0,0,\Psi)+\nabla\times(0,0,X)$，其 P，SV，SH 波动方程分别为

$$\ddot{\phi}=\Phi/\rho+\alpha^2\nabla^2\phi,\ \ddot{\psi}=\Psi/\rho+\beta^2\nabla^2\psi,\ \ddot{\chi}=X/\rho+\beta^2\nabla^2\chi. \quad (3)$$

对于水平的物质间断面，关于 $\boldsymbol{u}$ 分量连续性的三个标量条件可以在水平方向取微商。三个条件这时等效于

$$\frac{\partial u_y}{\partial x}-\frac{\partial u_x}{\partial y},\ \frac{\partial u_x}{\partial x}+\frac{\partial u_y}{\partial y},\ u_z$$

的连续，即

$$(\nabla\times\boldsymbol{u})_z,\ \nabla\cdot\boldsymbol{u}-\frac{\partial u_z}{\partial z},\ u_z \quad (4)$$

的连续。

与此类似，牵引力的连续意味着

$$\mu\frac{\partial}{\partial z}[(\nabla\times\boldsymbol{u})_z],\ \mu\left[\frac{\partial}{\partial z}\nabla\cdot\boldsymbol{u}-2\frac{\partial^2u_z}{\partial z^2}+\nabla^2u_z\right],\lambda\nabla\cdot\boldsymbol{u}+2\mu\frac{\partial u_z}{\partial z} \quad (5)$$

的连续。

对于 SH 波，因为 $(\nabla\times\boldsymbol{u})_z\neq0$，但 $u_z=0$ 和 $\nabla\cdot\boldsymbol{u}=0$，所以，(4)和(5)中六个连续条件的四个，自然地得到满足，而 u_z 和 $\nabla\cdot\boldsymbol{u}$ 同边界面相互作用之后保持为零，从而 SH 波保持为 SH。

同样，对于 $(\nabla\times\boldsymbol{u})=0$ 但 u_z 和 $\nabla\cdot\boldsymbol{u}$ 不为零的入射波，不存在在界面上同 SH 的耦合。然而，u_z 与 $\nabla\cdot\boldsymbol{u}$ 的耦合意味着 P 与 SV 是耦合的。

在密度和 Lamé 常数依赖于深度的介质中，也存在 SH 与 $P+SV$ 运动的解耦，P 与 SV 的耦合直接表现在波动方程中，它不分离为(2)的形式。相反，我们得到两个方程，每个方程都含有 ϕ 和 $(\nabla\times\psi)_z$。

我们来考虑图 6.11 所示的P波点源。(该图还描写简单的SV点源。比较切合地震学的点源在下章用柱坐标描述。SV的线源在 6.4 节描述。)因此我们这里取

$$\Phi = A\,4\pi\rho\alpha^2\delta(x)\delta(y)\delta(z-h)\exp(-i\omega t);\quad \Psi=0. \tag{6.28}$$

经过势的波动方程(6.26),这个源产生球面波

$$\phi^{\lambda}(x,\ t) = A\frac{1}{R}\exp\left[i\omega\left(\frac{R}{\alpha}-t\right)\right] \text{以及 } R=[x^2+y^2+(z-h)]^{1/2}, \tag{6.29}$$

这时它是在自由面 $z=0$ 上的入射。总势为

$$\phi = Ai\omega\ \exp(-i\omega t)\int_0^\infty \frac{p}{\xi}J_0(\omega pr)\exp[i\omega\xi|z-h|]dp \quad \text{(入射波)}$$

$$+ Ai\omega\exp(-i\omega t)\int_0^\infty \acute{P}\grave{P}\ \frac{p}{\xi}J_0(\omega pr)\exp[i\omega\xi(z+h)]dp \quad \text{(广义 } \acute{P}\grave{P} \text{ 反射)}, \tag{6.30}$$

$$\psi = Ai\omega\ \exp(-i\omega t)\int_0^\infty\left(\frac{1}{i\omega p}\ \frac{\beta}{\alpha}\acute{P}\grave{S}\right)\frac{p}{\xi}J_0(\omega pr)\ \exp\times[i\omega(\xi h+\eta z)]dp \quad \text{(广义 } \acute{P}\grave{S} \text{ 反射)} \tag{6.31}$$

(参看补充 6.6),其中 $\acute{P}\grave{P}$ 和 $\acute{P}\grave{S}$ 是第五章对自由面所描述的依赖于 p 的系数[见方程(5.26)和(5.27)]。

我们集中注意(6.30)中的广义 $\acute{P}\grave{P}$ 反射,说明随变程 r 的增大,它如何分离成为三种不同类型的P波。

第一,为得到广义 $\acute{P}\grave{P}$ 反射,我们把 J_0 分离为当 $\omega\to\infty$ 时它的行波分量:

$$\frac{Ai\omega}{2}\exp(-i\omega t)\int_{-\infty}^{\infty}\acute{P}\grave{P}\ \frac{p}{\xi}H_0^{(1)}(\omega pr)\exp[i\omega\xi(z+h)]dp$$

$$\sim A\left(\frac{\omega}{2\pi r}\right)^{1/2}e^{-i(\omega t-\pi/4)}\int_{-\infty}^{\infty}\acute{P}\grave{P}\ \frac{p^{1/2}}{\xi}\exp[i\omega(pr+\xi z+\xi h)]dp \tag{6.32}$$

[请与(6.15)和(6.17)的推导对比]。要记住 $\mathrm{Im}\,\xi\geqslant0$, $\mathrm{Im}\,\eta\geqslant0$.

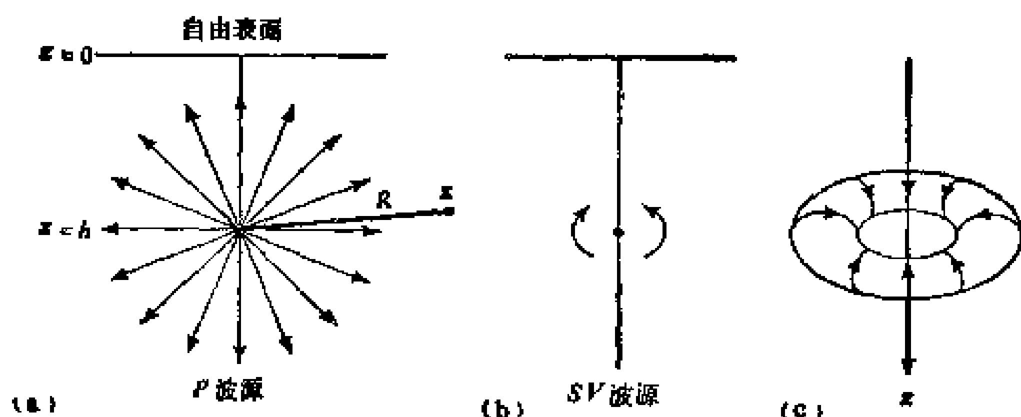


图 6.11

弹性半空间中深度 h 处的两种不同点源。(a) P 波源，它产生球面波 ϕ入 $=\frac{A}{R}\exp i\omega\left(\frac{R}{\alpha}-t\right)$，其中 R 是源点至接收点的直线距离。该源是个简单的爆炸模型。(b) SV 波源，产生 ψ入$=\frac{A}{R}\exp i\omega\left(\frac{R}{\beta}-t\right)$。(c) 为使这个 SV 波源形象化，考虑一个小环(环形室)，它的轴为竖直向，并且在轴对称的运动中，环的质点"打滚"，如箭头所示，使质点运动局限于竖直平面内。显然，这是一种环辐射 SV 波，并可证明，在环趋于一个点的极限情况下，这种源确有如前面所给球对称的 ψ入

第二，我们审查(6.32)中指数的分支切割和最速下降路径。在 Riemann 顶叶 ($\mathrm{Im}\,\xi\geqslant0$，$\mathrm{Im}\,\eta\geqslant0$)上，如图 6.12 所示，在 $p=\alpha^{-1}\sin i_0$ 有鞍点而在 $p=1/c_R$ 有极点 (c_R 是 Rayleigh 波速度，$\acute{P}\grave{P}$ 的分母为零)。如果将图 6.12 c 的最速下降路径 Γ 与图 6.12 b 的奇点进行对比，就会看到，倘若反射角很小，则存在奇点造成的小干扰。这正是图 6.12 d 中的情况，只有鞍点的贡献是重要的。但是，如果 i_0 变得很大(即如果 $r\gg z+h$)，则发生强烈干扰，如图 6.12 e 所示，产生三种可鉴别的贡献、(i) 由 Γ_α，主要贡献仍来自鞍点，并可解释为如图 6.12 a 所示的表面 P 反射；(ii) 由 Γ_β，主要贡献来自支点 $p=1/\beta$ 附近。这个传播路径的波可鉴定为，从源到自由面向上减弱的非均匀 P 波，然后作为 SV 波沿自由面水平向传播，以从自由面到接收点向下减

弱的非均匀P波结束。这叫做表面S波。最后，(iii) 由Γ_R，得到 Rayleigh 波的P波分量，其振幅由(6.32)被积函数的留数简单给定。因为当$p\to 1/c_R$时，

$$\acute{P}\grave{P}\sim -\left(\frac{1}{p-1/c_R}\right)\frac{8(c_R^{-2}-\alpha^{-2})^{1/2}(c_R^{-2}-\beta^{-2})^{1/2}}{c_R^2 R'(1/c_R)},$$

其中$R(p)=4p^2\xi\eta+(1/\beta^2-2p^2)^2$, $R'=dR/dp$,我们由(6.32)求得，当$\omega\to\infty$时，Rayleigh 波具有的P波分量为

$$\phi_R\sim -8A\left(\frac{2\pi\omega}{rc_R}\right)^{1/2}\frac{e^{i\pi/4}\left(\frac{1}{c_R^2}-\frac{1}{\beta^2}\right)^{1/2}}{c_R^2 R'(1/c_R)}$$

$$\times\exp\left[i\omega\left(\frac{r}{c_R}-t\right)\right]\exp\left[-\omega\left(\frac{1}{c_R^2}-\frac{1}{\alpha^2}\right)^{1/2}(z+h)\right].\tag{6.33}$$

看一看何时最速下降路径Γ(图 6.12 c) 仍处于 Rayleigh 极点以下，从而估计得不到这个留数的距离。粗略地讲，这个情况出现在

$$\frac{1}{\alpha\sin i_s}>\frac{1}{c_R},$$

也即等效于

$$\tan i_s=\frac{r}{z+h}<\frac{c_R}{(\alpha^2-c_R^2)^{1/2}}.\tag{6.34}$$

不等式(6.34)是首先由中野得到的，并解释为 Rayleigh 波尚未形成所对应的那个距离。如果

$$\frac{r}{z+h}\gg\frac{c_R}{(\alpha^2-c_R^2)^{1/2}}\sim 0.6,$$

则极点的贡献完全脱离于分支切割和最速下降路径，(6.33)将是有意义的。

补充 6.6

关于柱坐标

公式(6.30)和(6.31)，可以用笛卡尔坐标中的平面波理论，Weyl积分(6.4)，随后转换到柱坐标来得到，类似于我们推导(6.9)那样。但是，快得多的是Lamb(1904)采用彻底使用柱面几何的方法。

势的齐次波动方程的轴对称解，关于 ϕ，是

$$J_0(\omega pr)\exp(\pm i\omega\xi z-i\omega t),$$

关于 χ，是

$$J_0(\omega pr)\exp(\pm i\omega\eta z-i\omega t),$$

其中 $\xi=(\alpha^{-2}-p^2)^{\frac{1}{2}}$, $\eta=(\beta^{-2}-p^2)^{\frac{1}{2}}$。假定入射的上行$P$波及其反射用总场来表示：

$$\phi=J_0(\omega pr)[Ae^{-i\omega\xi z}+Be^{i\omega\xi z}]\exp(-i\omega t),$$

$$\psi=J_0(\omega pr)Ce^{i\omega\eta z}\exp(-i\omega t).$$

则由 $\mathbf{u}=\nabla\phi+\nabla\times\nabla\times(0,0,\psi)$ 和 $dJ_0(x)/dx=-J_1(x)$，我们得到

$$u_r=\frac{\partial\phi}{\partial r}+\frac{\partial^2\psi}{\partial r\partial z}=-\omega pJ_1(\omega pr)[Ae^{-i\omega\xi z}+Be^{i\omega\xi z}+i\omega\eta Ce^{i\omega\eta z}]$$
$$\times\exp(-i\omega t),$$

$$u_z=\frac{\partial\phi}{\partial z}-\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial\psi}{\partial r}\right)=J_0(\omega pr)[-i\omega\xi Ae^{-i\omega\xi z}+i\omega\xi Be^{i\omega\xi z}$$
$$+\omega^2p^2Ce^{i\omega\eta z}]\exp(-i\omega t).$$

根据 2.6 节，利用轴对称性，在 $z=0$ 有

$$\tau_{zr}=2\mu e_{zr}=\mu\left(\frac{\partial u_r}{\partial z}+\frac{\partial u_z}{\partial r}\right)$$

$$=i\omega^2J_1(\omega pr)[2\rho\beta^2p\xi(A-B)$$
$$+\rho(1-2\beta^2p^2)(-i\omega pC)]\exp(-i\omega t), \tag{1}$$

$$\tau_{zz}=\lambda\,\mathrm{div}\,\mathbf{u}+2\mu\frac{\partial u_z}{\partial z}=-\frac{\lambda\omega^2}{\alpha^2}\phi+2\mu\frac{\partial u_z}{\partial z}$$

$$=-\omega^2J_0(\omega pr)[\rho(1-2\beta^2p^2)(A+B)$$
$$+2\rho\beta^2p\eta(-i\omega pC)]\exp(-i\omega t). \tag{2}$$

使上面的(1)和(2)等于零(自由面边界条件)，我们发现方程与研究平面波时得到的方程的差别，只在于用$-i\omega pC$代替(5.22)和(5.23)中的C。于是有

$$B = A\acute{P}\grave{P} \text{ 和 } C = \frac{A}{i\omega p}\frac{\beta}{\alpha}\acute{P}\grave{S}. \tag{3}$$

此处 $\acute{P}\grave{P}$ 和 $\acute{P}\acute{S}$ 是(5.26)和(5.27)所给关于位移的反射系数和转换系数。根据关于入射波的 Sommerfeld 积分，和根据反射的叠加，立即得到公式(6.30)和(6.31)。

我们可以用类似的方法分析 SV 波(6.31)，推广 $\acute{P}\grave{S}$ 并求由入射球面 P 波反射出的普通下行 S 波。在足够大的变程上，还存在一个具有水平向慢度 $1/\beta$ 的波，它作为非均匀 P 波离开源，向上减弱，然后作为 S 波水平地传向接收点。这叫做次生 S 波。Rayleigh 极点仍存在，当 $\omega\to\infty$ 时，留数给出

$$\psi_R \sim 4A\left(\frac{2\pi\omega}{rc_R}\right)^{1/2} e^{i\pi/4}\left(\frac{c_R}{\omega}\right)\frac{\left(\frac{1}{\beta^2}-\frac{2}{c_R^2}\right)}{c_R R'(1/c_R)}$$
$$\times\exp\left[i\omega\left(\frac{r}{c_R}-t\right)\right]\exp\left[-\omega\left(\frac{1}{c_R^2}-\frac{1}{\alpha^2}\right)^{1/2}h-\omega\right.$$
$$\left.\times\left(\frac{1}{c_R^2}-\frac{1}{\beta^2}\right)^{1/2}z\right]. \tag{6.35}$$

相应的位移可由下式计算：

$$u = u_r = \frac{\partial\phi}{\partial r}+\frac{\partial^2\psi}{\partial r\partial z}, \quad w = u_z = \frac{\partial\phi}{\partial z}-\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{r\partial\psi}{\partial r}\right).$$

(虽然现在指的是径向分量而不是笛卡尔水平分量，但我们仍用把水平位移写作 u 的惯例。)这时，表面($z=0$)上的 Rayleigh 波位移是

$$u_R \sim -2iQe^{i\pi/4}\left[\frac{2}{c_R}\left(\frac{1}{c_R^2}-\frac{1}{\beta^2}\right)^{1/2}\right]\exp\left[i\omega\left(\frac{r}{c_R}-t\right)\right]$$
$$\times\exp\left[-\omega\left(\frac{1}{c_R^2}-\frac{1}{\alpha^2}\right)^{1/2}h\right],$$
$$w_R \sim -2Qe^{i\pi/4}\left[\frac{2}{c_R^2}-\frac{1}{\beta^2}\right]\exp\left[i\omega\left(\frac{r}{c_R}-t\right)\right]$$
$$\times\exp\left[-\omega\left(\frac{1}{c_R^2}-\frac{1}{\alpha^2}\right)^{1/2}h\right], \tag{6.36}$$

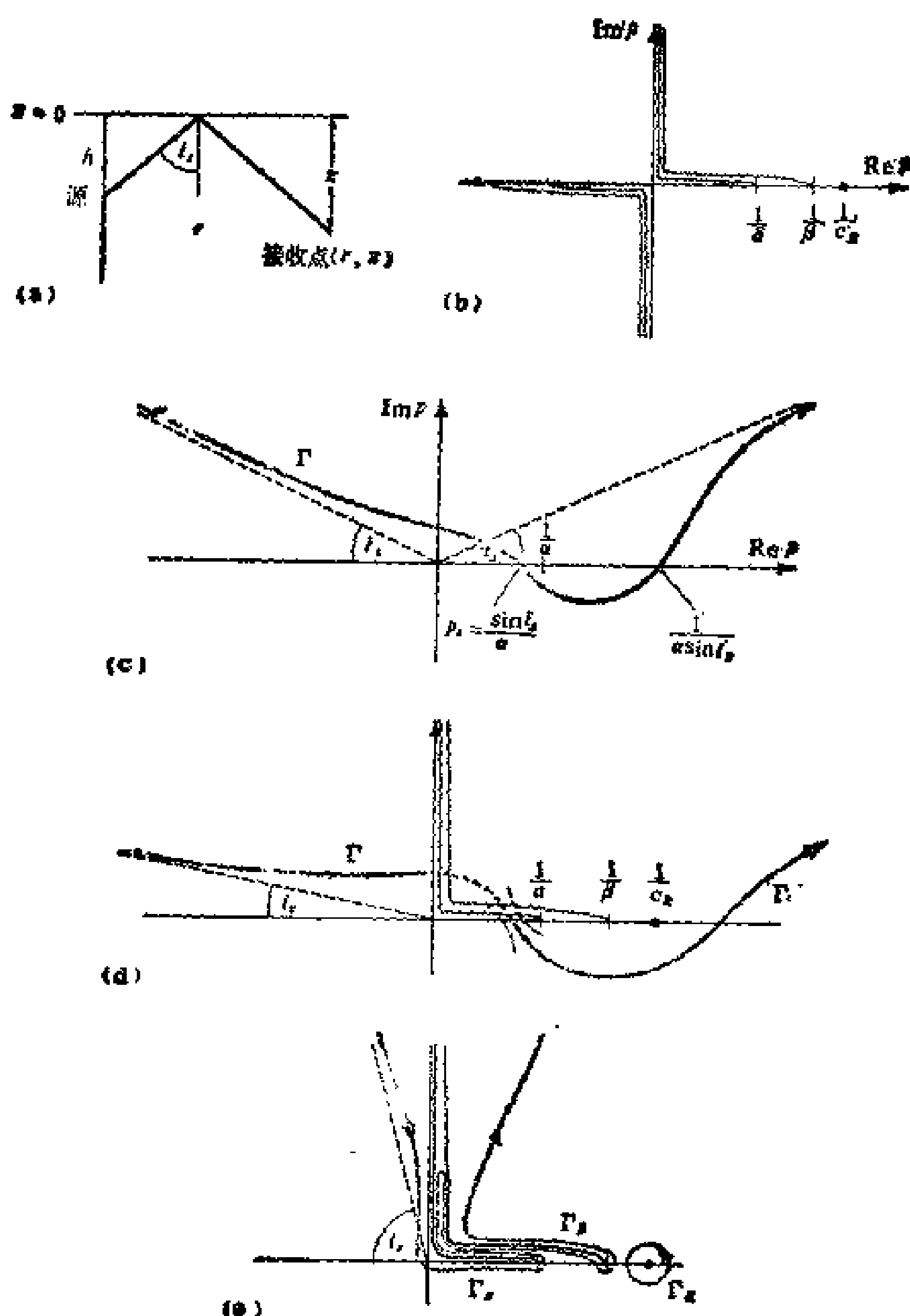


图 6.12

对于弹性半空间中的点源，解释广义反射的略图。(a) 源点—接收点的几何关系和规定反射角 i_s 的反射 P 波。(b) 复 p 平面中 ξ 和 η 的分支切割，以及在 $p=1/C_R$ 的极点。（注：对于衰减介质，正实轴上的分支切割和极点移人第一象限。）(c) (6.32)中指数的最速下降路径 Γ，这个路径是 $pr+\xi z+\xi h=\frac{R_0}{\alpha}+$正虚量$=\frac{R_0}{\alpha}+i\chi^2$。可以解出 p，在 Γ 上得到 $R_0^2p=(i\chi^2+R_0/\alpha)^{1/2}\pm(\chi^4-2i\chi^2R_0/\alpha)^{1/2}(z+h)$，同实轴交于 $p=p_s=\alpha^{-1}\sin i_s$ 和 $p=1/(\alpha\sin i_s)$。(d) 对于小 i_s，可取最速下降路径(在第一象限中 Im ξ<0，Im η<0 叶上进行，如图6.8所示)。(e) 对于大 i_s，积分路径（全部在 Riem 叶上）可想像为两个分支切割积分 Γ_α 和 Γ_β 的和，再加上求 Rayleigh 极点留数 路 Γ_R

其中

$$Q=A\left(\frac{2\pi\omega}{rc_R}\right)^{1/2}\frac{\omega}{\beta^2R'(1/c_R)}.$$

虽然在 $p=1/c_R$ 的极点是半空间问题的突出特征，但我们在下一节将看到，在不同 Riemann 叶上出现的 Rayleigh 函数的零值，也能有重要意义。

在分析入射于平界面的球面波时，我们现在已看到两个现象，即首波和 Rayleigh 波。当入射的波阵面是平面时，它们是不出现的。对这些现象求值的渐近式，使我们能迅速估算它们的许多性质，但现在我们转到对 Lamb 问题可做得很精确的另一种方法。

补充 6.7

由埋藏点源产生的 Rayleigh 波的突出特征

(i) 随距离衰减的性质类似于 $r^{-\frac{1}{2}}$，与体波(r^{-1})和首波 (r^{-2}) 相比，Rayleigh 波必定在足够大的变程上支配地面运动。注意，柱面的 Rayleigh 波 (6.36) 中水平向和竖直向运动间的比值，恰恰就是问题 5.4 b 中对于平面的 Rayleigh 波所求的比值。

(ii) 相位滞后由 $\omega r/c_R$ 给定，与深度无关，因此走时曲线是直线。

(iii) 振幅是 h 和 ω 的指数减小的函数：

$$\exp[-\omega(c_R^{-2}-\alpha^{-2})^{1/2}h]\sim\exp[-(0.9)^{1/2}\omega h/\beta].$$

对于 S 波源，它变为

$$\exp[-\omega(c_R^{-2}-\beta^{-2})^{1/2}h]\sim\exp[-(0.2)^{1/2}\omega h/\beta].$$

(iv) 质点运动是逆进椭圆 (w 相对于 u 有相移 $-\pi/2$，因而相位超前 $+\pi/2$，见补充 5.5)，而椭率与自由 Rayleigh 波的相同。

(v) 根据上面的(ii)和(iii)，相位谱的斜率是变程而不是深度的函数，振幅谱的形状是深度而不是变程的函数。因此，振幅和相位无关。这是我们一般称做简正振型的公共特征，在第七章，对于分层介质比较详细地研究了简正振型。当然，这种无关性违反因果关系（见补充 5.8），所以，谈论 Rayleigh 波或个别简正振型的“初动”，是没有意义的。

6.4 对于线源的Cagniard–De Hoop 方法

直到现在，本章已考虑过的震源对时间的依赖关系是 $\exp(-i\omega t)$，并且一直在寻找一种用 $\tilde{r}(\omega)\exp(-i\omega t)$ 形式表示响应(即在接收点求值的某个物理变量)的方法。写成输入—输出形式

$$\exp(-i\omega t)\to \text{弹性介质}\to \tilde{r}(\omega)\exp(-i\omega t).$$

在许多意义上，目的是求输入 $\delta(t)$ 的响应 $r(t)$。这时

$$\delta(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\exp(-i\omega t)d\omega\to \text{弹性介质}$$

$$\longrightarrow \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\tilde{r}(\omega)\exp(-i\omega t)d\omega=r(t),$$

我们看到，$r(t)$ 是 $\tilde{r}(\omega)$ 的 Fourier 逆变换。物理上的因果关系，要求 $t<0$ 时 $r(t)=0$，注意，到现在为止，我们主要是对于实的正 ω 来考虑 $r(t)$ 的 Fourier 变换的细节。知道了 $r(t)$，就可以用褶积表示出任意输入 $x(t)$ 的响应：

$$x(t)=\int_{-\infty}^{\infty}x(t-\tau)\delta(\tau)d\tau\to \text{弹性介质}$$

$$\longrightarrow \int_{-\infty}^{\infty}x(t-\tau)r(\tau)d\tau. \tag{6.37}$$

(积分可限制在正 τ，因为 r 是有因的。)

利用 Cagniard 方法，我们现在来求输入 e^{st} $(-\infty<t<\infty)$ 的响应 $\bar{r}(s)e^{st}$，这里的 s 是正实数：

$$e^{st}\to \text{弹性介质}\to \bar{r}(s)e^{st}.$$

这时根据(6.37)，$\bar{r}(s)e^{st}=\int_0^{\infty}r(\tau)e^{s(t-\tau)}d\tau$，因而 $\bar{r}(s)$ 恰恰是 $r(t)$ 的 Laplace 变换：

$$\bar{r}(s)=\int_0^{\infty}r(t)e^{-st}dt \quad (s\text{ 是正实数}) \tag{6.38}$$

假定 $\bar{r}(s)$的解可以求出，利用 Cagniard 方法，是要处理 $\bar{r}(s)$的表达式，直到它成为(6.38)的形式，这时被积函数 $r(t)$就被看作脉冲响应。(De Hoop 的贡献是简化了处理方法。应当提一下，Cagniard 把他的方法归功于 Carson。Smirnov 和 Sobolev，Pekeris，Sauter，Garvin 以及 Gilbert，也对这个方法有所发展。)一旦知道了脉冲响应，问题就算是解决了，因为任意输入的响应都可用褶积求得。

然而，用上述步骤由 $\bar{r}(s)$唯一地确定脉冲响应 $r(t)$，而$\bar{r}(s)$只对正实数 s 为已知，这一点是不明白的。毕竟(6.38)的逆变换是

$$r(t)=\frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty}\bar{r}(s)e^{st}ds$$

[其中积分路线位于 $\bar{r}(s)$ 的所有奇点的右边]，这要求对于复数 s 来分析 $\bar{r}(s)$。幸而，Cagniard(1962，第三章)已证明，当 $r(t)$ 在可微和有界的相当少的限制下，从以 (6.38) 形式写出的 $\bar{r}(s)$ 的被积函数所得出的 $r(t)$，的确唯一地确定所要求的脉冲响应。这叫做 Lerch 引理(或定理)，其证明很复杂、很冗长，此处略去。

显然，$\bar{r}(s)$可由在 6.1—6.3 节的 $\tilde{r}(\omega)$ 表达式中，形式上替换 $\omega=is$ 来得到。但是，当源是 $\delta(t)$时，直接由输出的 Laplace 变换推导 $\bar{r}(s)$是方便的。例如，在涉及垂直于笛卡尔 y 方向传播的二维问题中，我们谋求 $r=r(x, z, t)$的函数形式。用输入 $\delta(t)$，我们将发现，取 x 上的 Fourier 变换和 t 上的 Laplace 变换是比较方便的，从而得到双重变换 $\tilde{\bar{r}}=\tilde{\bar{r}}(k_x, z, s)$的代数表达式。这时的 Fourier 逆变换是

$$\bar{r}(x, z, s)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\tilde{\bar{r}}(k_x, z, s)\exp(ik_xx)dk_x.$$

既然这里的 k_x 是波数的水平分量，所以我们取出因子 is，并把

$k_x/is=p$ 作为射线参数。于是

$$\bar{r}(x,\ z,\ s)=-\frac{is}{2\pi}\int_{-i\infty}^{i\infty}\tilde{\bar{r}}(isp,\ z,\ s)e^{-spx}dp. \qquad (6.39)$$

把这里的 p 看作积分的哑变量，剩下的就是把(6.39)处理成(6.38)中的积分形式。得到的被积函数使 $r(x,\ z,\ t)$ 立刻被认出。

注意，s 在(6.38)中只出现在一处，它是作为指数因子出现的。(6.39)的处理常常导致下列形式

$$\bar{r}=s^n\int_0^{\infty}g(t)e^{-st}dt, \qquad (6.40)$$

在此情况下，脉冲响应可由

$$r(t)=\frac{d^n}{dt^n}g(t)$$

计算．或者，把积分过 n 次的 δ 函数作为输入，直接把响应看作 g(t)。

在本节的下余部分，我们将对弹性半空间中 SH 波的线源，和对 P-SV 波的线源，研究上述方法。我们将求出可用代数表达式精确给出的介质响应。在下节把该方法推广到点源情况，并以 Cagniard-De Hoop 方法与 6.1—6.3 节讨论的 Fourier 变换方法的某种全面对比，来结束本章。

我们从简单的 SH 问题开始。利用笛卡尔坐标 $(x,\ y,\ z)$，假定半无限弹性介质中的线源沿 y 轴，并由沿 y 方向脉冲式作用的体力构成。因此体力为

$$\boldsymbol{f}=(0,\ A\delta(x)\delta(z)\delta(t),\ 0),$$

其中 A 为常数，其量纲是单位长度上的冲力。该源只激发 y 分量的位移，所以位移 $\boldsymbol{u}$ 是 $(0,\ v(x,\ z,\ t),\ 0)$。v 的方程是

$$\rho\ddot{v}=A\delta(x)\delta(z)\delta(t)+\mu\nabla^2 v, \qquad (6.41)$$

对于 $t<0$，v 和 $\dot{v}$ 二者都为零。

为了求解 v，最简单的方法是取补充 4.1 的点源解，并对 y 轴上的所有源求积分：

$$v(x,\ z,\ t)=\frac{1}{4\pi\beta^2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{A}{\rho R_3}\delta\left(t-\frac{R_3}{\beta}\right)dy,$$

式中$R_3=(x^2+y^2+z^2)^{\frac{1}{2}}$。因为$dy/R_3=dR_3/y$以及 R_3 是y的偶函数，所以

$$v(x,\ z,\ t)=\frac{A}{2\pi\rho\beta^2}\int_{R}^{\infty}\frac{1}{y}\delta\left(t-\frac{R}{\beta}\right)dR_3$$

$$=\begin{cases}0 & \text{对 } t<\dfrac{R}{\beta},\\ \dfrac{A}{2\pi\rho\beta^2}\dfrac{1}{\left(t^2-\dfrac{R^2}{\beta^2}\right)^{1/2}} & \text{对 } t>\dfrac{R}{\beta},\end{cases}\tag{6.42}$$

式中 $R=(x^2+z^2)^{\frac{1}{2}}$是二维问题的距离函数。

现在让我们用 Cagniard-De Hoop 方法再推导(6.42)。

取定双重变换

$$\int_{-\infty}^{\infty}\exp(-ik_x x)dx\int_0^{\infty}e^{-st}dt,$$

我们得到

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2}v(k_x,\ z,\ s)=\frac{-A}{\rho\beta^2}\delta(z)+n^2v(k_x,\ z,\ s),$$

$$\text{式中 } n^2=k_x^2+\frac{s^2}{\beta^2}.\tag{6.43}$$

于是，除$z=0$外，处处有$\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}=n^2v$，其解为

$$v(k_x,\ z,\ s)=ae^{nz}+be^{-nz}$$

(用$n>0$规定根的选择)，a和b是常数。分别考虑两个区域$z\gtrless0$，并要求$z\to\pm\infty$时v有界，则我们看到当$z>0$时$a=0$，$z<0$时$b=0$。但(6.43)意味着v穿过$z=0$时连续，而$\frac{\partial v}{\partial z}$有一个降$A/\rho\beta^2$量的阶跃。于是有$v\propto e^{-n|z|}$，知道了$\frac{\partial v}{\partial z}$阶跃的大小以后，最后得到

$$v(k_x,\ z,\ s)=\frac{A}{2\rho\beta^2 n}e^{-n|z|}. \qquad (6.44)$$

[或者，我们也可以通过变换(6.43)中对 z 的依赖关系并利用 k_x 平面中的极点，就像我们推导 Weyl 积分(6.4)时做过的那样，来得到(6.44)。]

我们寻找的解的 Laplace 变换现在是

$$v(x,\ z,\ s)=\frac{A}{4\pi\rho\beta^2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\exp(ik_x x-n|z|)}{n}dk_x \qquad (6.45)$$

其 $\mathrm{Re}\ n=\mathrm{Re}\left(k_x^2+\frac{s^2}{\beta^2}\right)^{\frac{1}{2}}>0$，由以前的 $n>0$ 推广到可讨论复数值。在(6.45)中看到，k_x 是个虚构的积分变量，将它改写为 $k_x=isp$，则

$$v(x,\ z,\ s)=\frac{A}{4\pi\rho\beta^2}\int_{-i\infty}^{i\infty}\frac{-ie^{-s(px+\eta|z|)}}{\eta}dp \qquad (6.46)$$

其中 $\eta=(\beta^{-2}-p^2)^{\frac{1}{2}}$，$\mathrm{Re}\eta>0$.

我们已经把 s 分离到(6.46)被积函数中的仅只一个位置上；现在继续处理，把(6.46)整理成为 Laplace 变换的形式。为此，我们把$\left(\frac{1}{\eta}\right)e^{-s(px+\eta|z|)}$的实部和虚部分别写为 $E(p)$和 $O(p)$，注意，当 p 是虚数时，E是偶函数，而O是奇函数。于是

$$\int_{-i\infty}^{i\infty}-i(E+iO)dp=-2i\int_0^{i\infty}Edp$$
$$=2\,\mathrm{Im}\left\{\int_0^{i\infty}(E+iO)dp\right\},$$

从而有

$$v(x,\ z,\ s)=\frac{A}{2\pi\rho\beta^2}\mathrm{Im}\left\{\int_0^{i\infty}\frac{e^{-s(px+\eta|z|)}}{\eta}dp\right\}. \qquad (6.47)$$

Titchmarsh(1939) 给出一个与我们从(6.46)推导 (6.47) 相类似的结果，并把它叫做“反射原理”。η 的分支切割现在由 $\mathrm{Re}\eta\geqslant 0$ 决定，示于图 6.13。（分析 Fourier 变换时，注意我们是选择

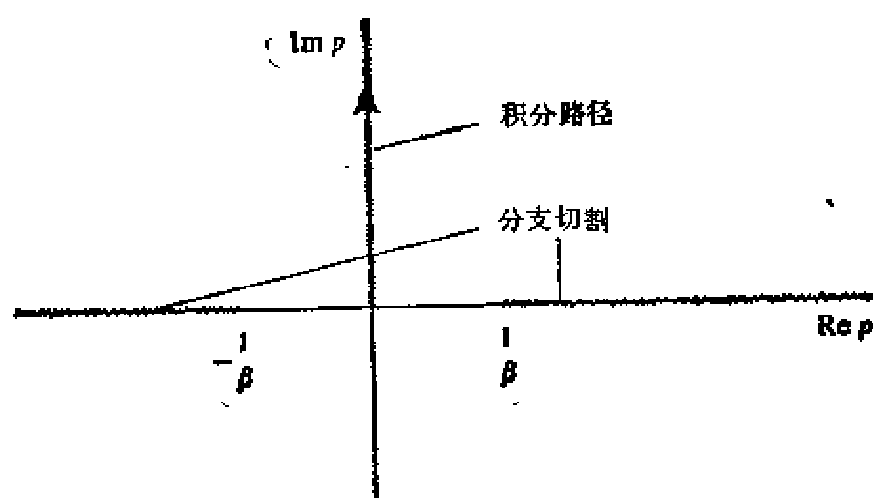


图 6.13
对于 Laplace 变换(6.47)，复 p 平面中的分支切割和积分路径

$\mathrm{Im}\,\eta \geqslant 0$，它的分支切割就复杂得多，包括实 p 轴和虚 p 轴部分。)

我们的下一步是研究复 p 平面中的路径 C，对此，量 $px+\eta|z|$ 是实数。事实上，我们将把它标为 t，使 (6.47) 中的指数变为 e^{-st}，然后用

$$t = px + \eta|z| \tag{6.48}$$

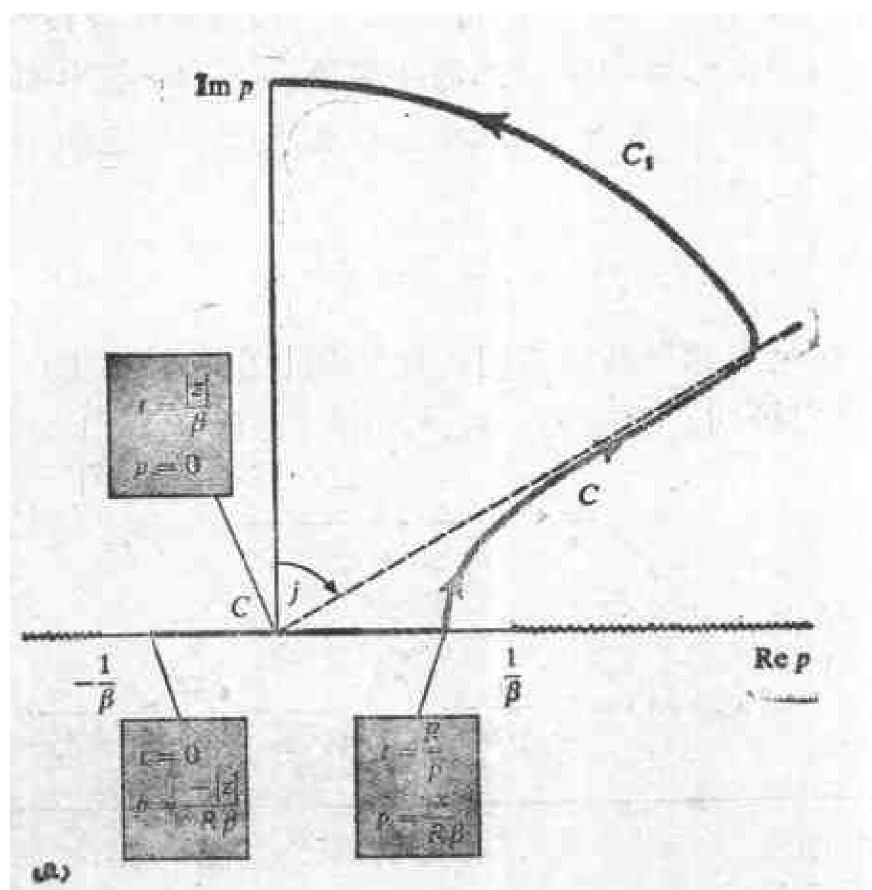
作为一个独立的积分变量。我们把由 $p=p(t)$ 给定的路径 C 叫做 Cagniard 路径，并且现在开始来看一看，怎样用从零到无穷大增加的 t 实数值把它参量化。

求解(6.48)中仅仅作为 t 的函数的 p，需求解二次方程，它的一个根是

$$p = \begin{cases} \dfrac{xt - |z|\left(\dfrac{R^2}{\beta^2} - t^2\right)^{1/2}}{R^2} & \text{对 } t < \dfrac{R}{\beta}, \\[2ex] \dfrac{xt + i|z|\left(t^2 - \dfrac{R^2}{\beta^2}\right)^{1/2}}{R^2} & \text{对 } t > \dfrac{R}{\beta}. \end{cases} \tag{6.49}$$

在图 6.14 中，对于不同的实值 t，我们表示出由(6.49)在复 p 平面中给定的路径 $p=p(t)$。我们已取的是 $x>0$。如果 $x<0$，那

么镜像可用于 C。



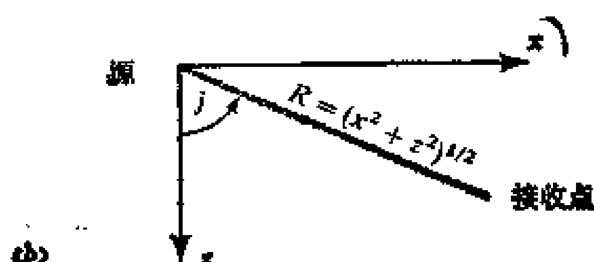


图 6.14

(a) 在复 p 平面中表示出由(6.49)给定的 Cagniard 路径 C，从负实 p 轴上的 $t=0$ 开始，在 $t=R/\beta$ 转而成为双曲线的一支，继而在第一象限沿一条其渐近线同正虚 p 轴构成角 $j=\arc\tan\frac{x}{|z|}$ 的路径。注意，在实 p 轴上，C 不能位于分支切割上。还表示出第一象限中连接它 p 轴和 C 的大圆弧的一部分。(b) 角 j 定义为射线从源到接收点的入射角

处理(6.47)的下一步是，看一看沿正虚 p 轴的积分能否代之以取沿 Cagniard 路径，在它上面 t 从零增大到无穷。事实上，沿着 C 在 $t=0$ 和 $t=R/\beta$ 之间的部分，该被积函数没有贡献，因为 p 和(6.47)中的被积函数都是纯实数。第一象限中的大弧 C_1 也没贡献(参看补充 6.8)。既然在 C 和正虚 p 轴之间不存在奇点，所以我们得到

$$v(x,z,s)=\frac{A}{2\pi\rho\beta^2}\operatorname{Im}\left\{\int_C \frac{e^{-s(px+\eta|z|)}}{\eta}dp\right\}. \qquad (6.50)$$

现在剩下的只是转而用 t 作为积分变量。根据(6.48)和(6.49)，可以证明，对于 $t>R/\beta$，在 C 上有

$$\frac{dp}{dt}=\frac{i\eta}{(t^2-R^2/\beta^2)^{\frac{1}{2}}},$$

它最后给出

$$v(x,z,s)=\frac{A}{2\pi\rho\beta^2}\int_{R/\beta}^{\infty}\frac{e^{-st}}{(t^2-R^2/\beta^2)^{1/2}}dt, \qquad (6.51)$$

补充 6.8

Jordan 引理

我们来证明，当大弧 C_1(图 6.14 中所示)的半径趋于∞时，

$$\int_{C_1}\frac{e^{-s(px+\eta|z|)}}{\eta}dp\to 0.$$

在 C_1 上，对于某个大 L 有 $p=Le^{i\theta}$，并且 $0\leqslant\pi/2-j\leqslant\theta\leqslant\pi/2$。这时 $\eta\sim ip$(因为 $\operatorname{Re}\eta>0$)和 $\eta\sim L\sin\theta-iL\cos\theta$，因而

$$\left|\int_{C_1}\right|\leqslant\int_{\pi/2-j}^{\pi/2}2\exp[-s(L\cos\theta x+L\sin\theta|z|)]d\theta \qquad (1)$$

(假定 L 足够大；插进"2"以保证≤的正确)。如果 x 和 z 都不为零，则这里的指数总是趋于零的小数。若 x 为零，则 $j=0$，而 Cagniard 路径恰恰就是虚轴，于是就没有需要证明的了。但如果 $z=0$，则 $j=\pi/2$，而我们必须检验，即使(1)的被积函数当 $\theta\to\pi/2$ 时不趋于零，但(1)的积分对于大 L 仍趋于零。我们利用不等式，当 $0<\theta<\pi/2$，有 $1-2\theta/\pi<\cos\theta$。根据(1)，利用 $|z|=0$，当 $L\to\infty$，

$$\left|\int_{C_1}\right| \leqslant \int_0^{\pi/2} 2\, e^{-sL(1-2\theta/\pi)x}\, d\theta = \frac{\pi}{sL_x}(1-e^{-sLx}) \to 0.$$

一般说，当 $L\to\infty$ 时 $\int_\Gamma e^{-\lambda p} f(p)\,dp \to 0$ 是对的，其中 λ 是正实数，Γ 是半圆 $p=Le^{-i\theta}(-\pi/2<\theta<\pi/2)$，在 Γ 上当 $|p|\to\infty$ 时 $|f(p)|\to 0$，这个一般结果是 Jordan 引理，常常用于当 λ 是负虚数，并以 Γ 作为 $0\leqslant\theta\leqslant\pi$ 的上半圆时。

由(6.51)我们看出

$$v(x,z,t)=\frac{A}{2\pi\rho\beta^2}\frac{H(t-R/\beta)}{(t^2-R^2/\beta^2)^{1/2}} \qquad \text{(即6.42)}$$

这就是我们重新推导 δ 函数响应的结果。注意，脉冲形状(6.42)有我们所期望的到时 $t=R/\beta$。在 $t=R/\beta$ 有一个 v 的奇点，但它可积，所以不难用体力 $\boldsymbol{f}$ 的响应与一般时间函数的褶积来得到。

下面我们审查一个可出现首波的简单 SH 问题。假定由 $\boldsymbol{f}=(0,\ A\delta(x)\delta(z-z_0)\delta(t),\ 0)$ 给定的线源，作用于 $z<0$ 的半空间内，这时 $z_0<0$，并且该半空间沿 $z=0$，与 $z>0$ 的另一个半空间密接。密度和横波速度在上半空间为 ρ_1 和 β_1，在下半空间为 ρ_2 和 β_2(参看图 6.15)。取双重变换 $(x,\ t)\to(k_x,\ s)$，根据(6.44)，显然上部介质中的入射波为

$$v^{\text{入}}(k_x,z,s)=\frac{A}{2\rho_1\beta_1^2 s\eta_1}\exp(-s\eta_1|z-z_0|), \qquad (6.52)$$

其中 $\eta_1=(1/\beta_1^2-p^2)^{\frac{1}{2}}$。$v$ 和 $\tau_{yz}=\mu\partial v/\partial z$ 在 $z=0$ 上的连续，决定着反射和透射系数 $\grave{S}\acute{S}$ 和 $\grave{S}\grave{S}$。根据(5.32)，它们是

$$\grave{S}\acute{S}=\frac{\mu_1\eta_1-\mu_2\eta_2}{\mu_1\eta_1+\mu_2\eta_2},\quad \grave{S}\grave{S}=\frac{2\mu_1\eta_1}{\mu_1\eta_1+\mu_2\eta_2}.$$

因此，总场为

$$\text{当}\quad z<0,\ v(k_x,z,s)=\frac{A}{2\mu_1 s\eta_1}\{\exp(-s\eta_1|z-z_0|) + \grave{S}\acute{S}\exp[+s\eta_1(z+z_0)]\}, \qquad (6.53)$$

当 $z>0$，$v(k_x,z,s)=\frac{A}{2\mu_1 s\eta_1}\acute{S}\grave{S}\exp[-s(\eta_2 z+\eta_1 z_0)]$，

$$(6.54)$$

这些是进行 Cagniard-De Hoop 反演所需要的代数表示式。我们已经审查过(6.53)中的第一项，现在来审查第二项 $v^{反}$，它给出上部介质中的广义反射响应。采用曾导致(6.47)的那些步骤，我们得到

$$v^{反}(x,z,s)=\frac{A}{2\pi\rho_1\beta_1^2}\mathrm{Im}\left\{\int_0^{i\infty}\frac{1}{\eta_1}\left(\frac{\mu_1\eta_1-\mu_2\eta_2}{\mu_1\eta_1+\mu_2\eta_2}\right)\times\exp[-s(px+\eta_1|z+z_0|)]dp\right\},\tag{6.55}$$

它包括用 Re $\eta_1\geqslant 0$，Re $\eta_2\geqslant 0$ 所定义的分支。

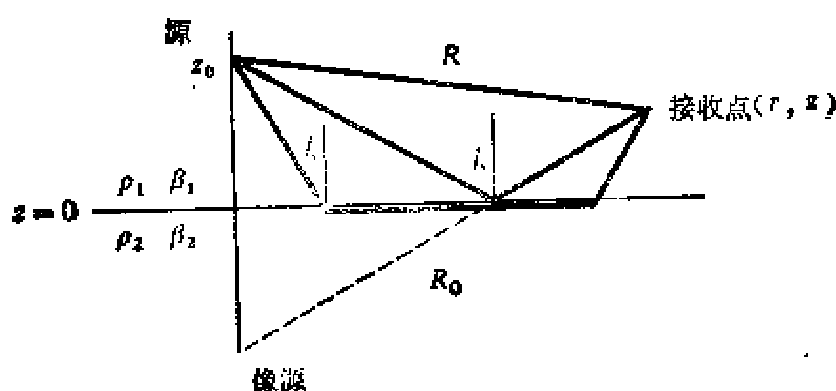
对于反射，Cagniard 路径 C 是

$$t=px+\eta_1|z+z_0|\tag{6.56}$$

的一个解 $p=p(t)$，即

$$p=\begin{cases}\dfrac{xt-|z+z_0|\left(\dfrac{R_0^2}{\beta_1^2}-t^2\right)^{1/2}}{R_0^2} & t\leqslant\dfrac{R_0}{\beta_1}, \quad (6.56\,\mathrm{a})\\[2ex] \dfrac{xt+i|z+z_0|\left(t^2-\dfrac{R_0^2}{\beta_1^2}\right)^{1/2}}{R_0^2} & t\geqslant\dfrac{R_0}{\beta_1}, \quad (6.56\,\mathrm{b})\end{cases}$$

式中 $R_0=[x^2+(z+z_0)^2]^{\frac{1}{2}}$是接收点与镜象源点间的距离(参看图 6.15 a)。把这个 Cagniard 路径和关于(6.55) 的积分的最速下降路径比较一下，是很有趣的。为找出这后一个路径，我们采用补充 6.3 中的术语，使 $x=s$，$\zeta=p$，$f=-(px+\eta_1|z+z_0|)$。鞍点 $p=p_s$ 必定满足 $f'(p_s)=0$，即 $x\cos j_s=|z+z_0|\sin j_s$，这里的 $p_s=\beta_1^{-1}\sin j_s$，所以，p_s 正是源点与接收点之间反射射线的参数，j_s 是在上部介质中的入射角(参看图 6.15 a)。注意，某些与 6.2 节很相似之处开始出现[见(6.18)]。在那节，我们分析了 P 波问题，用 Fourier 变换并考虑了一个点源。而这里，我们也



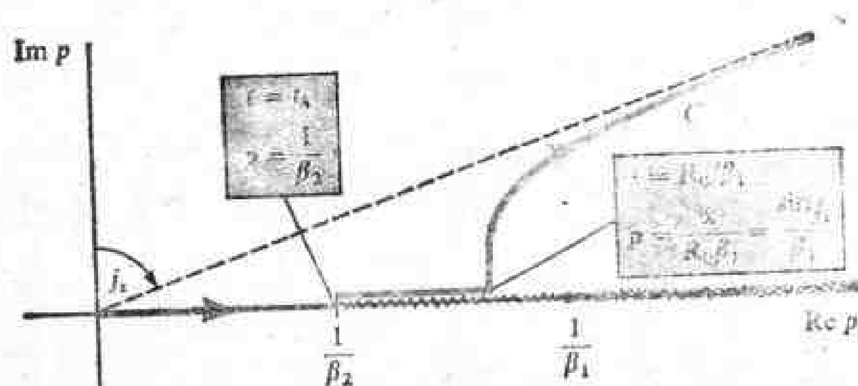


图 6.15

(a)由两个沿 $z=0$ 密接的半空间组成的介质中，位于 $x=0$，$z=z_0<0$ 的 SH 线源的参数。$R_0=[x^2+(z+z_0)^2]^{\frac{1}{2}}$是从下部介质中的镜象源点至接收点的距离。我们假定 $\beta_2>\beta_1$，临界角 $j_c=\sin\beta_1/\beta_2$。广角反射的入射角为 j_s，并且 $j_s>j_c$。(b) 当接收点在临界距离以外，因而 $j_s>j_c$ 并且能发生首波时，用来估算广义反射(6.55)的复射线参数平面的特征

求出本质上同样的鞍点位置。现在的差别是，最速下降路径垂直于实 p 轴，即 $\chi=\pi/2$(参看补充 6.3)；可是，我们以前得到的是 $\chi=-\pi/4$。事实上，在 Cagniard 路径处于实轴上(6.56 a)的地方，它是处于被积函数的一个“脊”上，此脊随着 t 增至 R_0/β^1 而降到在 $p_s=x/(R_0\beta_1)=\beta_1^{-1}\sin j_s$ 的鞍点。在那里 Cagniard 路径转过 $\pi/2$ 并追踪被积函数的一条“谷”，这是通常的当 t 从

R_0/β_1 增大时的最速下降路径(6.56 b)。

若接收点位于满足 $\chi/R_0<\beta_1/\beta_2$ 的某位置，则 Cagniard 路径从实 p 轴离开的点，位于来自 $p=1/\beta_1$ 和 $p=1/\beta_2$ 的分支切割的左边。(不等式意味着 x 小于首波开始能被观测到的临界距离)。分支切割的干扰没有发生，并且由于在 C 上 (对于 $t>R_0/\beta_1$)

$$\frac{dp}{dt}=i\eta_1\left(t^2-\frac{R_0^2}{\beta_1^2}\right)^{-\frac{1}{2}},$$

所以

$$v^{反}(x,z,t)=\frac{A}{2\pi\rho_1\beta_1^2}\text{Re}\left\{\frac{\mu_1\eta_1-\mu_2\eta_2}{\mu_1\eta_1+\mu_2\eta_2}\right\}\frac{H(t-R_0/\beta_1)}{(t^2-R_0^2/\beta_1^2)^{1/2}}. \quad (6.57)$$

[因为这时 $p(t)$ 是实数，见(6.56 a)，而被积函数 (6.55) 的虚部为零，所以，当 $t<R_0/\beta_1$，没贡献。] 这个代数式(6.57)是精确的，对于 $t>R_0/\beta_1$，它的求值是首先用 (6.56 b) 得到 Cagniard 路径上的相应点，然后求出 $\eta_i=(\beta_i^{-2}-p^2)^{\frac{1}{2}}$ $(i=1,\ 2)$，最后代入(6.57)。

如果接收点是在临界距离以外，使 $1>x/R_0>\beta_1/\beta_2$，则 Cagniard 路径在 $1/\beta_2$ 与 $1/\beta_1$ 间的某点 $p=p_*$ 离开实 p 轴，如图 6.15 b 所示。从正虚 p 轴向 Cagniard 路径的变形象以前一样进行，但现在位于实 p 轴部分的路径可以有贡献。这就是首波的贡献，它出现在(6.55)沿 Cagniard 路径对 $1/\beta_2$ 与 $1/\beta_1\ \sin\ j_s$ 间实 p 值的计算；这时 η_2 是纯虚数，所以被积函数有非零的虚部。相应的时间值由(6.56)求出：

$$在\ p=\frac{1}{\beta_2},\ t=t_h=\frac{x}{\beta_2}+|z+z_0|(\beta_1^{-2}-\beta_2^{-2})^{\frac{1}{2}}$$

t_h 是首波从$(0,\ z_0)$到$(x,\ z)$的时间；

$$在\ p=\beta_1^{-1}\ \sin\ j_s,\ t=R_0/\beta_1$$

是广角反射的到时。在时间 t_h 和 R_0/β_1 之间，η_2 是负的纯虚量。于是，广义反射的精确式是

$$
\begin{aligned}
v^{反}(x,z,t) &= \frac{A}{2\pi\rho_1\beta_1^2}\mathrm{Im}\left\{\frac{\mu_1\eta_1-\mu_2\eta_2}{\mu_1\eta_1+\mu_2\eta_2}\right\} \\
&\times\frac{H(t-t_h)-H(t-R_0/\beta_1)}{(R_0^2/\beta_1^2-t^2)^{1/2}}+\frac{A}{2\pi\rho_1\beta_1^2}\mathrm{Re}\left\{\frac{\mu_1\eta_1-\mu_2\eta_2}{\mu_1\eta_1+\mu_2\eta_2}\right\} \\
&\times\frac{H(t-R_0/\beta_1)}{(t^2-R_0^2/\beta_1^2)^{1/2}}.
\end{aligned}
\tag{6.58}
$$

这里的最后一项，给出广角反射在时间 $t>R_0/\beta_1$ 的形状。但是，因为下部介质中的有关波是非均匀的$\left(p>\frac{1}{\beta_2}\right)$，所以有个相移。正如我们在补充 5.6 和在 6.2 节所表明的，广角反射的脉冲形状是入射脉冲形状及其 Hilbert 变换的线性和。后者包含 $t<R_0/\beta_1$ 时发生的，即来自(6.58)右边第一项的运动，它常被叫做首波项。在这个意义上，可以说广角反射是“从首波的尾巴中出现的”。但是请注意，无论何时，只要关于每种贡献的近似(渐近)理论一旦不能用[例如(6.25)，若接收点在临界距离附近，使 L 很小]，则把首波同反射的贡献分离开的企图，就将无用。虽然这是术语的失效，但(6.58)继续给出“首波”加“反射”的精确总效应。

关于二维问题的精确脉冲响应，我们在本节要考虑的最后问题，是半空间中 P-SV 波的线源，该半空间取作 $z>0$ 区域，自由面在 $z=0$。我们紧紧地仿照 Chapman(1972) 的作法，得到的结果有许多同上面 6.3 节类似之点。引进一个新概念：“漏能模式”，它和位于 Riemann 叶 $\{\mathrm{Re}\ \xi<0;\ \mathrm{Re}\ \eta>0\}$ 上的 Rayleigh 函数的零值相联系。

我们来考虑只在 x 和 z 方向有位移的 P-SV 运动。这时，根据 5.1 节所给的论证，用经由

$$
\mathbf{u}=\nabla\phi+\nabla\times(0,\psi,0)=(\partial\phi/\partial x-\partial\psi/\partial z,0,\partial\phi/\partial z+\partial\psi/\partial x)
\tag{6.59}
$$

而与位移相联系的标量势 ϕ 和 ψ 进行计算就足够了。该运动的源是体力 $\mathbf{f}$，它(不失普遍性)由 $\mathbf{f}=\nabla\Phi+\nabla\times(0,\Psi,0)$ 给定。根据 Lamé 定理，这些势满足

$$\ddot{\phi}=\alpha^2\nabla^2\phi+\Phi/\rho \text{ 和 } \ddot{\psi}=\beta^2\nabla^2\psi+\Psi/\rho, \tag{6.60}$$

而为了给定在深度 h 处的线源，我们取

$$\Phi(x,z,t)=L_0(t)\delta(x)\delta(z-h) \quad (P\text{ 波源})$$

$$\Psi(x,z,t)=M_0(t)\delta(x)\delta(z-h) \quad (SV\text{ 波源}) \tag{6.61}$$

这两个源中的每一个，都产生在自由面入射的波，进行变换 $(x,t)\to(k_x,\ s)$之后，通过与(6.52)的对比，我们看到入射波具有势

$$\phi^{入}(k_x,z,s)=\frac{L_0(s)}{2\rho\alpha^2 s\xi}e^{-s\xi|z-h|},$$

$$\psi^{入}(k_x,z,s)=\frac{M_0(s)e^{-s\eta|z-h|}}{2\rho\beta^2 s\eta}. \tag{6.62}$$

象通常一样，我们这里用了$\xi=(\alpha^{-2}-p^2)^{\frac{1}{2}}$，$\eta=(\beta^{-2}-p^2)^{\frac{1}{2}}$，并选择根 Re $\xi>0$，Re $\eta>0$ 来满足辐射条件。当波(6.62)到达自由面时，它们将产生 P 和 S 反射，它们的振幅取决于在 $z=0$ 上边界条件 $\tau_{zz}=\tau_{xz}=0$。变换到 (k_x,z,s)域，我们就实质上把计算反射简化为一个平面波理论问题，使得总势恰恰为

$$\phi(k_x,\ z,\ s)=\frac{L_0(s)}{2\rho\alpha^2 s\xi}\{\exp(-s\xi|z-h|)+\acute{P}\grave{P}$$

$$\times\exp[-s\xi(z+h)]\}+\frac{M_0(s)}{2\rho\beta^2 s\eta}\frac{\alpha\acute{S}\grave{P}}{\beta}\exp[-s(\xi z+\eta h)],$$

$$\psi(k_x,\ z,s)=\frac{-L_0(s)}{2\rho\alpha^2 s\xi}\cdot\frac{\beta}{\alpha}\acute{P}\grave{S}\exp[-s(\eta z+\xi\eta)]$$

$$+\frac{M_0(s)}{2\rho\beta^2 s\eta}\{\exp(-s\eta|z-h|)-\acute{S}\grave{S}\exp[-s\eta(z+h)]\}, \tag{6.63}$$

其中的反射系数和转换系数(见(5.26)—(5.27)；(5.30)—(5.31))为

$$\acute{P}\grave{P}=\frac{4p^2\xi\eta-(\beta^{-2}-2p^2)^2}{R(p)},\quad \acute{S}\grave{P}=\frac{4\beta p\eta(\beta^{-2}-2p^2)/\alpha}{R(p)},$$

$$\acute{P}\grave{S}=\frac{4\alpha p\xi(\beta^{-2}-2p^2)/\beta}{R(p)},\quad \acute{S}\grave{S}=\frac{-4p^2\xi\eta+(\beta^{-2}-2p^2)^2}{R(p)}, \tag{6.64}$$

而

$$R(p)=4p^2\xi\eta+(\beta^{-2}-2p^2)^2 \tag{6.65}$$

是 Rayleigh 函数。

补充 6.9

关于多重变换解(6.63)的写法

阻碍立即写出(6.63)式的唯一困难，与我们的符号约定以及反射系数和转换系数归一化的细节有关。从第五章开始，我们采用了写这些位移振幅比系数的约定，正号代表运动沿 x 增大的方向（见图 5.5)。因为(6.63)是关于势的，所以分别对 $\acute{P}\grave{S}$ 和 $\acute{S}\grave{S}$ 引进了负号，对 $\acute{S}\grave{P}$ 和 $\acute{P}\grave{S}$ 引进了因子 α/β 和 β/α。

实际上，并不把势反演回时间域，然后用(6.59)求位移分量。相反，求出变换的与(6.63)等效的位移分量，直接把它们反演到时间域。利用 $\mathbf{u}=(u,0,w)$ 并认识到算符 $\partial/\partial x$ 变为在变换域中乘以$(-sp)$，于是根据(6.59)，对于 $0\leqslant z\leqslant h$，有

$$\begin{pmatrix}u(k_x,z,s)\\ w(k_x,z,s)\end{pmatrix}=\frac{L_0(s)}{2\rho\alpha^2\xi}\Bigg[\begin{pmatrix}-p\\ \xi\end{pmatrix}\exp[s\xi(z-h)]+$$

$$+\acute{P}\grave{P}\begin{pmatrix}-p\\ -\xi\end{pmatrix}\exp[-s\xi(z+h)]\Bigg]+\frac{M_0(s)}{2\rho\beta^2\eta}\frac{\alpha}{\beta}\acute{S}\grave{P}\begin{pmatrix}-p\\ -\xi\end{pmatrix}$$

$$\exp[-s(\xi z+\eta h)]+\frac{L_0(s)}{2\rho\alpha^2\xi}\frac{\beta}{\alpha}\acute{P}\grave{S}\begin{pmatrix}-\eta\\ p\end{pmatrix}\exp[-s(\eta z+\xi h)]$$

$$+\frac{M_0(s)}{2\rho\beta^2\eta}\Bigg[\begin{pmatrix}-\eta\\ -p\end{pmatrix}\exp[s\eta(z-h)]+\acute{S}\grave{S}\begin{pmatrix}-\eta\\ p\end{pmatrix}\exp[-s\eta(z+h)]\Bigg]. \tag{1}$$

既然向量

$$\begin{pmatrix}-p\\ \xi\end{pmatrix} \quad 和 \quad \begin{pmatrix}-\eta\\ -p\end{pmatrix}$$

分别有振幅 $1/\alpha$ 和 $1/\beta$，所以在 $\acute{S}\grave{P}$ 前面放个因子 α/β（在 $\acute{P}\grave{S}$ 前面放因子 β/α)，以使转换系数保持其作为位移振幅比的标准定义。

在本节的余下部分，为了建立某些一般的方法并得到特殊的结果，我们仅仅讨论只把一种波反演到时间域。((6.63) 指出总

共有六种波，其中两种是入射波，没有什么意义。）我们选择在 $M_0(t)=M_0H(t)$（即固定 M_0 高度的阶跃，其 Laplace 变换为 M_0/s）情况下，计算广义 $\acute{S}\grave{S}$ 反射。根据补充 6.9 中(1)式的最后一项，此波的水平位移分量是 u_{SS}，这里

$$u_{SS}(k_x,z,s)=\frac{-M_0}{2\rho\beta^2 s}\acute{S}\grave{S}\exp[-s\eta(z+h)]. \quad (6.66)$$

因为 $\acute{S}\grave{S}$ 是 p 的偶函数，所以 k_x 的递变换可写作

$$u_{SS}(x,z,s)=\frac{-M_0}{2\pi\rho\beta^2}\text{Im}\left\{\int_0^{i\infty}\acute{S}\grave{S}(p)\exp[-spx-s\eta(z+h)]dp\right\} \quad (6.67)$$

（请回顾 $k_x=isp$）。用 $t=px+\eta(z+h)$ 来定义 Cagniard 路径，即

$$p(t)=\begin{cases}\dfrac{xt-(z+h)\left(\dfrac{R_0^2}{\beta^2}-t^2\right)^{1/2}}{R_0^2} & t\leqslant\dfrac{R_0}{\beta},\\[2ex] \dfrac{xt+i(z+h)\left(t^2-\dfrac{R_0^2}{\beta^2}\right)^{1/2}}{R_0^2} & \dfrac{R_0}{\beta}\leqslant t,\end{cases} \quad (6.68)$$

其中 $R_0=[x^2+(z+h)^2]^{\frac{1}{2}}$ 是接收点与镜象源点间的距离，我们得到

$$u_{SS}(x,z,s)=\frac{-M_0}{2\pi\rho\beta^2}\text{Im}\left\{\int_0^{\infty}\acute{S}\grave{S}(p)e^{-st}\frac{dp}{dt}dt\right\},$$

因而时间域中的精确解为

$$u_{SS}(x,z,t)=\frac{-M_0}{2\pi\rho\beta^2}\text{Im}\left\{\acute{S}\grave{S}(p)\frac{dp}{dt}\right\}$$

$$=\frac{M_0}{2\pi\rho\beta^2}\text{Im}\left\{\frac{4p^2\xi\eta-(\beta^{-2}-2p^2)^2}{4p^2\xi\eta+(\beta^{-2}-2p^2)^2}\frac{dp}{dt}\right\}\Bigg|_{p=p(t)} \quad (6.69)$$

在此式中，

$$\frac{dp}{dt}=\begin{cases}\dfrac{\eta}{\left(\dfrac{R_0^2}{\beta^2}-t^2\right)^{1/2}} & 0<t<\dfrac{R_0}{\beta},\\[2ex] -\dfrac{i\eta}{\left(t^2-\dfrac{R_0^2}{\beta^2}\right)^{1/2}} & \dfrac{R_0}{\beta}<t,\end{cases}$$

所以，(6.69) 中一个可积的奇点，是在反射波的射线到时，即 $t=R_0/\beta$。

虽然精确解(6.69)简单，但仍值得花时间进一步讨论，因为识别与复 p 平面相联系的各种特征（参看图 6.16 b）以及由这些特征控制的波的近似性质，需要有深刻的认识。例如，接收点（如果它离源点足够远）上的第一个到达波是首波，其射线参数是 $1/\alpha$，而到时为 $t_h=x/\alpha+(z+h)(\beta^{-2}-\alpha^{-2})^{\frac{1}{2}}$。它的脉冲形状取决于(6.69)在 $t=t_h$，$p=1/\alpha$ 附近的计算，对于这些值，Cagniard 路径位于在 $p=1/\alpha$ 开始的分支切割上。另一个重要的到达波，是与(6.67)的鞍点相联系的反射。它在 Cagniard 路径上发生于 $t=R_0/\beta$，并具有与我们在(6.57)和 (6.58) 中所研究的相类似的性质。出现的两个新现象是由(6.67)中被积函数的极点，即 Rayleigh 函数

$$R(p)=4\,p^2\xi\eta+(\beta^{-2}-2\,p^2)^2$$

的零值造成的。

由 5.3 节知道，$R(p)$在$\{\mathrm{Re}\xi\geqslant0;\ \mathrm{Re}\eta\geqslant0\}$叶上$p=\pm1/\beta$附近的 $p=\pm1/C_R$ 有零值，这儿的 ξ 和 η 实际为纯虚数。$R(p)$ 在$\{\mathrm{Re}\xi<0;\ \mathrm{Re}\eta\geqslant0\}$叶上的 $p=\pm1/\alpha$ 附近也有零值。达个叶在下述意义上常被叫做“被禁的”或者“非物理的”，就是在该叶某点上求值的被积函数随 $z\to\infty$ 将趋于无穷，这违反辐射条件。但是我们将发现，在禁用叶上 $R(p)$的零值上，$\acute{S}\grave{S}$ 的极也能对地震图做出可鉴别的贡献。

我们先来估计在 $p=1/C_R$ 上Rayleigh 极的效应。随着源点至接收点距离的增大，角j_0增大（图 6.16 a），而 Cagniard 路径

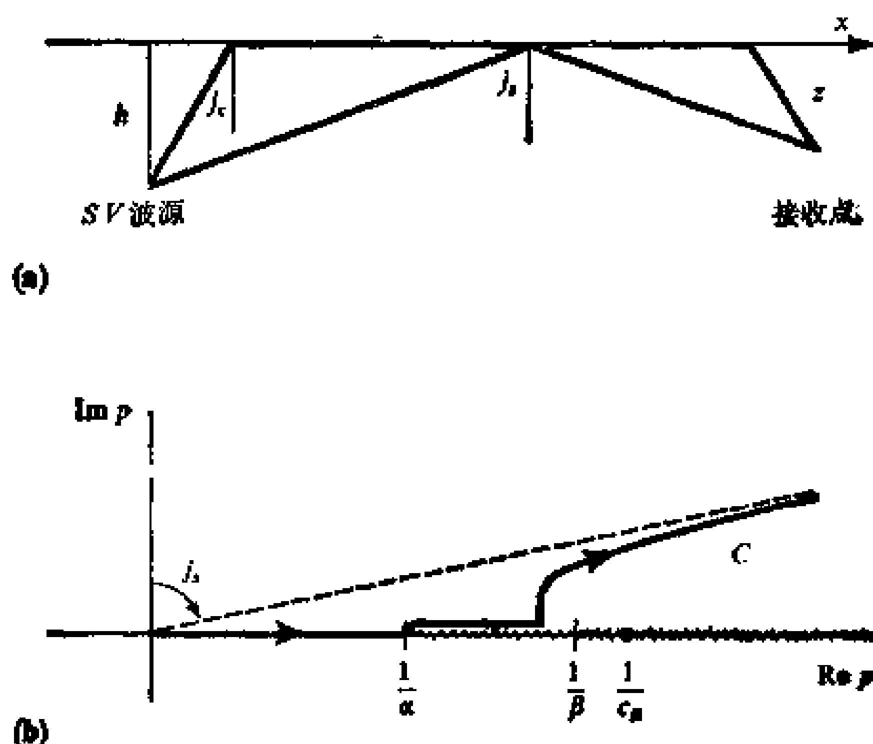


图 6.16

对于隐埋在均匀半空间中的线源的广义 *ss* 反射。(a) $j_s > j_c$ 情况下的源点—接收点几何关系，表示出反射和首波两种路径。(b) 复 p 平面，Cagniard 路径处于 Riemann 叶 $\{\mathrm{Re}\xi>0;\ \mathrm{Re}\eta>0\}$ 上。在 $p=1/C_R$ 的 Rayleigh 极，现在位于两条分支切割上

渐近线变得靠近实 p 轴（图 6.16 b）。因此，Cagniard 路径本身在靠近 Rayleigh 极处通过。如果画出 $p=1/C_R$ 附近的 $\acute{S}\grave{S}(p)$ 等值线，如图 6.17 所示，则显而易见，在极附近的大 $\acute{S}\hat{S}(p)$ 值，将导致可辨认的 Rayleigh 波，只要 Cagniard 路径距 $p=1/C_R$ 足够近。为估计何时 Rayleigh 脉冲发育良好，我们可以看看在真"到时" x/C_R 处，是否Cagniard路径比能影响(6.69)中 u_{ss} 的 $\acute{S}\hat{S}$ 和 dp/dt 的次一个最近特征更靠近 Rayleigh 极。因为这个次一个最近特征是 $p=1/\beta$ 的支点，所以显然，如果

$$\left|\ p\left(\frac{x}{c_R}\right)-\frac{1}{c_R}\right|<\frac{1}{c_R}-\frac{1}{\beta}, \tag{6.70}$$

则可能 Rayleigh 波很发育。在上述不等式中，我们可由 (6.68) 求出 p 在时间 x/c_R 的值，并得到一个完全等价的几何关系

$$\tan j_s > \left(\frac{2c_R}{\beta - c_R}\right)^{1/2} \tag{6.71}$$

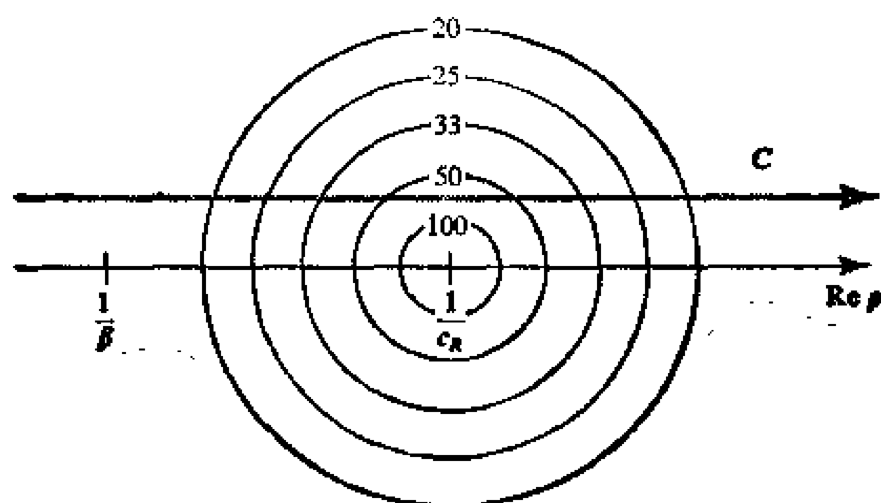


图 6.17

对于 Rayleigh 极附近的值，将$\acute{S}\grave{S}(p)$的大小在复 p 平面上画出等值线。这时$\acute{S}\grave{S}(p) \propto (p-1/c_R)^{-1}$，所以等值线实质上是一组以极点为圆心的同心圆。所标出的数字是比值$1:\frac{1}{2}:\frac{1}{3}:\frac{1}{4}:\frac{1}{5}\cdots$这适合于半径的等增量。对于大 j_s 值(见图 6.16 a，b)，Cagniard路径C表明切穿靠近极点的等值线：由(6.69)所给的相联系的u_{SS}值，在这些时间上显然将很大。这些值构成 Rayleigh 波脉冲形状(即其横波分量。广义$\acute{S}\grave{P}$还有一部分贡献给出P波分量)

实际上，这个结果看来比我们对P波源所展示的中野不等式(6.34)更好（那个不等式的符号是反的，因为它指明的是Rayleigh波不发育的范围）。由于对许多岩石 $c_R \sim 0.92\,\beta$，所以，从(6.71)得到的结论是，要使 Rayleigh 波发育，变程必须至少比源点加接收点深度大五倍。

Gilbert和 Laster(1972)把在 $p=1/c_R$ 的极，标为$\bar{S}$极，把相联系的Rayleigh 波标为$\bar{S}$脉冲。采取这种标记法是因为，一般说，Rayleigh 波是与附近的同自由面发生相互作用的S波波阵面相联系的衍射现象。与此类似，存在一个与 $R(p)$ 的下述极相联系的效应，这些极通常位于 $p=1/\alpha$ 附近，只对大于大约 0.4

的Poisson比值才从这个支为移开。Gilbert 和 Laster 称之为$\bar{P}$极的这些极，不在物理的 Riemann 叶上。引入Phinney(1961)的记号，我们指定物理叶{Reξ>0; Reη>0}为(＋＋)叶，与此类似，其它三个叶为(＋－)，(－＋)和(－－)。Rayleigh 极($\bar{S}$)在(＋＋)叶上，$\bar{P}$ 极在(－＋)叶上。

可以合理地认为，位于非物理叶上的$\acute{S}\grave{S}$的极，不能影响(6.63)中的广义反射 u_{SS}，因为 Cagniard 路径完全在(＋＋) 叶上。图 6.18 所示是在一个$\bar{P}$ 极附近的一组$\acute{S}\grave{S}$等值线。因为我们关心的是(＋＋) 叶的第一象限（这是我们的 Cagniard 路径所在的区域）中的$\acute{S}\hat{S}$值，所以，正是这一叶，在图 6.18 的第一象限被画出了等值线。$\acute{S}\grave{S}$进入第四象限(即穿过 $1/\alpha<p$ 的实 p 值)时的解析延拓，则要求它进入不同的 Riemann 叶，即(－＋) 叶的第四象限，并且在这个区域有一个$\acute{S}\hat{S}$的极。所画出的极实际上是在适合于Poisson比大约为 0.4 的位置，要点是与此极相联系的等值线不在物理叶上出现。对于足够大变程上的接收点，使 Cagniard路径位于或接近于实 p 轴，图 6.18 中用实线画的这些等值线在求(6.63)的值时将被穿过，结果将是相当宽的脉冲形状。这就是Gilbert，Laster，Bachus和Schell(1962)详细描述过的 $\bar{P}$ 脉冲。它出现在射线参数位于 $1/\alpha$ 和 $1/\beta$ 之间时，它在地震图上的位置，是在首波和广角反射波之间。图 6.19 a表示出一个例子。

当 Poisson 比值从 0.4 向 0.263 左右减小时，$\bar{P}$ 极迁移到实轴上刚刚在 $p=1/\alpha$ 左边一点的地方(但仍在(－＋)叶上)。随着Poisson 比从 0.263 向零进一步减小，$\bar{P}$极保持在实 p 轴上，一个极实际上趋于在 $p=1/\alpha$ 的支点本身（参看问题 6.3)。在产生首波的 Cagniard 路径的那个点附近，极点（也在 $p=1/\alpha$，但是在(＋＋)叶上）的存在，具有使到达的首波相对其通常形状发生畸变的效应。在图 6.19 b 中，对于通常 Poisson 比的值(0.25)，我们给出一个 u_{SS} 的例子，而在图 6.19 c 中，我们对于非常低的Poisson比(0.1)，给出理论地震图。

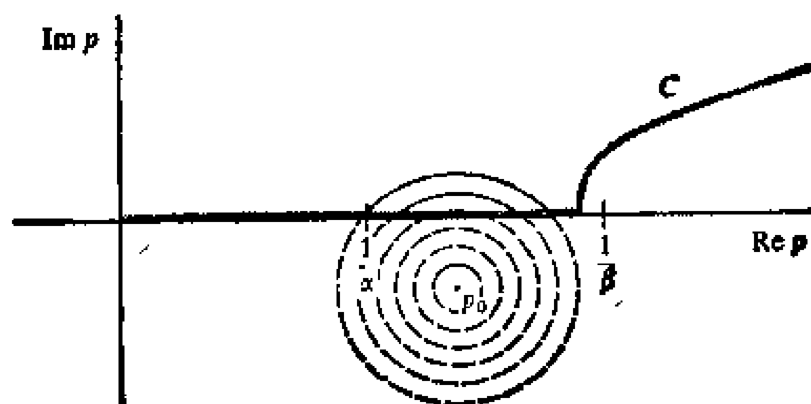


图 6.18

在“非物理的”Riemann叶上 $\overline{P}$ 极 $p=p_0$ 附近，表示 $\acute{S}\grave{S}(p)$ 大小的等值线。这是（－＋）叶，且 $R(p_0)=0$，这里仍有 $R(p)=4p^2\xi\eta+(\beta^{-2}2p^2)^2$。虽然靠近 p_0 的等值线是全部位于（－＋）叶第四象限中的同心圆，但半径较大的等值线必定跑到从 $p=\frac{1}{\alpha}$ 向右跑的分支切割上去。这些等值线这时将扩展到物理的 Riemann 叶的第一象限。因为这是使 $\acute{S}\grave{S}(p)$ 穿过分支切割时保持为解析的方法（见补充 6.2）。在（－＋）叶上，等值线画成虚线，等值线扩展到（＋＋）叶上时画成实线。注意，对于 $1/\alpha$ 与 $1/\beta$ 之间的线段，Cagniard 路径位于实 p 轴上

$\overline{P}$ 脉冲是漏能模式的一个简单例子。形容词“漏能”是恰当的，因为，对于受到 $\overline{P}$ 极影响的这部分 Cagniard 路径，η 或是纯实数，或对于反射波刚刚到达后的时间，只有一个小虚部。这意味着能量作为 SV 运动离开自由面向下辐射。对于 $\overline{S}$ 不发生这样一种辐射漏能，因为对于 $\overline{S}$，ξ 和 η 二者都是虚数。在第七章我们要进一步考虑漏能模式。

6.5 对于点源的Cagniard-De Hoop 方法

上面已经看到，Cagniard-De Hoop 分析二维问题（线源）的引人注目的特征就是，精确的代数解是可能的。对于三维问题，

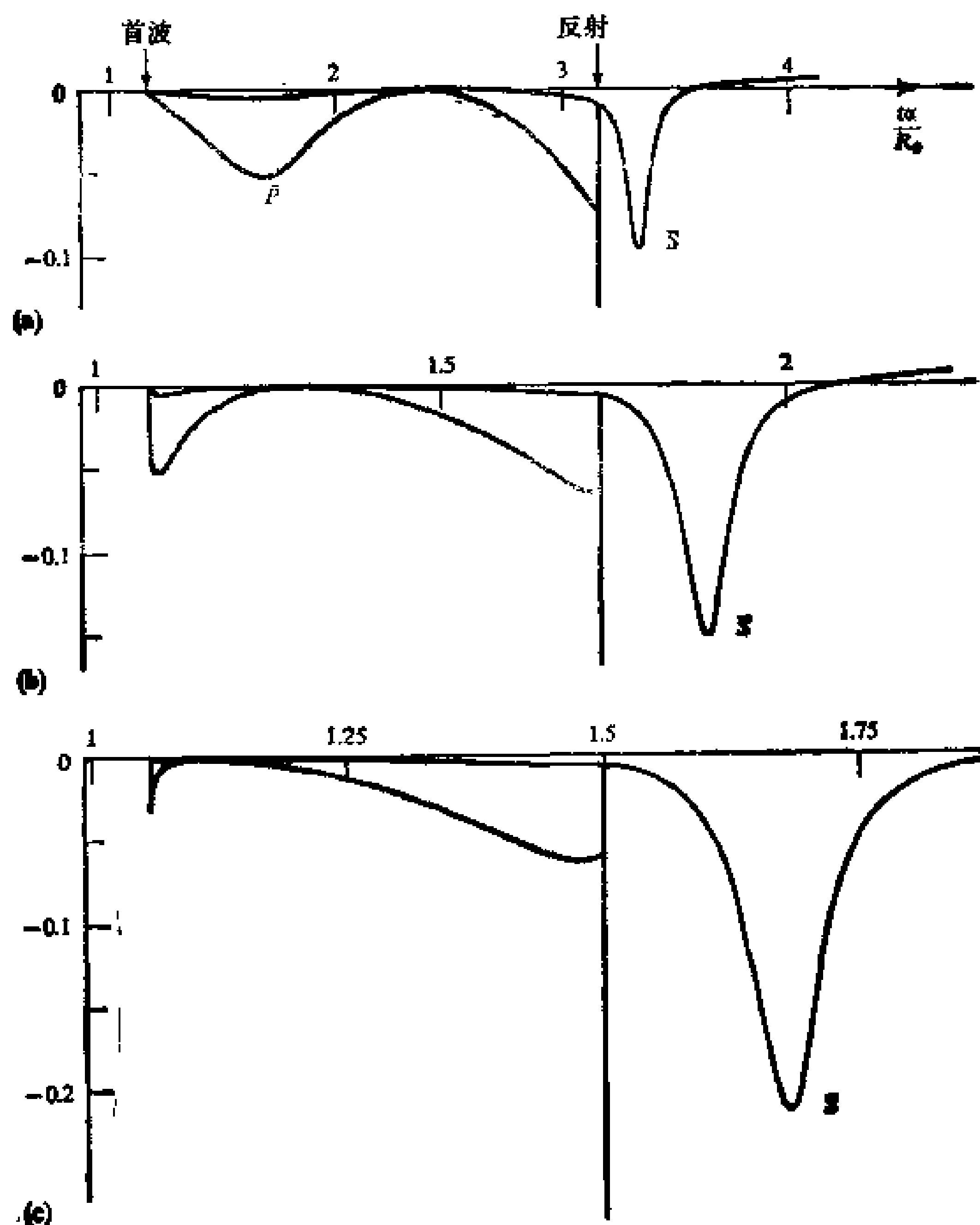


图 6.19

对于三个不同的 Poisson 比，(6.69) 所给广义$\grave{S}\grave{S}$反射 的水平分量表示为时间的函数。我们用无量纲的时间 $t\alpha/R_0$，这里 的 R_0 是 接收点与镜像源点间的距离：$(h,x,z)=(1,20,0.1)$单位。因为首波在其路径的大部分上以 P 波速度传播，所以它在刚刚 $t\alpha/R_0=1$之后到达。时间标度的选取，是使首波和反射波的时间相匹配。为阐明首波和反射波到达之间的脉冲形状细节，还对这一部分地震图使用增大十倍的振幅标度(用灰色表示)。(a)Poisson比等于 4/9。有一个离开实 p 轴的如图 6.18 所示类型的$\bar{P}$ 极，导致首波到时与广角反射之间的$\bar{P}$ 波。(b)Poisson 比等于 1/4。首波和广角反射波是清楚分开的脉冲。(c) Poisson 比等于 1/10。一个$\bar{P}$ 极在实 p 轴上，靠近支点$p=1/\alpha$，尽管不在(＋＋)叶上。其主要效应是影响首波的形状，这里是给出一个脉冲形到达波。虽然在反射波到时上有奇点，但这部分脉冲下的面积是很小的

我们这里将看到，在时间域的精确解通常不能表述为代数表示式，而是单一的有限积分。最近在地震学中，这些积分的运算是通过Cagniard 路径本身的有限元进行的。但对于许多有实际意义的三维问题，可以求出解的适当近似形式[参看(6.94)、(6.95)]，其中的积分很容易计算，因为它们是褶积。

我们还是从简单的 SH 问题开始，用两种坐标，即笛卡尔坐标(x,y,z)和有关的柱坐标 (r,ϕ,z)。假定无限弹性介质中的点源是位于原点的点扭力矩，使体力为

$$\boldsymbol{f}=\nabla\times(0,0,X), \tag{6.72}$$

其中体力势X为轴对称，于是$X=X(r,z,t)$与 ϕ 无关。该源只激发位移 $\boldsymbol{u}$ 的方位分量，这个分量与 ϕ 无关。所以，在柱坐标中

$$\boldsymbol{u}=\nabla\times(0,0,\chi)=(0,-\partial\chi/\partial r,0), \tag{6.73}$$

而运动方程简化为

$$\rho\ddot{\chi}=X+\mu\nabla^2\chi. \tag{6.74}$$

对于在原点的点源，用阶梯状时间函数，有

$$X=N_0H(t)\delta(x)\delta(y)\delta(z)=N_0H(t)\frac{\delta(r)}{2\pi r}\delta(z) \tag{6.75}$$

N_0为一常数，并根据(4.4)，显然 SH 势 χ 的解精确地等于

$$\chi(x,y,z,t)=\frac{N_0}{4\pi\rho\beta^2}\frac{H(t-R/\beta)}{R}, \tag{6.76}$$

其中用到 $R=|\boldsymbol{x}|$。

现在让我们用三维问题的Cagniard-De Hoop 方法再次推导这个结果。

我们从取三重变换

$$\int_{-\infty}^{\infty}\exp(-ik_x x)\,dx\int_{-\infty}^{\infty}\exp(-ik_y y)\,dy\int_{0}^{\infty}\exp(-st)\,dt$$

入手，对(6.74)和(6.75)进行运算：

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2}\chi(k_x,k_y,z,s)=-\frac{N_0}{\rho\beta^2 s}\delta(z)+n^2\chi(k_x,k_y,z,s),$$

式中 $n^2=k_x^2+k_y^2+s^2/\beta^2$。与(6.43)和(6.44)比较后，得到

$$\chi(k_x,k_y,z,s)=\frac{N_0}{2\rho\beta^2 sn}e^{-n|z|},\qquad(6.77)$$

选取 $\mathrm{Re}n>0$。

我们想得到的解的 Laplace 变换，由(6.77) 的两个 Fourier 逆变换给出：

$$\chi(x,s)=\frac{N_0}{8\pi^2\rho\beta^2 s}\int_{-\infty}^{\infty}dk_x \times\int_{-\infty}^{\infty}dk_y\frac{\exp(ik_x x+ik_y y-n|z|)}{n},\qquad(6.78)$$

而我们的目的是，把这个公式重新整理为前向 Laplace 变换的形式，根据它，可把被积函数看作时间域中的 χ。

为此，我们用新变量(w,q)研究(k_x,k_y)平面，它们的定义是

$$k_x=s(w\cos\phi-q\sin\phi),\quad k_y=s(w\sin\phi+q\cos\phi)\qquad(6.79)$$

这是 De Hoop 变换(De Hoop,1960)；它包括方位坐标 ϕ,并且实际上由整个水平向波数平面的旋转和伸长构成。因为 $x=r\cos\phi$，$y=r\sin\phi$，而面积元 $dk_x dk_y$ 现在用 s^2dwdq 代替，我们由(6.78)得到

$$\chi(x,s)=\frac{N_0}{8\pi^2\rho\beta^2}\int_{-\infty}^{\infty}dw\int_{-\infty}^{\infty}dq\frac{\exp(iswr-s\eta|z|)}{\eta},\qquad(6.80)$$

式中 $\eta=(\beta^{-2}+q^2+w^2)^{\frac{1}{2}}$，$\mathrm{Re}\eta>0$。

把解(6.80)逆变换到时间域的一个标准方法，是把 q 积分转换到 w 积分的前向 Laplace 变换。这个方法在应用力学文献中常被采用，并被用于在我们第十五章所引用的解(参看方程(15.30)和(15.31)，其中取消了 q 和 w 的附加因子$\frac{1}{a}$,以使这些变量无量纲)。得到的解 $\chi(x,t)$是在 w 值的有限范围内的积分。

对(6.80)进行逆变换的另一方法，是利用同线源问题的相似性。为把(6.80)的被积函数变为与二维情况[例如，参看(6.46)]

相类似的形式，我们用 $p=-iw$ 改变 w 变量，给出

$$\chi(\boldsymbol{x},s)=\frac{N_0}{2\pi^2\rho\beta^2}\int_0^\infty dq$$

$$\times\mathrm{Im}\left[\int_0^{i\infty}\frac{\exp[-s(pr+\eta|z|)]}{\eta}dp\right], \tag{6.81}$$

式中 $\eta=(\beta^{-2}+q^2-p^2)^{\frac{1}{2}}$。[为从(6.80)得到(6.81)，我们用了积分限的一半和 q 的偶数性质；以及被积函数的实部和虚部对 w 的偶数性和奇数性。]

(6.47)与(6.81)被积函数间的相似，现在是很明显的。这里请注意，水平变量是 r 而不是 x，并且在 η 的定义中用$\frac{1}{\beta^2}+q^2$ 代替$\frac{1}{\beta^2}$。以前我们得出

$$\mathrm{Im}\left[\int_0^{i\infty}\frac{\exp[-s(px+\eta|z|)]}{\eta}dp\right]\quad(\eta=(\beta^{-2}-p^2)^{1/2})$$

是

$$\frac{H\left(t-\frac{(x^2+z^2)^{1/2}}{\beta}\right)}{\left(t^2-\frac{x^2+z^2}{\beta^2}\right)^{1/2}}$$

的 Laplace 变换，这使我们现在能把(6.81)写为

$$\chi(\boldsymbol{x},s)=\frac{N_0}{2\pi^2\rho\beta^2}\int_0^\infty dq$$

$$\times\int_0^\infty\frac{H[t-R(\beta^{-2}+q^2)^{1/2}]}{[t^2-R^2(\beta^{-2}+q^2)]^{1/2}}e^{-st}dt. \tag{6.82}$$

这里我们用 $R=(x^2+y^2+z^2)^{\frac{1}{2}}=(r^2+z^2)^{\frac{1}{2}}$作为三维距离函数。剩下的只是交换(6.82)中的积分顺序，给出

$$\chi(\boldsymbol{x},s)=\frac{N_0}{2\pi^2\rho\beta^2}\int_0^\infty dte^{-st}\left\{H\left(t-\frac{R}{\beta}\right)\right.$$

$$\left.\times\int_0^{(t^2/R^2-1/\beta^2)^{1/2}}\frac{dq}{[t^2-R^2(\beta^{-2}+q^2)]^{1/2}}\right\} \tag{6.83}$$

(参看图 6.20 的说明)，这时我们可以清楚地看出，所要求的解是

$$\chi(x,t)=\frac{N_0}{2\pi^2\rho\beta^2}H\left(t-\frac{R}{\beta}\right)$$
$$\times\int_0^{(t^2/R^2-1/\beta^2)^{1/2}}\frac{dq}{[t^2-R^2(\beta^{-2}+q^2)]^{1/2}} \tag{6.84}$$

这实质上是 De Hoop(1960)的方法，我们列出关于(6.84)的下述评注；

i) 解具有点源问题的典型形式，这种问题的精确解是个单一的有限积分。

ii) 在我们的特殊情况下，(6.84)中的积分很容易用解析法求值。代入 $q=(t^2/R^2-1/\beta^2)^{\frac{1}{2}}\sin\theta$ 立即给出积分等于 $\pi/(2R)$，重新得到解(6.76)。

iii) 回到(6.83)，我们得出 $\chi(x,s)=(N_0e^{-sR/\beta})/(4\pi\rho\beta^2 SR)$。对于一般的时间函数 $N_0(t)$，而不是我们直到现在一直假定的阶梯函数，有

$$\chi(x,s)=\frac{N_0(s)}{4\pi\rho\beta^2R}e^{-sR/\beta} \text{ 和 } \chi(x,t)=\frac{N_0(t-R/\beta)}{4\pi\rho\beta^2R}.$$

根据(6.73)，物理位移是

$$u_\phi=-\left[\frac{\partial}{\partial r}\frac{N_0(t-R/\beta)}{4\pi\rho\beta^2R}\right].$$

iv) 当存在分界面以及伴随的首波和界面波时，上述方法的变化只在于(6.82)的 t 积分比较复杂（仍可根据前面相应的二维问题的研究把它写出来)。

虽然上述解法是一种精彩和成功的方法，但它没有充分利用射线参数和复射线参数平面中积分的性质，这在 6.4 节中启发了我们的直觉。因此，现代对点源求解 Lamb 问题的方法，常常采用 Strick(1959)首创、而后由 Helmberger(1968)以及 Gilbert 和 Helmberger(1972)加以充实的方法，其中复射线参数平面仍起核

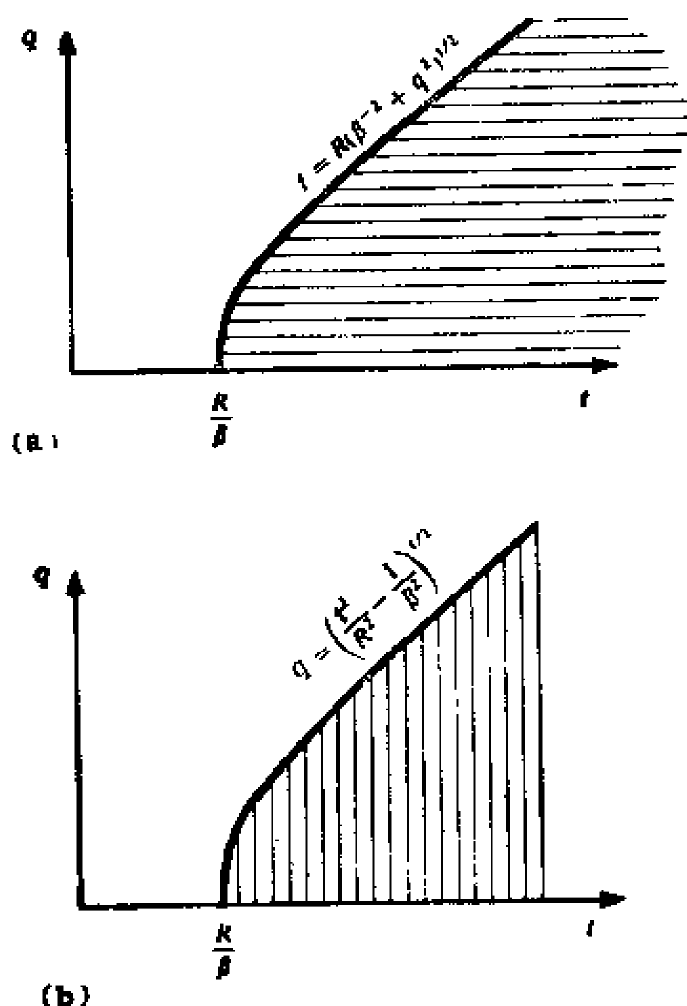


图 6.20

说明 t–q 平面中等效积分的示意图。(a) 先在固定的 q 进行 t 积分，如同在(6.82)中那样，以下限作为 q 的函数。(b) 先在固定的 t 进行 q 积分，如同在(6.83)中那样，以上限作为 t 的函数

心作用。这些方法要求熟悉 Hankel 变换以及有关的修正 Bessel 函数的结果，这在补充 6.10 中将予以详述。作为说明，我们还回到(6.74)—(6.75)问题，这次是用双重变换 $\int_0^\infty rI_0(\lambda r)dr \int_0^\infty e^{-st}dt$进行运算，以求解

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2}\chi(\lambda,z,s)=\frac{-N_0}{2\pi\rho\beta^2 s}\delta(z)+\left(\frac{s^2}{\beta^2}-\lambda^2\right)\chi(\lambda,z,s).$$

因此，双重变换的解是(比较(6.44)和(6.43))

$$\chi(\lambda,z,s)=\frac{N_0}{4\pi\rho\beta^2 s^2\eta}e^{-s\eta|z|} \tag{6.85}$$

式中 $\eta=\left(\frac{1}{\beta^2}-\frac{\lambda^2}{s^2}\right)^{\frac{1}{2}}$，$\mathrm{Re}\eta>0$。利用$\lambda=sp$(我们已经以某种形式做过多次因子化)和逆变换(补充 6.10 的方程(4))，我们看到

$$\chi(r,z,s)=\frac{N_0}{4\pi^2\rho\beta^2 i}\int_{-i\infty}^{i\infty}\frac{p}{\eta}K_0(spr)e^{-s\eta|z|}\,dp, \tag{6.86}$$

式中 $\eta=(\beta^{-2}-p^2)^{\frac{1}{2}}$，而 s,r,η 都是正实数。

补充 6.10

相对于竖直轴对称的函数的水平向变换

设有一个函数 $f=f(x,y)$，其中的变量实际上只依赖于$(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}=r$，这时

$$f(k_x,k_y)=\iint_{-\infty}^{\infty}f(x,y)\exp[-i(k_x x+k_y y)]dxdy.$$

现在引入 k_r 和 ϕ'，就象我们在(6.5)中为展开 Sommerfeld 积分所做过的那样。采用曾导致(6.7)的方法，我们现在得到

$$f(k_x,k_y)=2\pi\int_0^{\infty}rf(r)J_0(k_r r)dr,$$

这仅仅是 k_r 的、而不是 ϕ'的函数。方便的是利用 $f(r)=f(x,y)$，而不是 $f(k_r)=f(k_x,k_y)/2\pi$。这时，由上面的和类似的逆变换处理，我们得到

$$\left.\begin{aligned}f(k_r)&=\int_0^{\infty}rf(r)J_0(k_r r)dr\\ f(r)&=\int_0^{\infty}k_r f(k_r)J_0(k_r r)dk_r\end{aligned}\right\} \tag{1}$$

这是零阶 Hankel 变换对。用归纳法，得到 n 阶 Hankel 变换对：

$$\left.\begin{aligned}f^{(n)}(k_r)&=\int_0^{\infty}rf(r)J_n(k_r r)dr\\ f(r)&=\int_0^{\infty}k_r f^{(n)}(k_r)J_n(k_r r)dk_r\end{aligned}\right\} \tag{2}$$

(当必须强调变换中所用 Bessel 函数的阶时，使用上标(n)。)

在任一特定波动问题中选用的 Hankel 变换的阶，是要使在讨论

的波动方程中，对变量 r 进行的运算简化成变换域中的标量乘积。例如，(6.74)中的微商可写成

$$\rho\ddot{\chi}=X+\mu\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{r\partial\chi}{\partial r}\right)+\frac{\partial^2\chi}{\partial z^2}\right].$$

这里利用零阶 Hankel 变换是合适的，因为

$$\int_0^\infty r\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{r\partial\chi}{\partial r}\right)\right]J_0(k_r r)dr=-k_r^2\chi(k_r,z,t).$$

(这个等式是进行两次分部积分，然后利用 J_0 满足的微分方程得到的。)但是，$u_\phi=-\partial x/\partial x$ 满足的波动方程是

$$\rho\ddot{u}_\phi=f_\phi+\mu(\nabla^2\mathbf{u})_\phi=f_\phi+\mu\left(\nabla^2 u_\phi-\frac{u_\phi}{r^2}\right). \tag{3}$$

而这里附加的最后一项表明，零阶 Hankel 变换可能是不会成功的。倒是一阶变换把(3)中所有对 r 的运算都简化成 k_r 域中的标量乘积。对于点源在 $r=0$ 的 P-SV 问题，零阶变换的利用适合于 u_z 和 τ_{zz}；一阶变换适合于 u_r 和 τ_{zr}。根据在波数-频率域中处理波动的"补充"6.6，这些结果是显而易见的。

在用 Cagniard-De Hoop 方法求解二维问题时，我们早先用了水平向波数和射线参数间的关系 $k_x=isp$ [参看 (6.39)]。对于点源问题，这个关系显然变为 $k_r=isp$[请与 Fourier 时间变换的 (6.8)比较]，因此，对于纯虚 k_r 值，审查(2)将是重要的。我们若用 $k_r=i\lambda$ 这时(2)可写为

$$\left.\begin{aligned}f^{(n)}(\lambda)&=\int_0^{i\infty}rf(r)I_n(\lambda r)dr,\\ f(r)&=\frac{1}{\pi i}\int_{-i\infty}^{i\infty}\lambda f^{(n)}(\lambda)K_n(\lambda r)d\lambda,\end{aligned}\right\} \tag{4}$$

这里的 I_n 和 K_n 是修正 Bessel 函数。变换对(4) 与 (2) 的关系，同 Laplace 变换与 Fourier 变换的关系相同。

注意到 $K_0(\zeta^*)=[K_0(\zeta)]^*$，我们可以看到(6.86)给出

$$\chi(\mathbf{x},s)=\frac{N_0}{2\pi^2\rho\beta^2}\mathrm{Im}\left\{\int_0^{i\infty}\frac{p}{\eta}K_0(spr)e^{-s\eta|z|}dp\right\} \tag{6.87}$$

考虑到对于大自变量的渐近结果

$$K_0(spr)=\left(\frac{\pi}{2spr}\right)^{1/2}e^{-spr}\left(1+O\left(\frac{1}{spr}\right)\right), \tag{6.88}$$

所以(6.87)与线源公式(6.47)十分相似。两个被积函数都涉及到复射线参数平面，但现在 τ 代替 x 作为水平变量。我们定义

$$\tau = pr + \eta|z|,$$

然后对第一象限中的 Cagniard 路径$p=p(\tau)$求解(参看图 6.21)。把(6.87)中的积分路径变形到 Cagniard 路径，给出

$$\chi(x,s) = \frac{N_0}{2\pi^2\rho\beta^2}\mathrm{Im}\int_{p(\tau)} \frac{p}{\eta}K_0(spr)e^{-s\eta|z|}dp, \quad (6.89)$$

最后，我们能够反演到时间域。

根据数学用表，我们知道 $K_0(s\sigma_1)$是

$$H(t-\sigma_1)(t^2-\sigma_1^2)^{-1/2}$$

的 Laplace 变换，因而 $K_0(s\sigma_1)e^{-s\sigma_2}$是

$$H(t-\sigma_1-\sigma_2)[(t-\sigma_2)^2-\sigma_1^2]^{-1/2}$$

的 Laplace 变换。所以，(6.89)意味着

$$\chi(x,t) = \frac{N_0}{2\pi^2\rho\beta^2}\mathrm{Im}\int_{p(\tau)}\frac{p}{\eta}\frac{H(t-pr-\eta|z|)}{[(t-\eta|z|)^2-p^2r^2]^{1/2}}dp. \quad (6.90)$$

对这个积分的贡献只来自值 $R/\beta<\tau<t$(在下限被积函数开始有虚部；上限是阶梯函数所需要的截止值)，所以

$$\chi(x,t) = \frac{N_0}{2\pi^2\rho\beta^2}\mathrm{Im}\int_{R/\beta}^{t}\frac{p}{\eta}\frac{1}{(t-\tau)^{1/2}(t-\tau+2pr)^{1/2}}\frac{dp}{d\tau}d\tau, \quad (6.91)$$

其中

$$p=p(\tau)=\frac{r\tau+i|z|(\tau^2-R^2/\beta^2)^{1/2}}{R^2},$$

$$\frac{dp}{d\tau}=\frac{i\eta}{(\tau^2-R^2/\beta^2)^{1/2}} \text{以及 } \eta=\left(\frac{1}{\beta^2}-p^2\right)^{1/2} \text{且 } \mathrm{Re}\eta>0$$

虽然(6.91)中的积分不是明显地有虚部$\frac{\pi}{2R}$，但是在考虑了上下两极限处的可积奇点以后进行数字求解，这个积分是简单

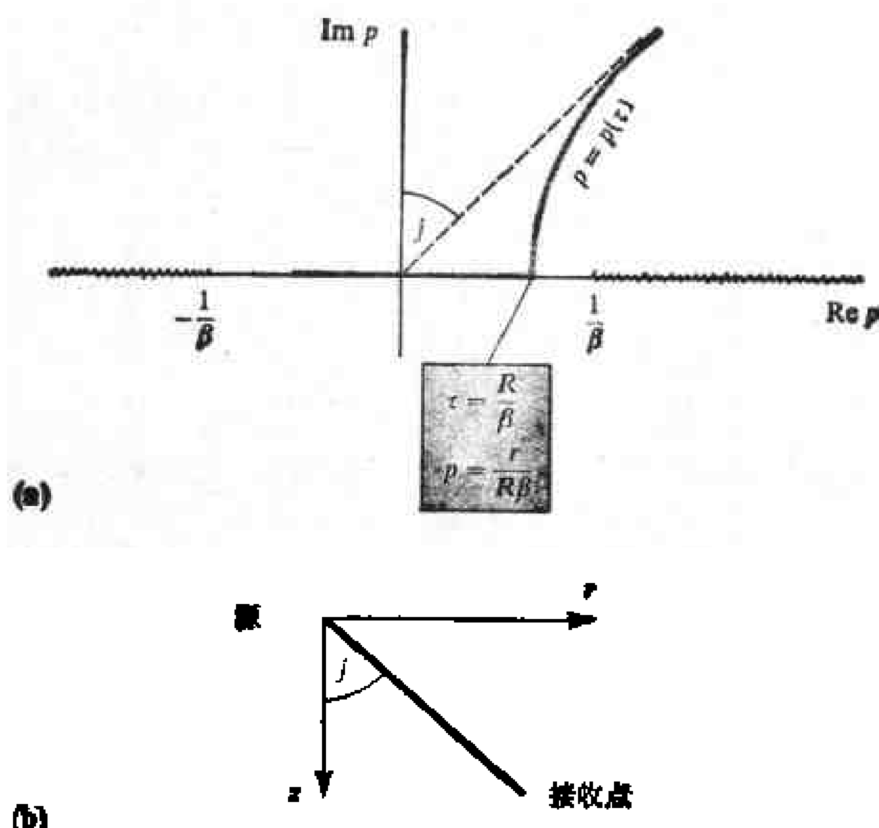


图 6.21

复射线参数平面和求(6.89)—(6.91)值的特征。请注意与图 6.14 相似

的。

一旦掌握了(6.91)的推导，实际 Cagniard-De Hoop 应用的几乎所有特征相对来说都很简单。因此，假定两个半空间沿 $z=0$ 密接，如同图 6.15 所示，SH 波的点源作用于上部介质中的 $z_0<0$。上部介质中的 SH 势正是入射波

$$\chi^{入}(x,t)=\frac{N_0}{4\pi\rho_1\beta_1^2}\frac{H(t-R/\beta_1)}{R},$$

其中利用了 $R=[r^2+(z-z_0)^2]^{\frac{1}{2}}$[见(6.76)]以及广义的反射势。根据同线源问题的类似性和(6.91)，反射精确地等于

$$\chi^{反}(x,t)=\frac{N_0}{2\pi^2\rho_1\beta_1^2}\operatorname{Im}\int_0^t\frac{p}{\eta_1}\left[\frac{\mu_1\eta_1-\mu_2\eta_2}{\mu_1\eta_1+\mu_2\eta_2}\right]$$

$$\frac{1}{(t-\tau)^{1/2}(t-\tau+2\,p r)^{1/2}}\frac{dp}{d\tau}d\tau, \qquad (6.92)$$

其中 $p(\tau)$ 由(6.56)给定，但现在当然用 r 代替 x，用 τ 代替 t。(6.92)中的积分向下延伸到零，以便获得在 $\beta_2>\beta_1$ 情况下的可能首波。

在推导(6.92)时我们没有做近似，但对于许多实际用途，可以做重要的近似，使花在计算上的力气大大减少而又基本不牺牲精度。因此，假定在整个积分区间上 $|pr|\gg t-\tau$，这时我们可以做以下近似：

$$(t-\tau+2\,pr)^{1/2}\sim(2\,pr)^{1/2}, \qquad (6.93)$$

并把(6.91)和(6.92)看作一个时间函数同 $1/t^{\frac{1}{2}}$ 的褶积。就是说，如果对于(6.92)我们希望计算整个间隔 $0\leqslant t\leqslant T$ 的 $\chi^{反}$，我们首先计算 $0\leqslant t\leqslant T$ 中的函数

$$\psi(t)=\frac{1}{2\,\pi^2\rho_1\beta_1^2}\mathrm{Im}\left\{\frac{p(t)}{\eta_1}\left[\frac{\mu_1\eta_1-\mu_2\eta_2}{\mu_1\eta_1+\mu_2\eta_2}\right]\frac{1}{(2\,pr)^{1/2}}\frac{dp}{dt}\right\}. \qquad (6.94)$$

则

$$\chi(x,t)=N_0\int_0^t\frac{\psi(\tau)}{(t-\tau)^{1/2}}d\tau=N_0\psi(t)*\frac{1}{t^{1/2}}, \qquad (6.95)$$

而 $0\leqslant t\leqslant T$ 的理论地震图可以用仅仅一个褶积运算做出来——这在许多计算机上处理起来都是非常简单有效而迅速的。相比之下，精确结果(6.92)则要求，对所描述时间序列中的每个单一点，都得有不同的数字积分。

注意，(6.93)的近似对大距离是好的，但即使这样，对于足够长的时间也失效。它等效于用 $[\pi/(2\,spr)]^{\frac{1}{2}}e^{-spr}$ 代替(6.87)中的 $K_0(spr)$，因而这个近似与我们在6.2节(6.17)中对于在频率域讨论的点源问题所做的近似是一样的。更多的项可以用对 K_0 的展开来保存，它们等效于通过二项式展开

$$\frac{1}{(2pr)^{1/2}}\left[1-\frac{t-\tau}{4pr}+\frac{3}{32}\left(\frac{t-\tau}{pr}\right)^2+\cdots\right]$$

而取$(t-\tau+2pr)^{-\frac{1}{2}}$的近似。只要$|2pr|>t-\tau$，就可以预期这些更多的项会改善精度，虽然不值得花这种力气，由于它们只通过$(t-\tau)^n$类型的因子而依赖于t，所以它们也给出简单的褶积(Helmberger and Harkrider, 1978)。

解(6.91)和(6.93)是针对力作为时间的阶梯函数情况的。其它的时间函数显然可以由褶积得到，但有一个时间函数从效果上"消除掉"褶积(6.95)。例如，假定

$$X(r,z,t)=N_0(t)\frac{\delta(r)}{2\pi r}\delta(z)\text{ 且 }N_0(t)=\frac{\mathrm{H}(t)}{\pi t^{1/2}}.$$

这时它是证明

$$X(x,t)=\frac{d\Psi}{dt}*\frac{1}{t^{1/2}}*\frac{1}{\pi t^{1/2}}=\Psi(t)$$

的一个基本褶积练习，在这个意义上，我们实际上可以得到(6.94)所给地震图的一个有用代数表达式。

近似式(6.93)和导出的褶积(6.95)，目前是现代地震学中非常重要的一部分。在第九章考虑多层效应时，我们将看到这一点。

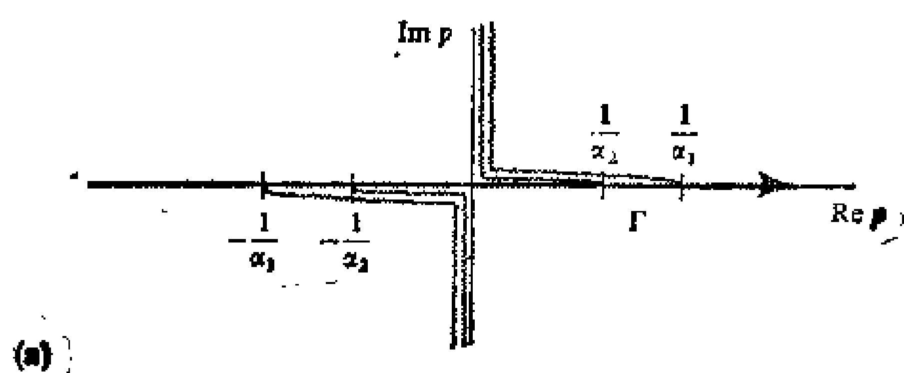
6.6 主要结果的概括及不同方法的比较

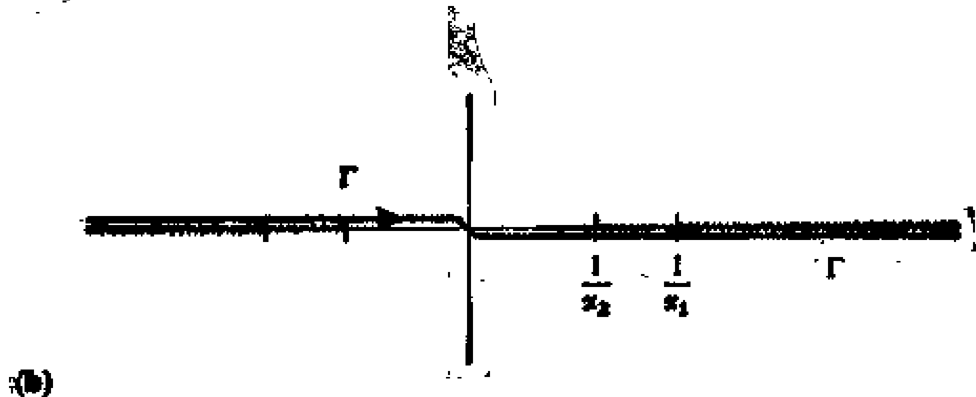
我们已描述了两种求解与平界面相互作用的球面波问题的方法。第一种方法(6.1—6.3节)利用时间依赖关系的 Fourier变换，并导致位移、压力等等作为频率的函数的解。第二种方法(6.4—6.5节)利用 Laplace 变换，但(应归功于 Cagniard, De Hoop 以及其他人的处理技巧)导致直接在时间域里的解。在本节我们列出两种方法间的某些相似点和不同点，并讨论它们的长处与短处，以便于使用者决定哪种方法对于某一特定的应用来说更好些。

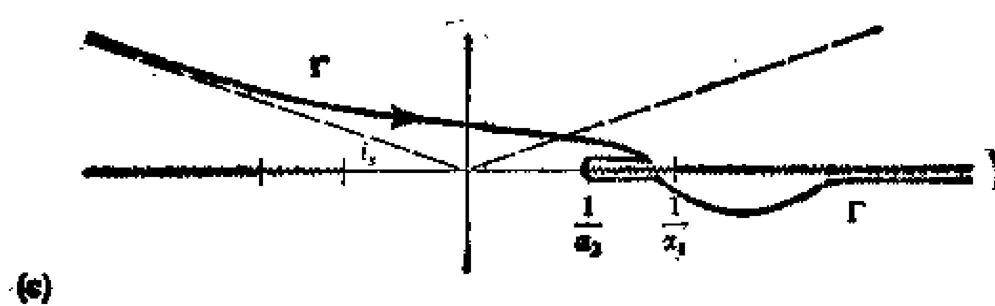
首先，我们列出相似点。Fourier 方法和 Cagniard 方法都需要在复射线参数平面中进行积分：物理问题中的射线路径对应于所考虑的被积函数中的鞍点；首波对应于分支切割；界面波（例如 Rayleigh 波，Stoneley 波)对应于极点；漏能模式(例如 $\hat{P}$)对应于 Riemann 叶上除满足辐射条件以外的极点。

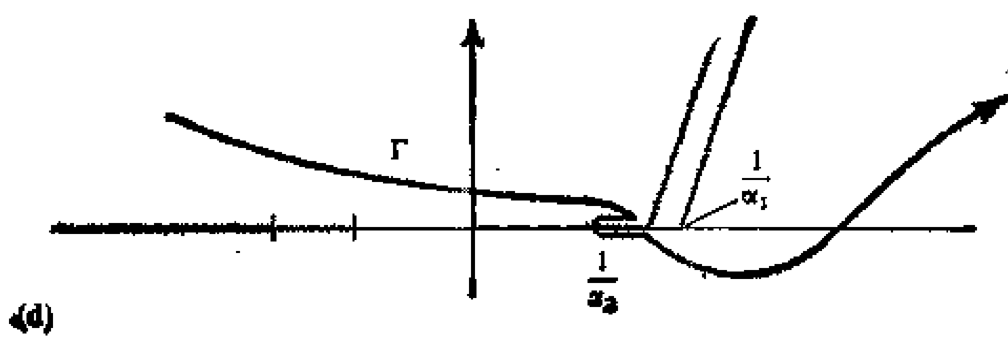
其次，有若干表面上的差别。例如，(i)为了通过 Fourier 方法得到时间域中的结果，需要数值逆变换。但实际上，Cagniard 解必须与源函数以及与仪器响应进行褶积，而这些运算，实质上等效于数值的 Fourier 变换。(ii)Cagniard 方法的特点是精确，而在发展 Fourier 方法的早期，我们对某些 Hankel 函数作了一个近似[参看(6.15)—(6.17)]。实际上，在 Cagniard 方法中常常作相同的近似(6.93)。(iii)在 Cagniard 方法中选用分支切割，以使$\{\mathrm{Re}\xi\geqslant0;\ \mathrm{Re}\eta\geqslant0\}$，并发现有可能把积分路径保持在同一物理 Riemann 叶上，而不必穿过分支切割。但是，我们发展了具有用$\{\mathrm{Im}\xi\geqslant0;\ \mathrm{Im}\eta\geqslant0\}$固定住的分支切割的 Fourier 理论，在这种情况下，我们看到必须发展复杂的其一些线段在非物理叶上的积分路径(例如图 6.9)。许多作者采用这个方法(例如，Lapwood，1949；Berry cmd West，1966)，并且漏能模式效应的正确讨论可以变得非常复杂。幸好，在 Fourier 方法中，分支切割的选取是非常灵活的，事实上可以选积分路径正好靠近最速下降路径而还仍在同一 Riemann 叶上。主要约束，即辐射条件，要求只对于原来积分路径上的 p 值，当$|z|\to\infty$时，被积函数[如(6.32)]趋于零。所以，在(6.32)中，我们只对实 p 轴上的 p 值，才真地要求 $\mathrm{Im}\xi\geqslant0$，无须利用在整个平面上满足 $\mathrm{Im}\xi\geqslant0$ 的分支切割。图 6.22 表示出分支切割的某些不同选择，这使得能够选取对于 Fourier 方法的数值应用比较有成效的积分路径。

最后，我们指出两种方法间的一些差别，以便说明每种方法对于某种情况的适用性。例如，(i)Cagniard 路径必须对于每条广义射线都精确求出，但 Fourier 方法中的积分路径只需近似地


Im p
1/α₂
1/α₁
Re p
Γ
−1/α₁
−1/α₂
(a)


Γ
1/α₂
1/α₁
Γ
(b)


Γ
1/α₂
1/α₁
Γ
(c)


Γ
1/α₁
1/α₂
(d)

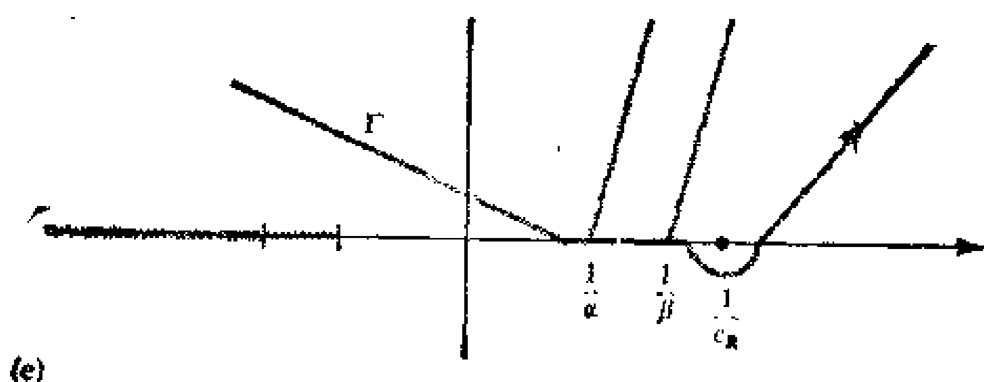


图 6.22

复 p 平面中各种各样的分支切割和积分路径，它表明了选取的灵活性。(a)—(d)是和 6.2 节中在两个液体半空间组成的介质中对压力点源所解得的问题有关的。(a)分支切割的选择要使整个平面上 $\mathrm{Im}\xi_1>0$，$\mathrm{Im}\xi_2>0$。Γ 位于实轴上，恰在第三象限的切割之上和在第一象限的切割之下。请和图 6.4 对比。(b)对同样的问题，我们已将分支切割变成 $\mathrm{Re}\xi_1>0$，$\mathrm{Re}\xi_2>0$。因为相对于(a)中的 Γ 是不变的同时 Γ 上任一点的积分值[即(6.17)]也是不变的，所以解不变，(c) Γ 从(b)所示的位置变到位于最速下降路径上，在此情况下首波可能出现。尽管仍存在着最速下降路径在 $P=1/(\alpha_1\sin i_c)$ 和切割相遇的问题，但现在围绕切割的路径比起图 6.9 所示的则简单得多，因而接在切割之下画出 Γ。(d) 对于如这里所示的那些切割，保持 Γ 处处在最速下降路径上(除在 $p=1/\alpha_2$ 的分支点周围)是不困难的。可见，这些切割是可能的，请注意，Γ 被从实轴上变形之前，这些切割能够被从(a) 中所示的位置移开。在 Γ 随后变形到这里所示的路径上时，在第一象限所示这些切割的左边，$\mathrm{Im}\xi_1$ 和 $\mathrm{Im}\xi_2$ 确实变成负的。这是容许的，因为在这一段 Γ 和 $\mathrm{Im}\xi_1$ 与 $\mathrm{Im}\xi_2$ 为正的路径(表示成断续线)之间没有奇点出现。(e) 对一固定半空间问题也就是对估算广义的 $\acute{P}\grave{P}$ 反射(为对比请看图 6.2)时，此图示出其 p 平面。分支切割向上进入第一象限，便于计算的路径 Γ 是由直线段和围绕 $p=1/C_R$ 的一个半圆组成。这种类型的分支切割具有类似于第九章中考虑了地球的球形几何条件而合成理论地震图时所得之各极点连线的性质。

跟随最速下降路径：如我们将在第九章看到的，两三条直线段常常就足够了。当对于大量震源深度或震源至接收点距离，需要理论地震图时，两种方法之间的这个差别特别重要。这时，在 Fourier 方法中，只改变一个因子(例如 $e^{i\omega p r}$，来考虑不同的变程)，

同一个积分路径就可以使用好几次，来做出不同的地震图。我们描述过的各种 Cagniard 路径，通过求解二次方程已全部得到，但实际上，待解的方程常常是高阶的。例如，$\acute{S}\grave{P}$ 反射式(6.63)需要求解 $t=px+\eta z+\xi h$，它是 p 的二次方程。幸而，如 Helmberger(1968)所指出的，即使对于多层介质，也不难确定数值解。(ii)Cagniard 方法的成功，依赖于所求的解的 Laplace 变换的一定性质，即它可以写成 s 乘以 $\int_0^\infty g(t)e^{-st}dt$ 形式的因子[见(6.40)]。很遗憾，这个性质很容易遭到破坏。例如，若引进衰减，则如我们在第五章所看到的，体波速度变为频率的函数。响应的 Laplace 变换采取 $\int_0^\infty g(s,t)e^{-st}dt$ 形式，不可能分解出因子 g，以直接识别时间域的解。对于其弹性性质随深度连续变化但偶尔有间断面的介质，如同我们将在第九章看到的，出现同样的困难。

总之，对于求解具有点源或线源的 Lamb 问题，Cagniard-De Hoop 解有巨大的优点，这是显然的。直接得到脉冲响应而花在计算上的力气最小。Fourier 方法也有长处，在直接研究不同频率分量的行为时，给出某种补充的认识，在 Lamb 问题以外的应用中，比 Cagniard 方法灵活。

建议进一步阅读的文献

Brekhovskikh, L. M. *Waves in Layered Media*. New York: Academic Press, 1960.

Červený, V., and R. Ravindra. *Theory of Seismic Head Waves*. University of Toronto Press, 1971.

Chapman, C. H. Lamb's problem and comments on the paper 'On leaking modes' by Usha Gupta. *Pure and Applied Geophysics*, **94**, 233-247, 1972.

de Hoop, A. T. Modification of Cagniard's method for

solving seismic pulse problems. *Applied Science Research*, **B8**, 349-356, 1960.

Gilbert, F., and L. Knopoff. The directivity problem for a buried line source. *Geophysics*, **26**, 626-634, 1961.

Johnson, L. R. Green's function for Lamb's problem. *Geophysical Journal of the Royal Astronomical Society*, **37**, 99-131, 1974.

Lamb, H. On the propagation of tremors over the surface of an elastic solid. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London*, **A203**, 1-42, 1904.

Lapwood, E. R. The disturbance due to a line source in a semi-infinite elastic medium. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London*, **A242**, 63-100, 1949.

Pekeris, C. L. The seismic buried pulse. *Proceedings of the National Academy of Sciences*. **41**, 629-639, 1955.

问 题

6.1 当首波可以在解(6.92)中出现时，其到时为t_h，试证明(6.93)等效于要求

$$r/\beta_2 \gg t-t_h.$$

当$\beta_2<\beta_1$，试证明解(6.92)中的(6.93)等效于要求

$$\frac{r^2}{R_0\beta_1} \gg t-\frac{R_0}{\beta_1}.$$

上述关于褶积解(6.95)的应用的限制，也许乍一看使得(6.95)似乎不过是个波阵面近似(例如(6.21))。事实上，(6.95)比波阵面要有力得多。试扼要证明，通过考虑临界距离附近的地震图表达式，确系如此。在这个距离上，首波和广角反射叠加。

6.2 试用类似于第三章(3.8)的等效体力来证明，求(6.44)时所

用的 $\partial v/\partial z$ 的间断，在物理上是由应力的间断造成的。

6.3 试证明图 5.6 中 $\acute{P}\grave{P}$ 和 $\acute{S}\grave{S}$ 的过零交点，正好出现在使非物理 Riemann 叶上的 Rayleigh 函数为零的 p 值上。[图 5.6 中 $p=1/\alpha$ 附近的那个最右边的过零交点，可以影响在图 6.18 中求值的、在表达式(6.69)中包含的首波震相]。

6.4 试给出具有线源的经典 Lamb 问题的代数解。也就是，当一线源沿 y 轴作用于弹性半空间的表面，使得在自由表面 $z=0$ 上的原点($x=0$, $t=0$)存在一个向下作用的脉冲 I (每单位长度上)时，给出表面位移。试求 Rayleigh 波形状的简单近似。

6.5 在用势方法建立 P-SV 问题时看到，一般说 SV 位移用 $\nabla\times\nabla\times(0, 0, \Psi)$ 表示。参看补充 6.5。试将此与在 5.1节得到的结论相一致，在那里是用 $\nabla\times(0,\Psi,0)$表示平面波的 SV 位移。[利用这些波的综合，在具有与 y 坐标无关的场的所有问题中，$\nabla\times(0,\Psi,0)$ 都适合于 SV。]

6.6 在图 6.9 中，沿总路径 Γ(如图中所示)的积分结果，同利用路径 $A\to B\to C\to$(绕 $1/\alpha_2$)$\to F'\to$(鞍)$\to G\to H$ 有什么差别吗？(即略去 $F'\to D\to E\to F'$。)

6.7 试证明在(6.69)中得到的、并在图 6.19 中给予说明的运动 u_{SS}，随 $t\to\infty$而发散至无穷大。证明(不必展开全部代数运算的细节)这个行为被由质点运动的P波分量(广义的 $\acute{S}\grave{P}$)得到的类似发散表达式所抵消掉。

第七章　竖向非均匀介质中的面波

面波是沿平行于地球表面的方向传播的波。它们的振幅在深度上的分布是稳定的，不随水平位置而改变（除了用一个总的因子来描述其水平方向的扩展以外）。因此，面波的几何扩散效应比体波的小得多，体波的能量在沿水平方向以及向下至地球内部的竖直方向均有扩展。事实上，在世界标准地震台网(WWSSN)中长周期地震仪的地震图上，面波往往是记录的主要部分，而且地震谱的长周期部分中许多可靠的信息是由面波得到的。周期为10到200秒的长周期面波，对地球结构和震源机制的研究一直是宝贵的信息来源。它们的相速度、群速度和衰减特性对描绘地球上不同地区的地壳和上地幔结构是有用的。它们的震源谱和辐射图案对测定远震的地震矩、震源机制和震源深度是不可少的。对于识别地震和地下爆破，它们也提供了决定性的资料。

本章的主要目的是描述以自由表面为边界的竖向非均匀介质中面波的基本性质并导出任意点源的面波振幅谱和相位谱的公式。在最后一节中，为完善最常用的方法，我们将把整个波动场表示成各个简正振型与漏能模式之和。

7.1　面波的基本性质

令 z 轴垂直，向下取为正方向。前述竖向非均匀介质则处于 $z>0$ 的下半空间。如5.1节和5.2节所见，空间坐标与时间的关系可由分离变量法表示的那些波是值得考虑的。从最简单的问题入手，我们将考虑在笛卡尔坐标中，频率为 ω，沿 x 增加的水

平方向传播的面波：

$$u(x,y,z,t)=Z(z)\exp[i(kx-\omega t)]. \tag{7.1}$$

这个方程的全部重要结果是，在波动方程和边界条件中仅保留了对 z 求导数，并且求解这样一个一维问题是相当简单的。

补充 7.1

初始假定

当我们开始讨论面波时，应当注意到在这第一个方程（7.1）上附有双重意义。在正文中，这个基本的波是以具有固定的水平波数（为简化，我们将用 k 表示，面前几章中曾用 k_x 或 k_r 表示）的稳态波而引入。这给出了关于波的一个清楚的物理图象，显然，

$$\frac{\partial}{\partial t}u(x,z,t)=-i\omega u(x,z,t),$$

$$\frac{\partial}{\partial x}u(x,z,t)=iku(x,z,t).$$

然而，地震学中的面波实际上是这些基本的波的合成。在这个意义上，我们把位移场作为 (k,z,w) 的函数是恰当的，此位移场是不可分离的面波 $u(x,t)$ 的双重 Fourier 变换（对 x 和 t）。由于这个原因，$\partial u(x,t)/\partial t$ 和 $\partial u(x,t)/\partial x$ 的双重变换分别为 $-i\omega u(k,z,\omega)$ 和 $+iku(k,z,\omega)$。用两种虽不相同但却有关的方法，则我们可把偏导数（对 x 和 t）化为标量乘法。

事实上，现在的问题是在三个一般条件下求解（7.1）。这些波必须满足 $z=0$ 处的自由表面条件，即牵引力为 0。在 $z=\infty$ 的另一边界处，其振幅必须为 0，因为在无穷远处没有能量供应。当然，除此以外它们还必须满足运动方程。在这些约束条件下，（7.1）形式的有意义的解不能对任一频率 ω 和任一波数 k 存在。然而，对一给定的 ω，若 k 取一稳定值，比如 $k_n(\omega)$，有意义的解则可能存在。这是一个本征值的问题，因为可能常常会遇到，对某一给定的 ω，有不止一个 k 值将保持面波（7.1）成立，所以我们标以脚标 n。这里 $k_n(\omega)$ 是一个本征值，且相应的解

$u_n(z)$是一本征函数。因此，对一给定的频率 ω，面波(如果存在的话)则由波数 $k_0(\omega)$，$k_1(\omega)$，$k_2(\omega)\cdots$单值地确定。换句话说，对一给定的频率，相速度 $c_n=\omega/k_n$ 是不变的。和 z 的相关性也是与水平位置无关的。

为说明这些概念，我们首先来考察在一均匀半空间上置一均匀层时平面 Love 波的最简单情况（图 7.1)。将层和半空间的刚性记作 μ_1，μ_2，其密度分别记作 ρ_1，ρ_2，则位移（v）的 y 分量满足波动方程

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}=\frac{\mu_1}{\rho_1}\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}\right) \quad \text{在层内 } 0<z<H$$

和

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}=\frac{\mu^2}{\rho_2}\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}\right) \quad \text{在半空间内 } z>H.$$

用(7.1)形式的尝试解，我们得到

$$v=[\grave{S}_1 e^{-\nu_1 z}+\acute{S}_1 e^{\nu_1 z}]\exp[i(kx-\omega t)] \quad 0\leqslant z\leqslant H$$

和

$$v=[\grave{S}_2 e^{-\nu_2 z}+\acute{S}_2 e^{\nu_2 z}]\exp[i(kx-\omega t)] \quad H\leqslant z, \qquad (7.2)$$

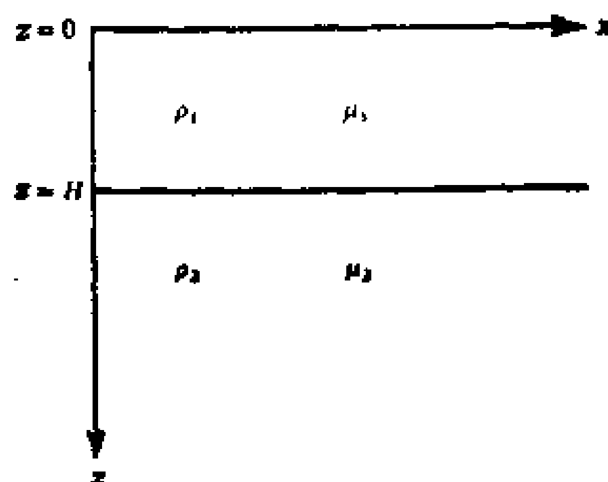


图 7.1

在一均匀半空间上置一均匀层，在这种最简单的介质情况中可产生 Love 波

其中

$$\nu_i=(k^2-\omega^2/\beta_i^2)^{1/2},\ \mathrm{Re}\nu_i\geqslant 0 \text{ 和 } \beta_i=(\mu_i/\rho_i)^{1/2},$$

这里 $i=1$ 和 2。于是 $\mathrm{Im}\,\nu_i\leqslant 0$[参考(6.4)中 γ 的性质]。$\grave{S}_1$, $\acute{S}_1$, $\grave{S}_2$ 和 $\acute{S}_2$ 是些目前还不知道的常数。

我们假定层内的速度 β_1 低于半空间中的速度 β_2。从 $z\to\infty$ 的边界条件，我们知道（如果波是均匀的，即如果 ν_2 是负虚数）不可能有上来的波。所以 $\acute{S}_2=0$，另外，如果 ν_2 是正实数，也正是这个波必须为零，以免其随深度而指数上升。（对 ν_1 和 ν_2，其根的符号给出了垂直波数 $i\nu_1$ 和 $i\nu_2$ 的性质，它有实部和虚部且或为正或为零。）如在 $z=0$ 处，$\partial v/\partial z=0$，由于自由表面条件必须满足，则 $\grave{S}_1=\acute{S}_1$。于是我们只剩下两个未知数 $\grave{S}_1$ 和 $\grave{S}_2$，它们必须满足穿过 $z=H$ 时位移和牵引力连续所必需的下列方程：

$$\begin{aligned}2\grave{S}_1\cos(i\nu_1H)&=\grave{S}_2e^{-\nu_2H}\\ 2i\mu_1\nu_1\grave{S}_1\sin(i\nu_1H)&=\mu_2\nu_2\grave{S}_2e^{-\nu_2H}\end{aligned}\tag{7.3}$$

或

$$\frac{\grave{S}_2}{\grave{S}_1}=\frac{2\cos(i\nu_1H)}{e^{-\nu_2H}}=\frac{2i\mu_1\nu_1\sin(i\nu_1H)}{\mu_2\nu_2e^{-\nu_2H}}.\tag{7.4}$$

这给出了本征值 k_n 为 $F(k)=0$ 的解，这里

$$F(k)\equiv\tan(i\nu_1H)-\frac{\mu_2\nu_2}{i\mu_1\nu_1},\tag{7.5}$$

或相速度 $c_n=\omega/k_n$ 为下式的解：

$$\tan\omega H\left(\frac{1}{\beta_1^2}-\frac{1}{c^2}\right)^{1/2}=\frac{\mu_2}{\mu_1}\frac{\left(\dfrac{1}{c^2}-\dfrac{1}{\beta_2^2}\right)^{1/2}}{\left(\dfrac{1}{\beta_1^2}-\dfrac{1}{c^2}\right)^{1/2}}.\tag{7.6}$$

将(7.4)，$\acute{S}_1=\grave{S}_1$ 和 $\acute{S}_2=0$ 代入(7.2)得到相应的本征函数 v_n：

$$v_n(x,z,t)=2\grave{S}_1\cos\left[\omega\left(\frac{1}{\beta_1^2}-\frac{1}{c_n^2}\right)^{1/2}z\right]$$

$$\times \exp[i(k_n x-\omega t)] \qquad 对\ 0 \leqslant z \leqslant H$$

$$=2\hat{S}_1 \cos\left[\omega\left(\frac{1}{\beta_2}-\frac{1}{c_n^2}\right)^{1/2} H\right] \exp\left[-\omega\left(\frac{1}{c_n^2}-\frac{1}{\beta_2^2}\right)^{1/2}(z-H)\right]$$

$$\times \exp[i(k_n x-\omega t)] \qquad 对\ H \leqslant z, \qquad (7.7)$$

这表明在层内为一正弦振动，而在半空间中是指数衰减的。

方程 (7.6) 可用图解以给出关于相速度的一个大致的概念。图 7.2 给出，方程(7.6)的右边以虚线表示，左边则以实线表示，两者均为 $(H/\beta_1)(1-\beta_1^2/c^2)^{1/2}$ 的函数。两种线的交点给出方程(7.6)的根。由此图显见，c 的实根限定在 β_1 和 β_2（我们假定 $\beta_1<\beta_2$）之间。我们求得，对一给定的频率 ω，仅有有限个实根。当 $\omega=0$ 时，仅有一个实根，这根是相应于正切曲线最左边一支的基频振型上的一个点。如果 ω 增加，标为 $n=1$ 的正切曲线便从右边进入此范围。当 π/ω 等于 $(H/\beta_1)(1-\beta_1^2/\beta_2^2)^{1/2}$时，此曲线便进入。如果我们进一步增大 ω，更多的正切曲线将从右边进入此范围内。当 ω 等于 ω_{cn} 时，即

$$\omega_{cn}=\frac{n\pi\beta_1}{H}\Big/\left(1-\frac{\beta_1^2}{\beta_2^2}\right)^{1/2}, \qquad (7.8)$$

则第 n 支曲线便进入此范围内，此频率 ω_{cn} 称为第 n 阶高阶振型的截止频率，因为如图 7.3 所示，n 阶振型仅当 $\omega>\omega_{cn}$ 时才存在。例如，在大陆的典型地壳-地幔结构的情况下，取 $H=35$ 公里，$\beta_1=3.5$ 公里/秒和 $\beta_2=4.5$ 公里/秒时，第一高阶振型的截止频率为 0.08 赫，或者说具有 13 秒的周期。

因此，在 $\omega=\omega_{cn}$ 时，n 阶高阶振型才出现，且频率高于 ω_{cn} 时此振型才存在。在截止频率处，所有的振型都有同样的 $c=\beta_2$ 的相速度。对所有的振型，当 $\omega\to\infty$ 时相速度接近于 β_1。因而，我们可以画出相速度曲线图，如图 7.3 所示。现在显然，对一给定的频率 ω，仅有有限个振型。一旦相速度确定，则相应于每一个振型的本征函数可由(7.7)求得。

不同振型的相对激发取决于震源深度和震源性质。例如，一

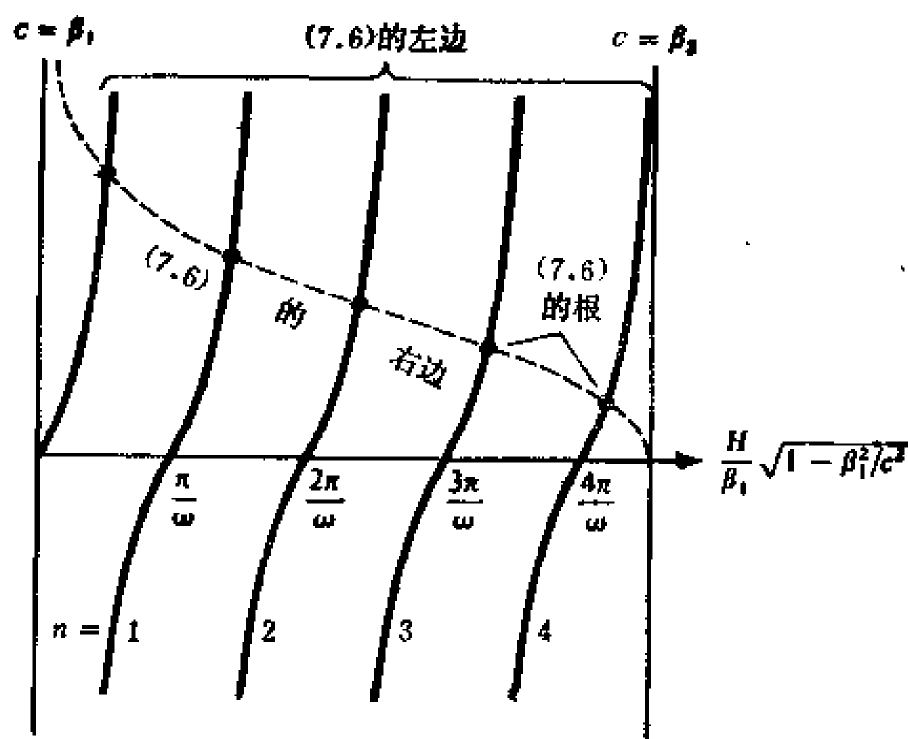


图 7.2

在半空间上置一单层，Love 波频散情况下方程(7.6)的图解

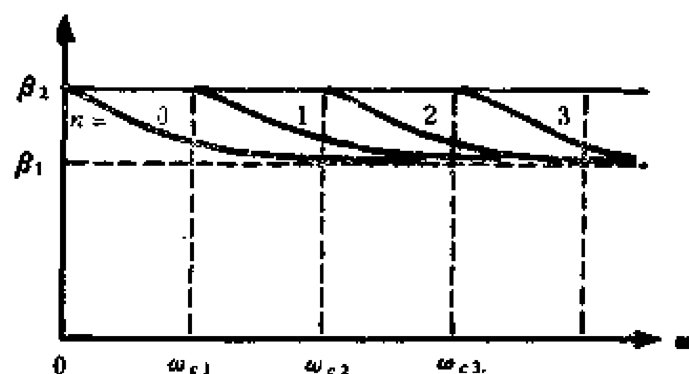


图 7.3

基频振型和紧邻的三个高阶振型其相速度随频率变化的示意图

般而言，对浅源地震的长周期波，基频振型是占优势的，此基频振型我们记作 $n=0$。将不同振型分开的方法之一是在远距离处记录，因为不同振型的波以不同的群速度传播，在远处它们是在不同的时间分别到达的。对一给定的频率 ω，其群速度就是围绕

频率 ω 的波包之包络被传送的速度。波包的峰、谷和零点是以相速度传播的，相速度一般是不同于群速度的。由于群速度是依附于波包的概念，波包具有连续谱而不是离散的线谱，其最好的解释是在一给定频率 ω_0 周围的有限频带上，通过对单个振型（具有单位振幅和零初始相位）的解求积分来构成瞬时波形。利用余弦变换得到

$$f_0(x,t)=\frac{1}{\pi}\int_{\omega_0-\frac{1}{2}\Delta\omega}^{\omega_0+\frac{1}{2}\Delta\omega}\cos[\omega t-k_n(\omega)x]\,d\omega. \qquad (7.9)$$

当 $\Delta\omega$ 很小时，我们可用 Taylor 级数展开 $k_n(\omega)$，

$$k_n(\omega)=k_n(\omega_0)+\left(\frac{dk_n}{d\omega}\right)_0(\omega-\omega_0)+\cdots. \qquad (7.10)$$

忽略$(\omega-\omega_0)$的高次项，将(7.10)代入(7.9)，得到

$$f_0(x,t)\sim\frac{\Delta\omega}{\pi}\frac{\sin Y}{Y}\cos[\omega_0 t-k_n(\omega_0)x], \qquad (7.11)$$

其中

$$Y=\frac{\Delta\omega}{2}\left[t-\left(\frac{dk_n}{d\omega}\right)_0 x\right].$$

上述波形是受包络 $\sin Y/Y$ 调制的、频率为 ω_0 的正弦振动。此包络在 $Y=0$ 或 $x=\left(\frac{d\omega}{dk_n}\right)_0 t$ 处有峰值。因此，我们知道，这个包络是以群速度$\left(\frac{d\omega}{dk_n}\right)_0$传播的，并且相位（余弦函数的峰、谷和零点）是以相速度 $\omega_0/k_n(\omega_0)$传播的。

由一单个振型组成的具有给定的谱密度 $|F(\omega)|$ 和初始相位 $\phi(\omega)$的波包可表示成

$$f(x,t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}|F(\omega)|\exp[-i\omega t+ik_n x+i\phi(\omega)]d\omega. \qquad (7.12)$$

这个积分可以这样计算，即把 ω 轴分成一些宽度为 $\Delta\omega_i$ 的连续段，然后对如(7.11)的近似解求和。从问题 7.8 可以得到对所有

段 $d|F(\omega)|/d\omega$ 的影响将如何考虑。

当面波无频散时，如半空间中的 Rayleigh 波，波形不随传播而改变，因为若 c_n 无频散，则

$$f(x,t)=\frac{1}{2\pi}\int F(\omega)\exp[-i\omega(t-x/c_n)]d\omega$$
$$=f(t-x/c_n). \tag{7.13}$$

当面波有强烈频散时，则可用稳相法近似估计此波形。类似于最速下降法，用稳相法求积分也利用了在其鞍点附近被积函数的特性。在最速下降法中，积分路径取相位恒定而其绝对值最急速变化的路径。在稳相法中其路径取沿 ω 的实轴，沿此路径相位 $(-\omega t+k_n x)$ 变化最快。于是，当 x 或 t 很大时，则被积函数很快地振荡，并对积分有自相抵消的效应。仅仅在鞍点上或鞍点附近，相位变化较慢，并对积分有明显的贡献。鞍点或稳相点由下式给出：

$$\frac{d}{d\omega}(-\omega t+k_n x)=0$$

或

$$\frac{x}{t}=\frac{d\omega}{dk_n}. \tag{7.14}$$

对一给定的距离 x 在时间 t 时，这个方程确定了预期占优势的频率 $\omega_s=\omega_s(x,t)$，且 ω_s 显然是群速度等于 x/t 时的频率。

在稳相点附近将相位展开成一个 Taylor 级数，并忽略那些量级高于 $(\omega-\omega_s)^2$ 的项，我们得到

$$-\omega t+k_n x\sim-\omega_s t+k_n(\omega_s)x+\frac{x}{2}\frac{d^2k_n}{d\omega^2}(\omega-\omega_s)^2. \tag{7.15}$$

当 x 较大时，ω 对 ω_s 的微小偏离都将使被积函数发生快速振荡，且导至自相抵消的效应。因而积分限将被扩展并超出 Taylor 展开的界限。这样，我们得到

$$f(x,t)=\frac{1}{2\pi}\exp[-i\omega_s t+ik_n(\omega_s)x]\,|F(\omega_s)|$$

$$\times\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left[\frac{x}{2}\,i\,\frac{d^2k_n}{d\omega^2}(\omega-\omega_s)^2\right]d\omega. \qquad (7.16)$$

由积分表给出

$$\int_0^{\infty}\sin\left(\frac{1}{2}\alpha\omega^2\right)d\omega=\int_0^{\infty}\cos\left(\frac{1}{2}\alpha\omega^2\right)d\omega=\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{\alpha}\right)^{1/2}, \qquad (7.17)$$

我们得到

$$f(x,t)=\frac{|F(\omega_s)|}{2\pi}\left\{\frac{2\pi}{x\left|\frac{d^2k_n}{d\omega^2}\right|}\right\}^{1/2}\exp\left[-i\omega_s t+ik_n(\omega_s)x\pm i\frac{\pi}{4}\right], \qquad (7.18)$$

其中±分别相应于$d^2k_n/d\omega^2\gtrless 0$。当$x$和$t$给定，$\omega_s$可由(7.14)解得。当相速度$c_n=\omega/k_n$和群速度$U_n=d\omega/dk_n$和$dU_n^{-1}/d\omega$已知时，前述公式即给出频散面波的波形。相位信号移动$\pi/4$(时间移动周期的1/8)，意味着当群速度随周期增大时有一个延迟。具有此频散性质的波其形象化的Fourier分析(如图7.4所示)给出了$f(x, t)$相对于Fourier分量的视相位延迟的直观的解释(Brune *et al*, 1960)。

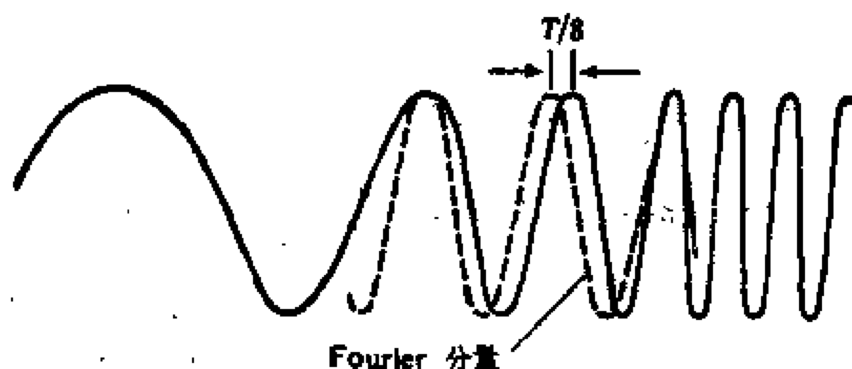


图 7.4

在一有频散的波列中，周期为T的波峰和相应的Fourier分量波峰之间的不重合性(差$T/8$)

若群速度对所考虑的频率是稳定的，(7.18)的分母变为零，则公式不再是有效的。在相位的 Taylor 展开式中包括高阶项在内，用 Airy 函数给出了一个结果（见 Savage，1969 b）。由于这一原因，和群速度极大值与极小值有关的到时，称为 Airy 震相。因为群速度的变化很慢并且该震相的整个持续时间很短，所以可对(7.12)直接进行数值积分。Airy 震相的测定也是很容易做的。

测定面波的相速度和群速度的各种方法将在第十一章中叙述。

7.2 位移-应力向量的本征值问题

现在让我们考虑竖向非均匀的、各向同性的弹性介质中的面波，这介质充满 $z>0$ 的半空间中，介质中的弹性常数 $\lambda(z)$，$\mu(z)$和密度 $\rho(z)$都是 z 的任意函数。本节将探讨在 x 方向传播的水平面波。随后将表明和由一个点扩展的柱面波一样，它们也具有同样的随 z 的变化关系。

在某些方面本节重复了前面 5.4 节讨论过的体波内容。然而，这里的符号大多适用于面波，其中在各种位移分量和应力分量间的 $\pi/2$ 相移可清楚地辨别出来。此外，由于频散，频率和水平波数 k 的关系这里是比较复杂的，所以留下 k 作为一个明显的符号并且不分解成 ω 乘以水平慢度。

对 Love 波，我们对运动方程(2.13) 求出下列形式的解：

$$
\begin{aligned}
u &= 0, \\
v &= l_1(k,\omega,z)\exp[i(kx-\omega t)], \qquad (7.19) \\
w &= 0
\end{aligned}
$$

和前述位移有关的应力分量为

$$\tau_{xx}=\tau_{yy}=\tau_{zz}=\tau_{xz}=0,$$

$$\tau_{yz}=\mu\frac{dl_1}{dz}\exp[i(kx-\omega t)],\tag{7.20}$$

$$\tau_{xy}=ik\mu l_1\exp[i(kx-\omega t)].$$

如果我们将(7.19)和(7.20)代入(2.13)， 我们得到对 $l_1(k, z, \omega)$的运动方程：

$$-\omega\rho(z)l_1=\frac{d}{dz}\left[\mu(z)\frac{dl_1}{dz}\right]-k^2\mu(z)l_1.\tag{7.21}$$

如上一节所述，这个 Love 波就是运动方程的一个解，并处处满足无源条件(无体力)。在 $z=0$ 的自由表面，牵引力还需为零并且在无限远处无源存在。除了这些条件外，位移和牵引力在弹性常数有突变式间断的任一内界面上必须是连续的，否则位移和牵引力的不连续性将相当于一个地震源(3.1 节)。 由于介质只在穿过水平平面时才产生不连续性， 所以对 Love 波要求应力分量 τ_{yz} 是连续的。 这里我们将导出一个新的函数以描述 τ_{yz} 和 z 的关系：

$$\tau_{yz}=l_2(k, z, \omega)\exp[i(kx-\omega l)].\tag{7.22}$$

于是(7.20)和(7.21)可改写成一组一阶常微分方程

$$\begin{aligned}\frac{dl_1}{dz}&=\frac{l_2}{\mu(z)},\\ \frac{dl_2}{dz}&=(k^2\mu(z)-\omega^2\rho(z))l_1,\end{aligned}\tag{7.23}$$

或写成矩阵形式

$$\frac{d}{dz}\begin{pmatrix}l_1\\ l_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & \mu(z)^{-1}\\ k^2\mu(z)-\omega^2\rho(z) & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}l_1\\ l_2\end{pmatrix}.\tag{7.24}$$

我们将称(l_1, l_2)为 Love 波的运动-应力向量，并注意(补充 7 1)，对沿 y 方向上一般的 SH 质点运动， 它也是(u_y, τ_{yz})对(x, t)的双重变换。

Rayleigh 波的运动-应力向量可用类似的方式得到。我们从

如下的位移形式开始：

$$
\begin{aligned}
u &= r_1(k,\ z,\ \omega)\exp[i(kx-\omega t)],\\
v &= 0,\\
w &= ir_2(k,\ z,\ \omega)\exp[i(kx-\omega t)]
\end{aligned}
\tag{7.25}
$$

（对正实数 r_1 和 r_2，上面的 u，w 的组合表示前进运动）。相应的应力分量由下式给出：

$$
\begin{aligned}
&\tau_{yz}=\tau_{xy}=0,\\
&\tau_{xx}=i\left[\lambda\frac{dr_2}{dz}+k(\lambda+2\mu)r_1\right]\exp[i(kx-\omega t)],\\
&\tau_{yy}=i\left(\lambda\frac{dr_2}{dz}+k\lambda r_1\right)\exp[i(kx-\omega t)],\\
&\tau_{zz}=i\left[(\lambda+2\mu)\frac{dr_2}{dz}+k\lambda r_1\right]\exp[i(kx-\omega t)],\\
&\tau_{zx}=\mu\left(\frac{dr_1}{dz}-kr_2\right)\exp[i(kx-\omega t)].
\end{aligned}
\tag{7.26}
$$

应力分量 τ_{zx} 和 τ_{zz} 对 z 是连续的。我们可将它写成

$$
\begin{aligned}
\tau_{zx}&=r_3(k,\ z,\ \omega)\exp[i(kx-\omega t)],\\
\tau_{zz}&=ir_4(k,\ z,\ \omega)\exp[i(kx-\omega t)].
\end{aligned}
\tag{7.27}
$$

于是从(7.26)和(2.13)可得到运动应力向量(r_1，r_2，r_3，r_4) 的微分方程为

$$
\frac{d}{dz}\begin{pmatrix} r_1\\ r_2\\ r_3\\ r_4\end{pmatrix}
=\begin{pmatrix}
0 & k & \mu^{-1}(z) & 0\\
-k\lambda(z)[\lambda(z)+2\mu(z)]^{-1} & 0 & 0 & [\lambda(z)+2\mu(z)]^{-1}\\
k^2\zeta(z)-\omega^2\rho(z) & 0 & 0 & k\lambda(z)[\lambda(z)+2\mu(z)]^{-1}\\
0 & -\omega^2\rho(z) & -k & 0
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix} r_1\\ r_2\\ r_3\\ r_4\end{pmatrix},
\tag{7.28}
$$

其中 $\zeta(z)=4\mu(z)[\lambda(z)+\mu(z)]/[\lambda(z)+2\mu(z)]$。(7.24) 和

(7.28)中的矩阵看起来很简单，实质上和5.4节中由均匀介质得到的相同。虽然 $\lambda(z)$，$\mu(z)$和 $\rho(z)$是 z 的函数，可它们显然不包含介质参量的空间梯度。

面波的边界条件——即在 $z=0$ 的自由表面上牵引力为0，在无限远处无运动——要求：

$$
\begin{aligned}
&\text{当 } z\to\infty \text{ 时} \quad r_1,\ r_2 \text{ 和 } l_1\to 0,\\
&\text{在自由表面}(z=z_0) \quad r_3=r_4=l_2=0.
\end{aligned}
\tag{7.29}
$$

对一给定的 ω，在(7.29)的条件下，仅对一定的 $k=k_n(\omega)$值，(7.24)或(7.28)的非零解才存在。和7.1节中讨论的半空间上置一单层的 Love 波形式完全相同，$\omega/k_n(\omega)$ 给出了相速度并且(7.24)或(7.28)的相应解给出了 z 和该振型的依赖关系

有很多方法可解这类本征值和本征向量的问题。我们将从数值积分法和传播矩阵法入手。用 Thomson-Haskell 法可得到明确的解，此法为传播矩阵法应用于半空间上叠置一均匀层时的特殊情况。

7.2.1 数值积分

运动-应力向量的本征值问题可以用 Runge-Kutta 的数值方法直接积分(7.24)和(7.28)解出。当和矩阵法比较时，竹内和斋藤(Takeuchi and Saito, 1972)认为数值法模拟地球较容易，因矩阵法中地球是以均匀的成层模型来近似的。

为说明如何用数值积分法去解本征值问题，首先我们假定在一较大的深度 Z_n 处位移有定值(即刚性边界条件)。在 Love 波的情况中，我们从 $Z=Z_n$ 向上开始求方程(7.24)的积分，其初始值为 $l_1(Z_n)=0$ 和 $l_2(Z_n)=1$。对给定的 ω，我们必须选择 k 的一个尝试值。

如果 k 是本征值，在 $z=z_0$ 处，积分的结果应给出 $l_2=0$。重复这过程以修正 k，直至 $l_2(z_0)$变为0为止。在 Rayleigh 波的情况下，用两组不同的初始值来积分方程(7.28)，第一组为 $r_1=$

$r_2=r_4=0$ 和 $r_3=1$；第二组为 $r_1=r_2=r_3=0$ 和 $r_4=1$。将第一组和第二组的解分别写成 $r^{(1)}$和 $r^{(2)}$，则(7.28)的通解可表示成

$$r=Ar^{(1)}+Br^{(2)}. \tag{7.30}$$

如果 r 是一本征向量，它的应力分量 $r_3(z_0)$和 $r_4(z_0)$ 必须为0，即

$$Ar_3^{(1)}(z_0)+Br_3^{(2)}(z_0)=0,$$
$$Ar_4^{(1)}(z_0)+Br_4^{(2)}(z_0)=0. \tag{7.31}$$

补充 7.2

Runge-Kutta 方法

让我们考虑用数值法来求解一阶常微分方程

$$\frac{dy}{dx}=f(x,\ y). \tag{1}$$

对 dy/dx 用前向差分公式(补充 13.2)，相应于(1)的有限差分方程可写成

$$y_{i+1}=y_i+(x_{i+1}-x_i)f_i,$$
$$f_i=f(x_i,\ y_i). \tag{2}$$

如果初值 y_0 已知，重复应用(2)可求得 y_i。这是Euler 的方法，并且(2)具有 h^2 量级的截断误差，这里$h=x_{i+1}-x_i$。另一方面，所设计的第 n 次的 Runge-Kutta 方法给出了 h^{n+1} 量级的截断误差。我们首先用下式来定义在 xy 平面上的一个位置$(\bar{x},\bar{y})$

$$\bar{x}=x_i+\alpha h$$
$$\bar{y}=y_i+\beta h. \tag{3}$$

我们要这样确定 α 和 β，使

$$\Delta\bar{y}_i=f(\bar{x},\ \bar{y})h \tag{4}$$

和增量

$$\Delta y_i=y_i'h+y_i''\frac{h^2}{2}+\cdots+\frac{d^ny_i}{dx^n}\frac{h^n}{n!}$$

相等，这里的撇号表示对 x 求导数，且是在 x_i 处求此导数值。

如果能求得具有这样性质的 α 和 β，则方程可用(4)向前推进一

步，能以同样精度求出解来，这犹如在开始的一步时，y 的直至第 n 阶导数都是知道的(在此情况下，n 阶 Taylor 级数也是知道的)。

例如，若 $n=2$，则可确定 α 和 β 以使

$$\Delta y_i=y_i'h+y_i''\frac{1}{2}h^2=\Delta\bar{y}_i. \tag{5}$$

围绕$(x_i,\ y_i)$展开(4)，我们有

$$\Delta\bar{y}_i=f(x_i+\alpha h,\ y_i+\beta h)\cdot h\sim\left[f_i+\alpha h\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_i+\beta h\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)\right]h. \tag{6}$$

另一方面，由于

$$y''=\frac{df}{dx}=\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dx},$$

我们得到

$$y_i'h+y_i''\frac{1}{2}h^2=f_ih+\frac{1}{2}h^2\left[\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_i+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_if_i\right]. \tag{7}$$

如果我们选择 $\alpha=\frac{1}{2}$和 $\beta=f_i/2$，或

$$\bar{x}=x_i+\frac{1}{2}h,\quad \bar{y}=y_i+\frac{1}{2}hf_i, \tag{8}$$

将(6)和(7)代入(5)，我们发现(5)式将得到满足。

因此，在二次 Runge-Kutta 方法中，解由下式给出：

$$\begin{aligned}&y_{i+1}=y_i+\Delta\bar{y}_i,\\&\Delta\bar{y}_i=hf(\bar{x},\ \bar{y})=hf\left(x_i+\frac{1}{2}h,\ y_i+\frac{1}{2}hf_i\right).\end{aligned} \tag{9}$$

在联立方程的情况下，

$$\frac{dy}{dx}=f(x,\ y,\ z),\ \frac{dz}{dx}=g(x,\ y,\ z), \tag{10}$$

二次 Runge-Kutta 方法的解由下式给出：

$$\begin{aligned}&y_{i+1}=y_i+\Delta\bar{y}_i,\\&z_{i+1}=z_i+\Delta\bar{z}_i,\\&\Delta\bar{y}_i=hf\left(x_i+\frac{1}{2}h,\ y_i+\frac{1}{2}hf_i,\ z_i+\frac{1}{2}hg_i\right),\\&\Delta\bar{z}_i=hg\left(x_i+\frac{1}{2}h,\ y_i+\frac{1}{2}hf_i,\ z_i+\frac{1}{2}hg_i\right).\end{aligned} \tag{11}$$

因此，仅当

$$\begin{vmatrix} r_3^{(1)}(z_0) & r_3^{(2)}(z_0) \\ r_4^{(1)}(z_0) & r_4^{(2)}(z_0) \end{vmatrix} = 0 \tag{7.32}$$

时，有意义的解(7.30)才是可能的。连续尝试和修正，直到(7.32)成立即求得了本征值。一旦得到了本征值，A/B 可从(7.31)确定，进而本征向量由(7.30)确定。

下部的边条件比刚性更好的近似是把地球中 z_n 以下换成为均匀的半空间。均匀半空间中的解，包括随深度呈指数衰减的解，是众所周知的。对 Love 波我们用如下的初始值：

$$\begin{aligned} l_1(z_n) &= \exp(-\nu_{n+1} z_n), \\ l_2(z_n) &= \mu_{n+1} \frac{dl_1}{dz} = -\nu_{n+1}\mu_{n+1}\exp(-\nu_{n+1}z_n), \end{aligned} \tag{7.33}$$

其中 $\nu_{n+1}=(k^2-\omega^2/\beta^2_{n+1})^{1/2}$，并取其 $\text{Re}\,\nu_{n+1}\geqslant 0$（因此 $\text{Im}\,\nu_{n+1}\leqslant 0$）。脚标 $n+1$ 适用于半空间的参数。对 Rayleigh 波，所需的两组初始值，可用如下的势函数进行计算：

第一组

$$\phi=\exp(-\nu_{n+1}z),\quad \psi=0, \tag{7.34}$$

第二组

$$\phi=0,\quad \psi=\exp(-\nu_{n+1}z), \tag{7.35}$$

其中 $\nu_{n+1}=(k^2-\omega^2/\alpha^2_{n+1})^{1/2}$ 和 $\nu_{n+1}=(k^2-\omega^2/\beta^2_{n+1})^{1/2}$。半空间中相应的运动-应力向量 $r^{(1)}(z)$ 和 $r^{(2)}(z)$ 可将(7.34)和(7.35)代入(6.59)，然后用(7.25)和(7.26)计算出来。完成两组初值 $r^{(1)}(z)$ 和 $r^{(2)}(z_n)$ 的数值积分，并将结果对 k 值迭代，直至满足(7.32)为止，以求得本征值。对较小的 ω/k，两组初始值在数值上变得没有差别。在这种情况下，两个解的和及差可用作初值。

7.2.2 传播矩阵方法

由 Thomson (1950)提出并由 Haskell(1953) 修正的矩阵法，

由于大型计算机的出现而广泛用于面波分析。在他们的方法中竖向非均匀介质以叠置于均匀半空间上的均匀层来代替，如图 7.5 所示。Gilbert 和 Backus(1966)将传播矩阵法引入地震学中，而 Thomson-Haskell 法只是传播矩阵法的一个特例。

对运动-应力向量，我们首先将微分方程 (7.24)和(7.28) 推广到矩阵形式。

$$\frac{d\boldsymbol{f}(z)}{dz}=\boldsymbol{A}(z)\boldsymbol{f}(z), \tag{7.36}$$

这里 $\boldsymbol{f}(z)$是一个 $n\times 1$ 列的向量，$\boldsymbol{A}(z)$是一个 $n\times n$ 的矩阵；对 Love 波 $n=2$，对 Rayleigh 波 $n=4$。

这传播矩阵(有时称为矩阵子)定义为

$$\boldsymbol{P}(z,z_0)=\boldsymbol{I}+\int_{z_0}^{z}\boldsymbol{A}(\zeta_1)\,d\zeta_1+\int_{z_0}^{z}\boldsymbol{A}(\zeta_1)\int_{z_0}^{\zeta_1}(\boldsymbol{A}(\zeta_2)d\zeta_2 d\zeta_1+\cdots, \tag{7.37}$$

其中 $\boldsymbol{I}$ 是 n 阶单位矩阵。显然 $\boldsymbol{P}(z,z_0)$满足微分方程(7.36)：

$$\frac{d}{dz}\boldsymbol{P}(z,z_0)=\boldsymbol{A}(z)\boldsymbol{P}(z,z_0). \tag{7.38}$$

另外，根据(7.37)，$\boldsymbol{P}(z,z_0)=\boldsymbol{I}$。由于其中右半边满足微分方程(7.36)并在 $z=z_0$处确实给出$\boldsymbol{f}(z_0)$，因此我们得到传播矩阵最重要的特性，即

$$\boldsymbol{f}(z)=\boldsymbol{P}(z,z_0)\boldsymbol{f}(z_0). \tag{7.39}$$

因此，通过计算 z_0处的向量，则$\boldsymbol{P}(z,z_0)$可给出 z 处的运动-应力向量。

注意下式则可发现 $\boldsymbol{P}(z,z_0)$ 的一个有意义的特性

$$\begin{aligned}\boldsymbol{f}(z_2)&=\boldsymbol{P}(z_2,z_1)\boldsymbol{f}(z_1)\\&=\boldsymbol{P}(z_2,z_1)\boldsymbol{P}(z_1,z_0)\boldsymbol{f}(z_0).\end{aligned}$$

选择 $z_2=z_0$ 并对任意 $\boldsymbol{f}(z_0)$应用上面的链式法则，由此可得

$$\boldsymbol{I}=\boldsymbol{P}(z_0,z_1)\boldsymbol{P}(z_1,z_0), \tag{7.40}$$

所以 $\boldsymbol{P}(z_1,z_0)$的逆式是 $\boldsymbol{P}(z_0,z_1)$。

如 Thomson 和 Haskell 所假定的那样，在给定的层中若 $\boldsymbol{A}(z)$ 是和 z 无关的常数，则传播矩阵可取成简单的形式。根据(7.37)，

$$\boldsymbol{P}(z,z_0)=\boldsymbol{I}+(z-z_0)\boldsymbol{A}+\frac{1}{2}(z-z_0)^2\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}+\cdots$$

$$=\exp[(z-z_0)\boldsymbol{A}]. \tag{7.41}$$

对一个具有不同本征值 $\lambda_k(k=1,\ 2,\cdots,\ n)$ 的方矩阵 $\boldsymbol{A}$，矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的函数可按Sylvester公式展开(例如，Hildebrand，1952)。

$$F(\boldsymbol{A})=\sum_{k=1}^{n}F(\lambda_k)\frac{\prod\limits_{r\neq k}(\boldsymbol{A}-\lambda_r\boldsymbol{I})}{\prod\limits_{r\neq k}(\lambda_k-\lambda_r)}. \tag{7.42}$$

正是这个关系式，规定了(7.41)最后一部分的意义。对Love波，从(7.24)我们得到

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0 & \mu^{-1}\\ k^2\mu-\omega^2\rho & 0\end{pmatrix}.$$

为求得本征值，我们令

$$|\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{I}|=\begin{vmatrix}-\lambda & \mu^{-1}\\ k^2\mu-\omega^2\rho & -\lambda\end{vmatrix}=0$$

并得到 $\lambda=\pm(k^2-\omega^2/\beta^2)^{1/2}=\pm\nu$。将这些结果代入(7.42)，我们得到

$$\boldsymbol{P}(z,z_0)=\exp[(z-z_0)\boldsymbol{A}]$$

$$=\begin{pmatrix}\cosh\nu(z-z_0) & (\nu\mu)^{-1}\sinh\nu(z-z_0)\\ \nu\mu\sinh\nu(z-z_0) & \cosh\nu(z-z_0)\end{pmatrix}. \tag{7.43}$$

当 z 和 z_0 两者均在同一层内时，通过 $\boldsymbol{f}(z_0)$ 的计算，这个矩阵可给出运动-应力向量 $\boldsymbol{f}(z)$。对如图 7.5 所示的成层介质，当 $z_k>z>z_{k-1}$ 时，传播矩阵 $\boldsymbol{P}(z,z_0)$ 可由下式求出：

$$\boldsymbol{f}(z)=\boldsymbol{P}(z,z_{k-1})\boldsymbol{P}(z_{k-1},z_{k-2})\cdots\boldsymbol{P}(z_1,z_0)\boldsymbol{f}(z_0)=\boldsymbol{P}(z,z_0)\boldsymbol{f}(z_0),$$

因此

$$\boldsymbol{P}(z,z_0)=\exp[(z-z_{k-1})\boldsymbol{A}_k]\prod_{l=1}^{k-1}\exp[(z_l-z_{l-1})\boldsymbol{A}_l], \tag{7.44}$$

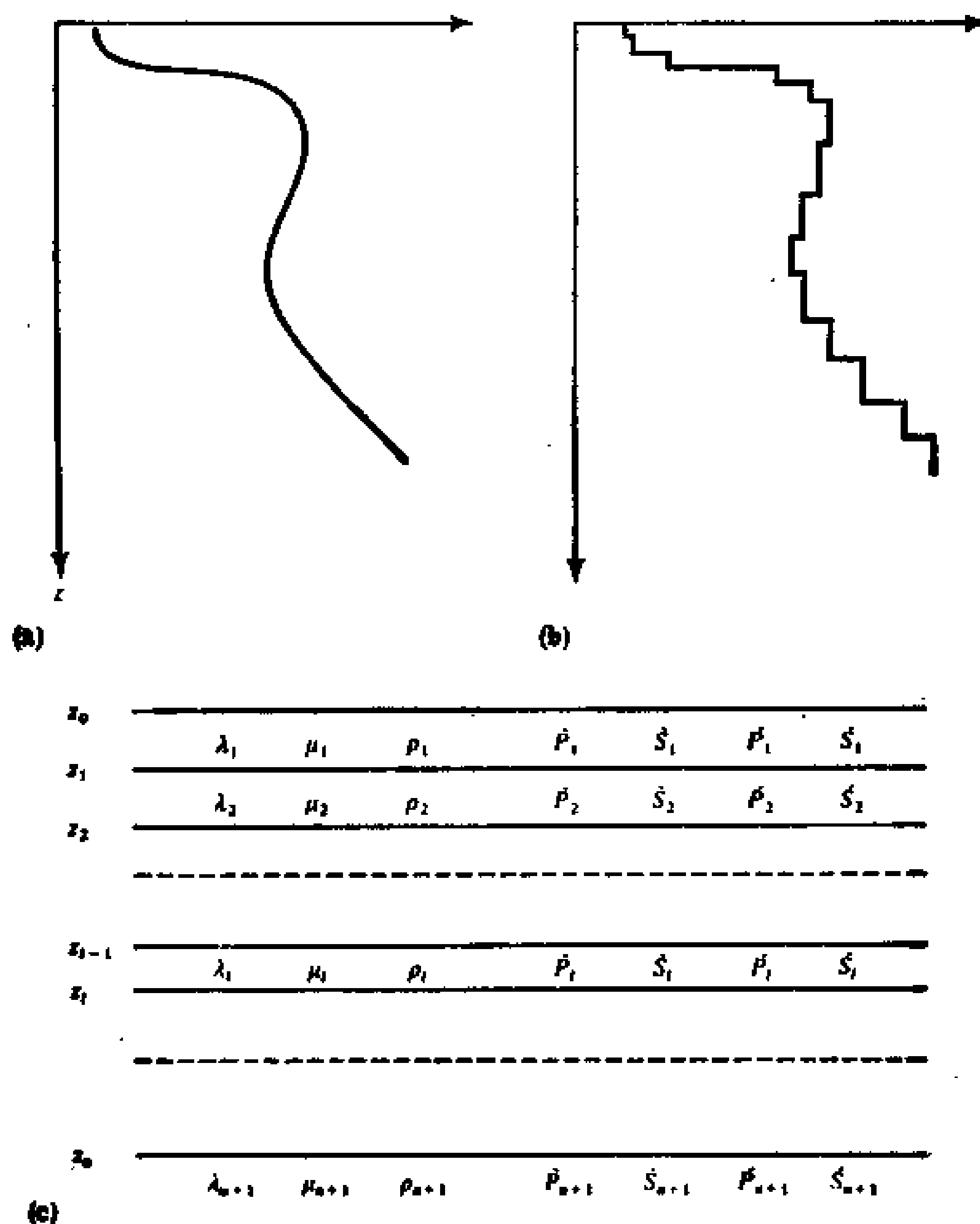


图 7.5

(a) 参数(ρ, λ, μ, α 或 β 之一)随深度的连续变化。(b) 近似于(a)的分段常数。这可看成一些连接在一起的均匀板的叠置。(c) 弹性常数、分层、上行波和下行波的编号系统

类似地，Rayleigh 波的层矩阵，可以将 (7.28) 中给出的 $\boldsymbol{A}$ 代入到 (7.41) 中而得到。 在此情况下， $\boldsymbol{A}$ 的本征值为$\pm\gamma=\pm(k^2-\omega^2/\alpha^2)^{1/2}$和$\pm\nu=\pm(k^2-\omega^2/\beta^2)^{1/2}$。$\boldsymbol{P}(z,z_0)$的元素则给出如下($z$ 和 z_0 在同一层)：

$$P_{11}=P_{33}=1+\frac{2\mu}{\omega^2\rho}\left[2k^2\sinh^2\frac{\gamma(z-z_0)}{2}-(k^2+\nu^2)\sinh^2\frac{\nu(z-z_0)}{2}\right],$$

$$\boldsymbol{P}_{12}=-\boldsymbol{P}_{43}=\frac{k\mu}{\omega^2\rho}\left[(k^2+\nu^2)\frac{\sinh\gamma(z-z_0)}{\gamma}-2\nu\sinh\nu(z-z_0)\right],$$

$$\boldsymbol{P}_{13}=\frac{1}{\omega^2\rho}\left[k^2\frac{\sinh\gamma(z-z_0)}{\gamma}\nu\sinh\nu(z-z_0)\right],$$

$$\boldsymbol{P}_{14}=-\boldsymbol{P}_{23}=\frac{2k}{\omega^2\rho}\left[\sinh^2\frac{\gamma(z-z_0)}{2}-\sinh^2\frac{\gamma(z-z_0)}{2}\right],$$

$$\boldsymbol{P}_{21}=-\boldsymbol{P}_{34}=\frac{k\mu}{\omega^2\rho}\left[(k^2+\nu^2)\frac{\sinh\nu(z-z_0)}{\nu}-2\gamma\sinh\gamma(z-z_0)\right],$$

$$\boldsymbol{P}_{22}=\boldsymbol{P}_{44}=1+\frac{2\mu}{\omega^2\rho}\left[2k^2\sinh^2\frac{\nu(z-z_0)}{2}-(k^2+\nu^2)\sinh^2\frac{\gamma(z-z_0)}{2}\right],\tag{7.45}$$

$$\boldsymbol{P}_{24}=\frac{1}{\omega^2\rho}\left[k^2\frac{\sinh\nu(z-z_0)}{\nu}-\gamma\sinh\gamma(z-z_0)\right],$$

$$P_{31}=\frac{\mu^2}{\omega^2\rho}\left[4k^2\gamma\sinh\gamma(z-z_0)-(k^2+\nu^2)^2\frac{\sinh\nu(z-z_0)}{\nu}\right],$$

$$P_{32}=-P_{41}=2\mu^2(k^2+\nu^2)P_{14},$$

$$\boldsymbol{P}_{42}=\frac{\mu^2}{\omega^2\rho}\left[4k^2\nu\sinh\nu(z-z_0)-(k^2+\nu^2)^2\frac{\sinh\gamma(z-z_0)}{\gamma}\right].$$

方程(7.43)、(7.44) 和 (7.45) 给出了 Thomson-Haskell 方法中

的传播矩阵。

传播矩阵也可用来求解具有有源项的系统：

$$\frac{d\boldsymbol{f}(z)}{dz}=\boldsymbol{A}(z)\boldsymbol{f}(z)+\boldsymbol{g}(z), \tag{7.46}$$

其中 $\boldsymbol{g}(z)$是已知的 z 的 $n\times 1$ 矩阵函数。上式的解为

$$\boldsymbol{f}(z)=\boldsymbol{P}(z,z_0)\left[\int_{z_0}^{z}\boldsymbol{P}^{-1}(\zeta,z_0)\boldsymbol{g}(\zeta)d\zeta+\boldsymbol{f}(z_0)\right]. \tag{7.47}$$

为证实这个结果，我们用(7.38)可得

$$\begin{aligned}\frac{d\boldsymbol{f}}{dz}&=\frac{d\boldsymbol{P}}{dz}\left[\int_{z_0}^{z}\boldsymbol{P}^{-1}(\zeta,z_0)\boldsymbol{g}(\zeta)d\zeta+\boldsymbol{f}(z_0)\right]+\boldsymbol{P}(z,z_0)\boldsymbol{P}^{-1}(z,z_0)\boldsymbol{g}(z)\\&=\boldsymbol{A}(z)\boldsymbol{P}(z,z_0)\boldsymbol{P}^{-1}(z,z_0)\boldsymbol{f}(z)+\boldsymbol{g}(z)\\&=\boldsymbol{A}(z)\boldsymbol{f}(z)+\boldsymbol{g}(z).\end{aligned}$$

因此(7.47)满足(7.46)。因为，由(7.40)得

$$\boldsymbol{P}(z,z_0)\boldsymbol{P}^{-1}(\zeta,z_0)=\boldsymbol{P}(z,z_0)\boldsymbol{P}(z_0,\zeta)=\boldsymbol{P}(z,\zeta),$$

解(7.47)可简化成

$$\boldsymbol{f}(z)=\int_{z_0}^{z}\boldsymbol{P}(z,\zeta)\boldsymbol{g}(\zeta)d\zeta+\boldsymbol{P}(z,z_0)\boldsymbol{f}(z_0). \tag{7.48}$$

现在让我们来讨论在应用Thomson-Haskell方法中所遇到的一些实际问题。由于辐射条件是被用以消除来自无限远处的波，而不是直接用以约束运动应力向量，我们需要把运动应力向量和基底半空间中上行波和下行波的存在(或不存在)联系起来。当然，对足够大的 k， 这些波型变得随深度分别为指数增长或指数衰减。从(5.62)和(5.63)，以垂直波数 $i\nu$ 取代 $\omega\eta$，对均匀体中的 SH 波，其关系式为

$$\begin{pmatrix}l_1\\l_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}e^{-\nu z}&e^{\nu z}\\-\nu\mu e^{-\nu z}&\nu\mu e^{\nu z}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\grave{S}\\\acute{S}\end{pmatrix} \tag{7.49}$$

或$\boldsymbol{l}=\boldsymbol{FW}$，其中 $\nu=(k^2-\omega^2/\beta^2)^{1/2}$和 $\beta=(\mu/\rho)^{1/2}$。$\grave{S}$和$\acute{S}$分别为给出其下行波和上行波位移振幅的常数。对(7.49)其逆关系式为

$$\boldsymbol{w}=\begin{pmatrix}\grave{S}\\\acute{S}\end{pmatrix}=1/(2\nu\mu)\begin{pmatrix}\nu\mu e^{\nu z}&-e^{-\nu z}\\\nu\mu e^{-\nu z}&e^{-\nu z}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}l_1\\l_2\end{pmatrix} \tag{7.50}$$

或 $\boldsymbol{w}=\boldsymbol{F}^{-1}\boldsymbol{l}$。

将此关系应用于 $z=z_0$ 处的运动-应力向量，则在半空间中上行波和下行波的振幅可用 $z=z_0$ 处的运动-应力向量来表示：

$$\boldsymbol{w}_{n+1}=\boldsymbol{F}_{n+1}^{-1}\boldsymbol{P}(z_n,z_0)\boldsymbol{l}(z_0)=\boldsymbol{B}\boldsymbol{l}(z_0). \tag{7.51}$$

根据辐射条件和(或)边界条件，得到 $\acute{S}_{n+1}=0$ 和 $l_2(z_0)=0$，所以我们得到

$$\begin{pmatrix}\acute{S}_{n+1}\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}B_{11} & B_{12}\\B_{21} & B_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}l_1(z_0)\\0\end{pmatrix}. \tag{7.52}$$

补充 7.3

关于回避使用势函数

对成层介质中波的传播，和 Haskell(1953，1960，1962) 法相反，本章中对 P，SV 和 SH 波，我们已最低限度地使用势函数。虽然，在均匀各向同性介质内的弹性理论中，势函数确实可以弄清楚某些阶段，但事实上对讨论 $\partial\boldsymbol{f}/\partial z=\boldsymbol{A}(z)\boldsymbol{f}$ 的解，矩阵法更为有效。势函数是没有直接意义的，在施加边界条件时使用也是不便的，但是，$\boldsymbol{f}$ 是由质点运动分量和应力分量组成的，这些量正是我们希望直接解得的量。

读者可注意，在第五章中讨论过的一次反射系数是用势函数得到的，但我们很快即转向直接研究位移。在第六章中又提到势函数是由于我们未曾将波动方程变为 $\partial\boldsymbol{f}/\partial z=\boldsymbol{A}\boldsymbol{f}$ 的形式，所以，它们的标量波动方程显得比包含有 P 和 S 运动在内的向量方程要简单。然而，在补充 6.9 中我们确曾对 P-SV 波讨论过其运动-应力向量 $\boldsymbol{f}$ 的前两项表值；并确曾推导出 $\boldsymbol{f}$ 等于可能的基本波之和，即 $\boldsymbol{f}=\boldsymbol{F}\boldsymbol{w}$(用本章的符号)。

令 $\boldsymbol{w}$ 的适当的分量为 0，很容易施加辐射条件。

所有这些并不是否认，理解弹性波的势函数和对它们求解是地震学家学习过程的一个重要组成部分。在以后的几章中我们将偶然地使用势函数，但绝大部分我们将强调去理解 $\boldsymbol{f}(z)=\boldsymbol{P}(z,z_0)\boldsymbol{f}(z_0)$ 和 $\boldsymbol{f}(z)=\boldsymbol{F}(z)\boldsymbol{w}$。在问题 5.8 中引入了势函数和层矩阵 $\boldsymbol{F}$ 之间的关系。

对一有意义的解 I，从上述方程可知，B_{21} 必须为 0。因此，本征值由下式确定：

$$B_{21}=0. \tag{7.53}$$

对一给定的 ω，为求此方程的根，我们从 k 的尝试值开始。若已知 ω 和 k，根据矩阵乘积(7.51)，用给出的层的参数，可计算 B_{21} 的值。于是，稍微改变 k 而引起 B_{21} 的变化是可控制的。用外推法和内插法可很快地定出 B_{21} 发生零交点时的 k 值。一旦找到本征值，即可通过(7.44)算出本征函数。

上述方法很容易推广于 Rayleigh 波，只须寻求运动-应力向量(r_1,r_2,r_3,r_4)和$(\grave{P},\grave{S},\acute{P},\acute{S})$之间的关系，后者是描述在每层中，四种可能的波各有多少的数值。正如在 5.4 节中，将 $\boldsymbol{F}$ 分解成一个由 $\boldsymbol{A}$ 的本征向量构成的矩阵乘以一个含有垂直相位因子的对角矩阵(见(5.65))，我们得到了 $\boldsymbol{f}=\boldsymbol{F}\boldsymbol{w}$ 去解 $\partial \boldsymbol{f}/\partial z=\boldsymbol{A}\boldsymbol{f}$，这里我们也同样得到

$$\begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \\ r_4 \end{pmatrix}=\boldsymbol{F}\boldsymbol{w}=\boldsymbol{F}\begin{pmatrix} \grave{P} \\ \grave{S} \\ \acute{P} \\ \acute{S} \end{pmatrix}. \tag{7.54}$$

此矩阵 $\boldsymbol{F}$ 分解为

$$\boldsymbol{F}=\omega^{-1}\times\begin{pmatrix} \alpha k & \beta\nu & \alpha k & \beta\nu \\ \alpha\gamma & \beta k & -\alpha\gamma & -\beta k \\ -2\alpha\mu k\gamma & -\beta\mu(k^2+\nu^2) & 2\alpha\mu k\gamma & \beta\mu(k^2+\nu^2) \\ -\alpha\mu(k^2+\nu^2) & -2\beta\mu k\nu & -\alpha\mu(k^2+\nu^2) & -2\beta\mu k\nu \end{pmatrix}$$

$$\times\begin{pmatrix} e^{-\gamma z} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{-\nu z} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{\gamma z} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{\nu z} \end{pmatrix}. \tag{7.55}$$

对(7.28)中出现的系数矩阵的本征向量，我们可自由选择任意适当的正则化形式。对(7.54)和(7.55)的特殊形式，我们以两种要求作指导：第一点，包含在 $F\omega$ 中的四个分量波，对那些均匀的波(即当 γ 和 ν 是负虚数)，确实有由(P, S, P, S)给出的位移振幅。第二点要求是，对面波(当 γ 和 ν 是正实数)，F 的表值全部是实数。

补充 7.4

固体层和液体层的混合

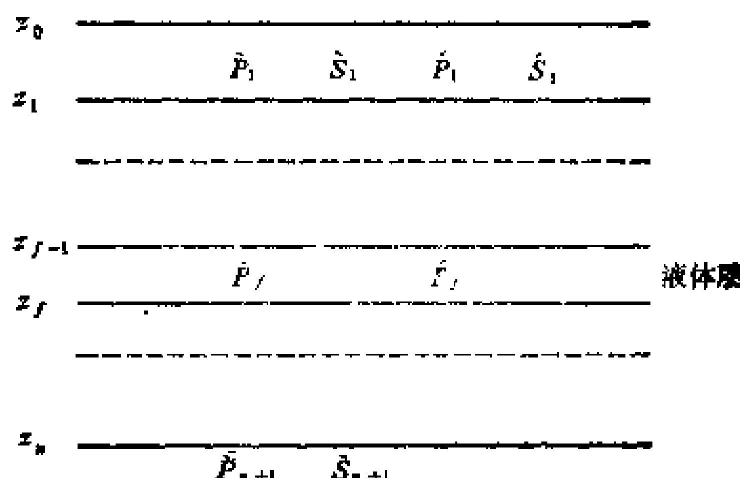
地震学中的液体层可能是：(i) 位于顶部，如海洋结构；(ii) 固体层间的夹层，如海面被冰覆盖或具有岩浆透镜体的火山地区或(iii)位于底部，如在地幔下边的地核。这里我们将考虑一种粘滞系数为0的理想液体，在液-固的交界面处其剪应力必须为0，但容许有水平位移的不连续性(见5.2节)。

在Love波的情况下，液-固界面成为一个自由面并且液体层与真空相似。

在Rayleigh波的情况下，剪应力为零，但正应力和正位移不为零，而且穿过液-固界面时必须是连续的。因此，液体层的层矩阵 F 成为奇异的并且它的逆矩阵是不存在的。我们需要找到一种计算方法，处理时犹如其逆矩阵是存在的。

在固体的成层半空间中，考虑在其深度 $z_f > z > z_{f-1}$ 处有一液体夹层，如图所示。层中只有压缩波存在。为确定穿过此混合层介质的运动-应力向量，我们将从自由面 $z = z_0$ 入手。利用正文中(见问题7.3)给定的层矩阵 F，在 $z = z_{f-1}$ 处的运动-应力向量 $r(z)$ 可用 $r(z_0)$ 表示。由于牵引力为零，在 z_0 处 $r_3 = r_4 = 0$，$r(z_{f-1})$ 被完全确定为两个未知量 $r_1(z_0)$ 和 $r_2(z_0)$ 间的线性组合。另一方面，$z = z_{f-1}$ 是液-固的交界面并且剪切牵引力 $r_3(z_{f-1})$ 为零。这采用了 $r_1(z_0)$ 和 $r_2(z_0)$ 间的线性关系。利用这个关系可从表示式 $r(z_{f-1})$ 中消掉 $r_1(z_0)$，现在此 $r(z_{f-1})$ 可仅由一个未知的 $r_2(z_0)$ 完全确定。因而，$r_2(z_f)$ 和 $r_4(z_f)$ 可由 $r_2(z_{f-1})$ 和 $r_4(z_{f-1})$ 通过上行的和下行的压缩波 $\acute{P}_f$ 和 $\grave{P}_f$ 来确定。在 $z = z_f$ 处，$r_3(z_f)$ 已知为零，所以，未知的 $r(z_f)$ 的分量仅是 $r_1(z_f)$。因此，在 z_f 以下的运动-应力向量可表示成两个未知量

$r_1(z_f)$和$r_2(z_f)$的线性组合。由此得出，在半空间中波的辐射条件导出一个类似(7.58)的方程，其中$r_1(z_0)$换以$r_1(z_f)$。



当一液体层置于一固体介质之上时，$r(z_0)$的未知分量开始时只有$r_1(z_0)$，因而采用的步骤和前述叠置的固体层被消除的情况是相同的。在液体半空间的情况下，使$r_3(z_n)$变为零将取代使$\grave{S}_{n+1}$变为零的条件。

对(7.55)中F的每一个矩阵因子，可写出其具体的逆矩阵

$$F^{-1}=\begin{pmatrix} e^{\nu z} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{\nu z} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{-\nu z} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{-\nu z} \end{pmatrix}\times\frac{\beta}{2\alpha\mu\gamma\nu\omega}$$

$$\times\begin{pmatrix} 2\beta\mu k\gamma\nu & -\beta\mu\nu(k^2+\nu^2) & -\beta k\nu & \beta\gamma\nu \\ -\alpha\mu\gamma(k^2+\nu^2) & 2\alpha\mu k\gamma\nu & \alpha\gamma\nu & -\alpha k\gamma \\ 2\beta\mu k\gamma\nu & \beta\mu\nu(k^2+\nu^2) & \beta k\nu & \beta\gamma\nu \\ -\alpha\mu\gamma(k^2+\nu^2) & -2\alpha\mu k\gamma\nu & -\alpha\gamma\nu & -\alpha k\gamma \end{pmatrix}. \tag{7.56}$$

w, F, F^{-1}的每一个都和层有关，并且我们可使在最下面的半空间中不同类型波的振幅和在自由面上的运动-应力向量相关：

$$\boldsymbol{w}_{n+1}=\boldsymbol{F}_{n+1}^{-1}\boldsymbol{P}(z_n,z_0)\boldsymbol{r}(z_0)=\boldsymbol{B}\boldsymbol{r}(z_0). \tag{7.57}$$

相当于我们处理 Love 波时的(7.51)—(7.52)，这里我们得到

$$\begin{pmatrix}\dot{P}_{n+1}\\ \dot{S}_{n+1}\\ 0\\ 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}B_{11} & B_{12} & B_{13} & B_{14}\\ B_{21} & B_{22} & B_{23} & B_{24}\\ B_{31} & B_{32} & B_{33} & B_{34}\\ B_{41} & B_{42} & B_{43} & B_{44}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}r_1(z_0)\\ r_2(z_0)\\ 0\\ 0\end{pmatrix} \tag{7.58}$$

因此本征值由下式给出：

$$\begin{vmatrix}B_{31} & B_{32}\\ B_{41} & B_{42}\end{vmatrix}=0. \tag{7.59}$$

对一给定的 ω，为求此行列式的根，我们仍从尝试值 k 入手，并迭代 k 值直至(7.59)成立。对一尝试值 k，在计算(7.59)左边的子行列式时，如果面波的波长 λ 变得比某一极限值短，则引起一个数值问题。按照 Schwab 和 Knopoff(1970)的结果，在计算中若用 16 位 10 进制数字，这极限近似为

$$H/\lambda=3\times10^{(14.3-\sigma)/12.4}, \tag{7.60}$$

这里 H 是均匀半空间的深度，σ 是以有效数字给出的相速度中所要求的精度。对 Love 波，此极限不存在。而对 Rayleigh 波所以存在的原因是由于层矩阵(7.55)中出现有如下矩阵$\boldsymbol{\Lambda}_l(z)$：

$$\boldsymbol{\Lambda}_1(z)=\begin{pmatrix}\exp(-\gamma_l z) & 0 & 0 & 0\\ 0 & \exp(-\nu_l z) & 0 & 0\\ 0 & 0 & \exp(\nu_l z) & 0\\ 0 & 0 & 0 & \exp(\nu_l z)\end{pmatrix} \tag{7.61}$$

当 H/λ 很大时，则 $\boldsymbol{\Lambda}_l$ 的对角元素将很大。在Λ_l 之前乘以 $\boldsymbol{L}$，$\boldsymbol{\Lambda}_l$ 之后乘以$\boldsymbol{R}$，将矩阵的乘积归并成 $\boldsymbol{B}$，我们写成

$$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{L}\boldsymbol{\Lambda}_l\boldsymbol{R}. \tag{7.62}$$

相应于(7.59)的 $\boldsymbol{B}$ 的子行列式，它将包含如下的项：

$$\exp(2\gamma_l z)(l_{33}r_{31}l_{43}r_{32}-l_{43}r_{31}l_{33}r_{32}),$$

此项恒为零，但在计算过程中此项将得到为两个大数之间的差，

如果 $\exp(\gamma_i z)$ 较大，则会引起有效数字的损失。这个问题曾被 Dunkin(1965)指出而且被他和 Knopoff(1964b)用 Laplace 子式的展开所修正。它也可用层简化法(Schwab 和 Knopoff，1970)来修正，在此法中，对越短周期的波在越浅的深度处，介质的下部将以均匀半空间代替。然而，在深部波导的情况下，层简化法应当避免使用，并且此方法只能用于某些深度，在这些深度以下所有的层仅含有非均匀的 P 波和 SV 波。另一方法是对得自解 $\mathbf{r}^{(1)}$ 和 $\mathbf{r}^{(2)}$[见(7.30)]的二次子式用传播矩阵法。这六个子式为

$$R_1=r_1^{(1)}r_2^{(2)}-r_2^{(1)}r_1^{(2)},\quad R_2=r_1^{(1)}r_3^{(2)}-r_3^{(1)}r_1^{(2)},$$
$$R_3=r_1^{(1)}r_4^{(2)}-r_4^{(1)}r_1^{(2)},\quad R_4=r_2^{(1)}r_3^{(2)}-r_3^{(1)}r_2^{(2)},$$
$$R_5=r_2^{(1)}r_4^{(2)}-r_4^{(1)}r_2^{(2)},\quad R_6=r_3^{(1)}r_4^{(2)}-r_4^{(1)}r_3^{(2)}.$$

竹内和斋藤(Takeuchi and Saito，1972)证明 $\mathbf{f}=(R_1, R_2, R_3, R_4, R_5, R_6)^T$ 满足 $d\mathbf{f}/dz=c\mathbf{f}$ 型的方程，这个方程的解前已说明。然而，这时，频散关系(7.32)简化为要求 $\mathbf{f}$ 的一个标量分量（即 R_6)在自由面 $z=z_0$ 处变为零。

补充 7.5

Gutenberg 地球模型中的面波

作为一个例子，在图 A 到 E 中我们给出 Gutenberg 经典地球模型中大陆结构的 Love 波和 Rayleigh 波的相速度 c，群速度 U 和本征函数。在 24 个均匀层叠置而成的模型中，其中每一层的层底深度、密度、压缩波和剪切波的速度均列在下表中。

大陆结构的 Gutenberg 分层模型

层号	层底深度 (km)	密　度 (g/cm³)	v_P (km/s)	v_S (km/s)
1	19	2.74	6.14	3.55
2	38	3.00	6.58	3.80
3	50	3.32	8.20	4.65
4	60	3.34	8.17	4.62
5	70	3.35	8.14	4.57

6	80	3.36	8.10	4.51
7	90	3.37	8.07	4.46
8	100	3.38	8.02	4.41
9	125	3.39	7.93	4.37
10	150	3.41	7.85	4.35
11	175	3.43	7.89	4.36
12	200	3.46	7.98	4.38
13	225	3.48	8.10	4.42
14	250	3.50	8.21	4.46
15	300	3.53	8.38	4.54
16	350	3.58	8.62	4.68
17	400	3.62	8.87	4.85
18	450	3.69	9.15	5.04
19	500	3.82	9.45	5.21
20	600	4.01	9.88	5.45
21	700	4.21	10.30	5.76
22	800	4.40	10.71	6.03
23	900	4.56	11.10	6.23
24	1000	4.63	11.35	6.32

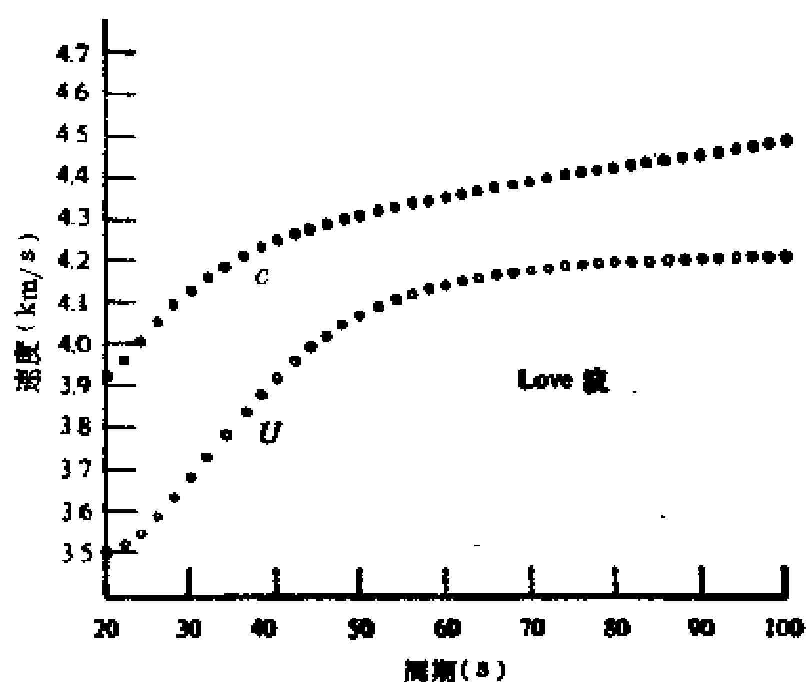


图 A

Gutenberg 地球模型基频振型 Love 波的相速度和群速度

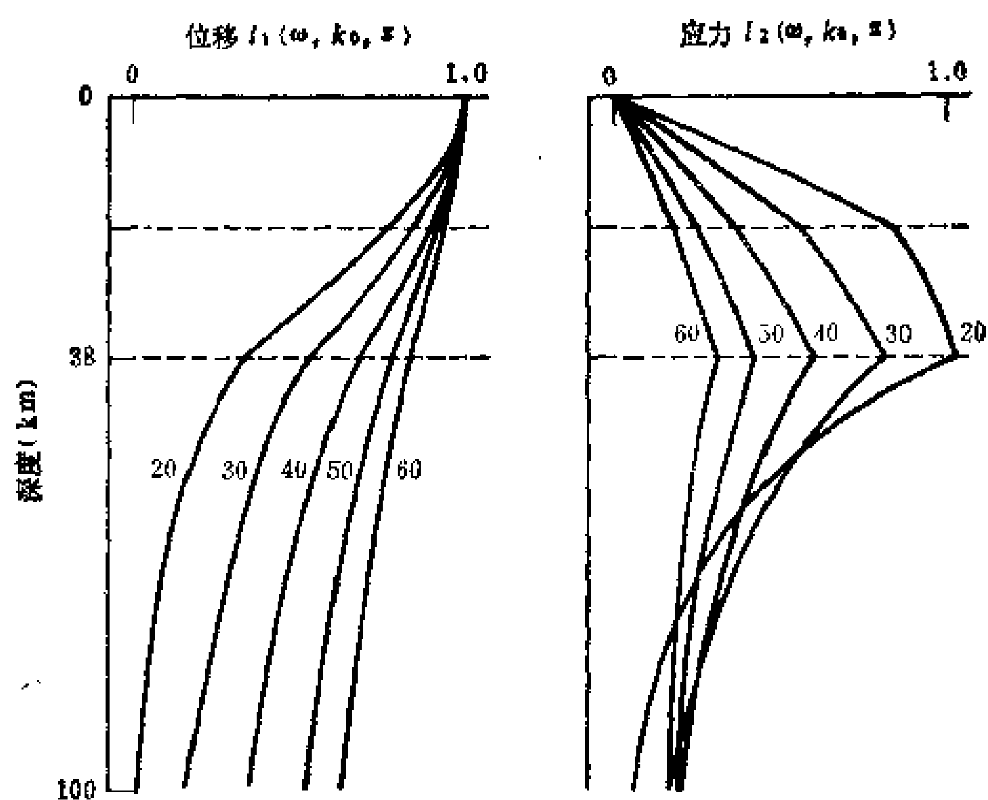


图 B

不同周期下基频振型 Love 波的本征函数。振幅归一化为 $z=0$ 处的位移

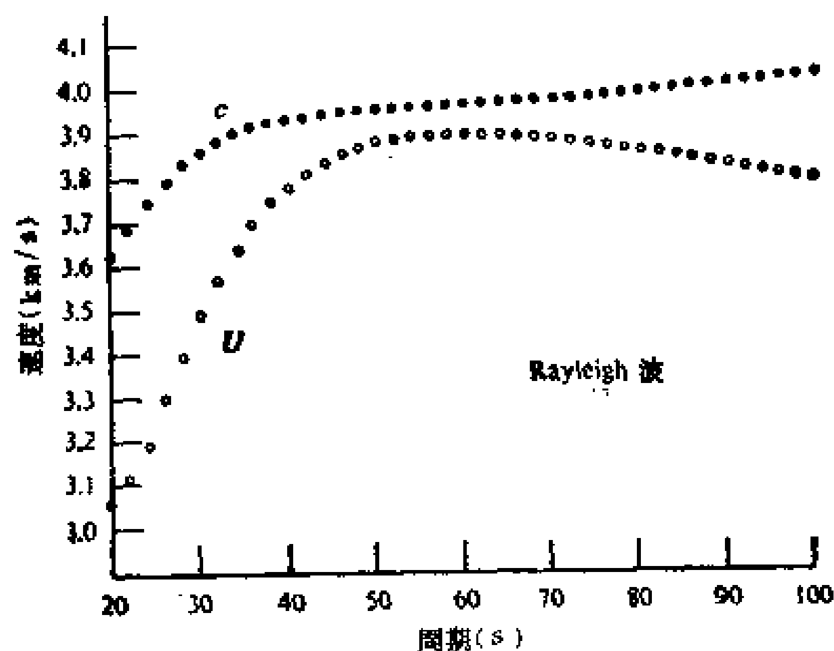


图 C

Gutenberg 地球模型中基频振型 Rayleigh 波的相速度和群速度

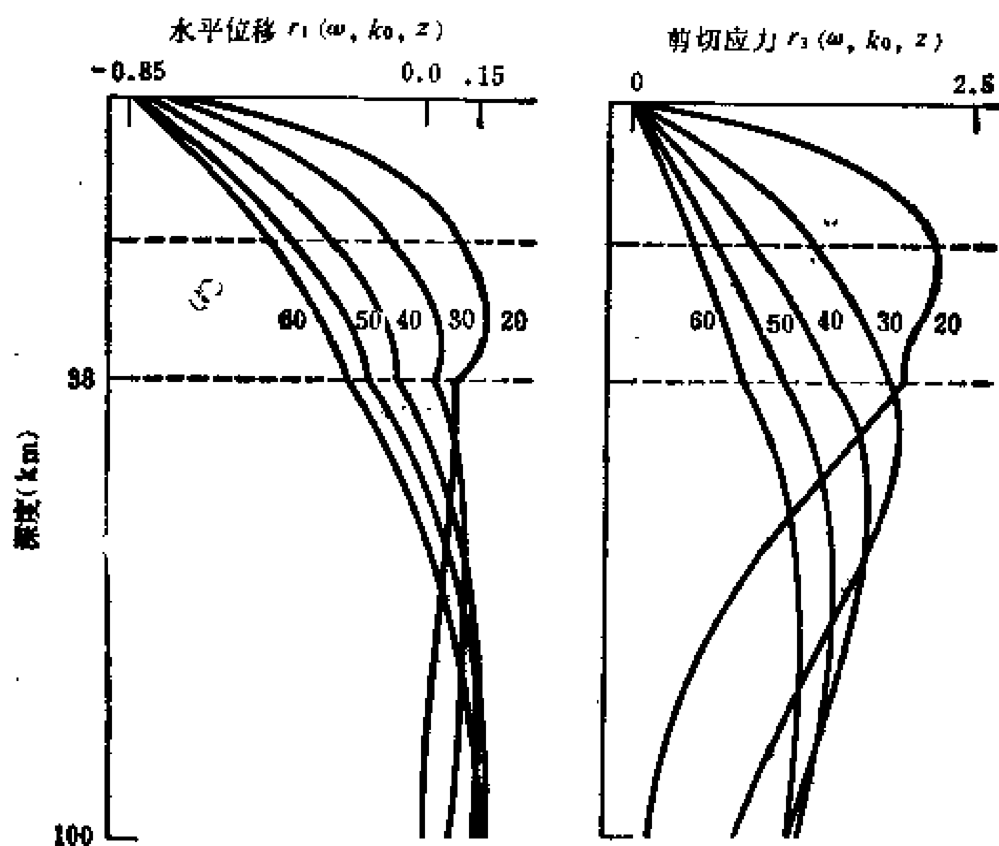


图 D

不同周期下基频振型 Rayleigh 波的水平本征函数。振幅归一化为 $z=0$ 处的垂直位移 r_2

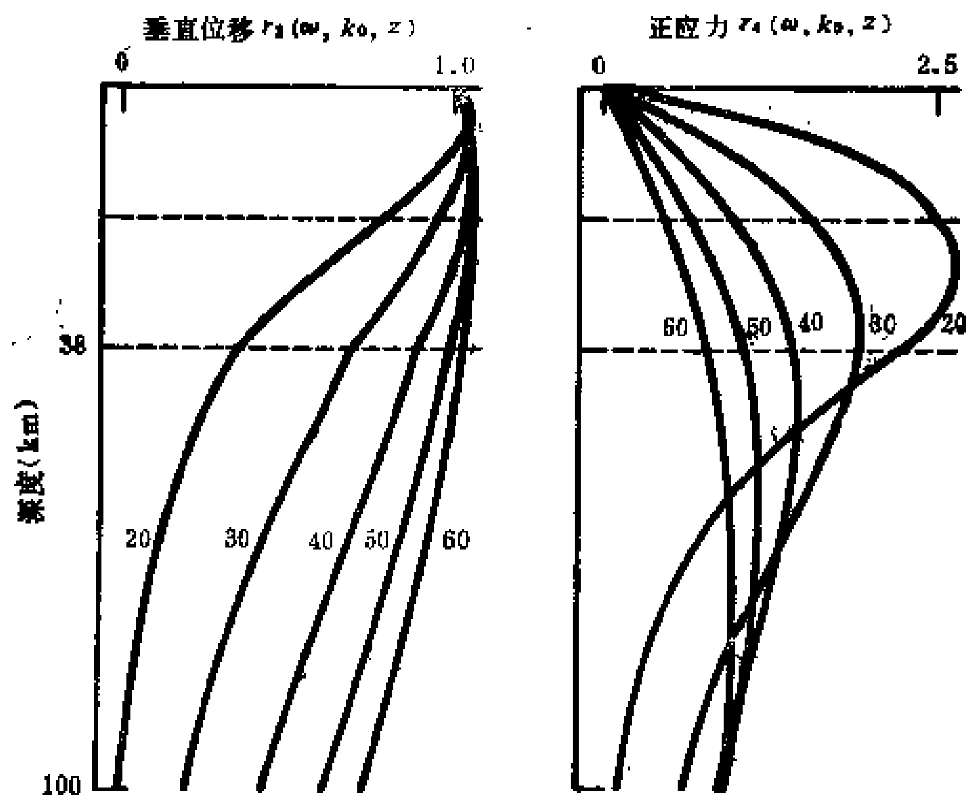


图 E

不同周期下基频振型 Rayleigh 波的垂直本征函数。振幅仍归一化为 $z=0$ 处的垂直位移 r_2

7.3 Love 波和 Rayleigh 波的变分原理

这里表明，前面讨论过的本征值-本征函数问题可以用 Rayleigh-Ritz 方法求解。我们也将用变分方法求得几个重要公式，以计算群速度、衰减以及分别对各介质参量求相速度的偏微商。

对各向同性、竖向不均匀的介质中的 Love 波和 Rayleigh 波，我们从 Lagrange 密度 L 入手。对一线弹性体，Lagrange 密度是动能减去弹性应变能(2.32)。对一各向同性体，

$$L=\frac{1}{2}\rho\dot{u}_i\dot{u}_i-\left[\frac{1}{2}\lambda(e_{kk})^2+\mu e_{ij}e_{ij}\right]. \qquad (7.63)$$

对 (7.19) 给出的平面 Love 波，由于 $e_{ij}=(u_{i,j}+u_{j,i})/2$，我们有

$$\langle L\rangle=\frac{1}{4}\rho\omega^2 l_1^2-\frac{1}{4}\mu\left[k^2 l_1^2+\left(\frac{dl_1}{dz}\right)^2\right]. \qquad (7.64)$$

这里的括号〈 〉代表一平均过程，所以，在 (7.63) 中出现的象 $\cos^2(kx-\omega t)$ 和 $\sin^2(kx-\omega t)$ 的项，在(7.64) 的微分中已被 $\frac{1}{2}$ 所取代。

对(7.25)给出的平面 Rayleigh 波，

$$\langle L\rangle=\frac{1}{4}\rho\omega^2(r_1^2-r_2^2)-\frac{1}{4}\left[\lambda\left(kr_1+\frac{dr_2}{dz}\right)^2+\mu\left(\frac{dr_1}{dz}-kr_2\right)^2+2\mu k^2 r_1^2+2\mu\left(\frac{dr_2}{dz}\right)^2\right]. \qquad (7.65)$$

7.3.1 Love 波

对这些面波我们定义其能量积分为

$$I_1=\frac{1}{2}\int_0^\infty \rho l_1^2 dz,\quad I_2=\frac{1}{2}\int_0^\infty \mu l_1^2 dz,$$
$$I_3=\frac{1}{2}\int_0^\infty \mu\left(\frac{dl_1}{dz}\right)^2 dz. \qquad (7.66)$$

当无体力且无表面牵引力时，根据 Hamilton 原理，若对实际运动 l_1 有扰动时，$\langle L\rangle$的积分一定是稳定的。为证实这一点，我们来考察$\langle L\rangle$的积分中的扰动，它刚好是下式的一半：

$$\begin{aligned}&\omega^2\delta I_1-k^2\delta I_2-\delta I_3\\&=\omega^2\int_0^\infty \rho l_1\delta l_1 dz-\int_0^\infty \mu\frac{dl_1}{dz}\frac{d\delta l_1}{dz}dz-k^2\int_0^\infty \mu l_1\delta l_1 dz\\&=\int_0^\infty\left\{\omega^2\rho l_1-k^2\mu l_1+\frac{d}{dz}\left(\mu\frac{dl_1}{dz}\right)\right\}\delta l_1 dz-\mu\frac{dl_1}{dz}\delta l_1\Big|_0^\infty.\end{aligned}$$

如果(i)运动方程是(7.21)，(ii) 在 $z=0$ 处，自由表面条件 $dl_1/dz=0$，(iii)在 $z=\infty$处，δl_1 变为零和(iv)l_1 及 $\mu\frac{dl_1}{dz}$的连续性（分部积分所要求的）完全被满足，我们的确得到

$$\omega^2\delta I_1-k^2\delta I_2-\delta I_3=0. \tag{7.67}$$

能全部满足这四个条件的 l_1 就是一个本征函数。因此，我们已证明，对于围绕本征函数 l_1 的扰动，$\omega^2I_1-k^2I_2-I_3$ 是稳定的。而且，将运动方程（7.21）乘以 l_1 并对 z 从 0 到∞求积分，我们可证明 Lagrange 积分 $\omega^2I_1-k^2I^2-I_3$ 在其稳定点为零，

$$\begin{aligned}0&=\int_0^\infty\left\{\omega^2\rho l_1^2-k^2\mu l_1^2+l_1\frac{d}{dz}\left(\mu\frac{dl_1}{dz}\right)\right\}dz\\&=2\,\omega^2I_1-2\,k^2I_2-2\,I_3+l_1\,\mu\frac{dl_1}{dz}\Big|_0^\infty,\end{aligned}\tag{7.68}$$

当 l_1 是一个本征函数时，在 $z=\infty$处 $l_1=0$，在 $z=0$ 处 $dl_1/dz=0$，所以（7.68）的最后一项变为零。因而，对一个本征函数有

$$\omega^2I_1=k^2I_2+I_3. \tag{7.69}$$

换言之，在一个简正振型中包含的全部弹性能等于全部动能。

两个关系式 $\omega^2\delta I_1=k^2\delta I_2+\delta I_3$ 和 $\omega^2I_1=k^2I_2+I_3$，有三个特别重要的应用。每一应用中，扰动不同的量，变分方法的巧妙性及有效性可用完全由同一来源产生的三个不同结果来很好地说明。

首先，我们将假定在数值方法中试图估算这真实的本征函数

$l_1(z)$时，已产生了误差并且事实上得到的是 $l_1+\delta l_1$。由此，在(7.66) 中利用 $l_1+\delta l_1$，在数值上我们得到的是 $I_1+\delta I_1$，$I_2+\delta I_2$，和 $I_3+\delta I_3$。然而，补充的两个关系式（7.67）和（7.69）告诉我们，ω^2 通过下式和 k^2 发生关系：

$$k^2=\frac{\omega^2(I_1+\delta I_1)-(I_3+\delta I_3)}{I_2+\delta I_2}.$$

用它可准确地确定 k^2，并且其意义是 l_1 的一级误差并不导致其本征值的一级误差。

其次，我们可得到一个有用的群速度 U 的公式但不需要进行数值微商。我们假定 $l_1(k,\ \omega)$和 $l_1+\delta l_1=l_1(k+\delta k,\ \omega+\delta\omega)$两者都是本征函数。用这个 $l_1+\delta l_1$ 去估算能量积分，则由（7.69）可得出

$$(\omega+\delta\omega)^2(I_1+\delta I_1)=(k+\delta k)^2(I_2+\delta I_2)+(I_3+\delta I_3).$$

减去(7.69)，取一级近似，我们得到

$$\omega^2\delta I_1+2\ \omega\delta\omega I_1=k^2\delta I_2+2\ k\delta k I_2+\delta I_3.$$

因而，用此 $l_1+\delta l_1$，确构成了（7.67）中可用于对 l_1 的扰动。因此，$2\ \omega\delta\omega I_1=2\ k\delta k I_2$，和

$$U=\frac{\delta\omega}{\delta k}=\frac{k}{\omega}\frac{I_2}{I_1}=\frac{I_2}{cI_1}. \tag{7.70}$$

这是用积分给出的群速度，它在数值上比用微分给出的更稳定。

第三，当结构中的刚度 μ 和密度 ρ 受一微小扰动时，我们将估算相速度和群速度的变化，这些速度将上升（在固定的频率上）。假定 $l_1(k,\ \omega)$，是结构$(\rho(z),\ \mu(z))$中的本征函数。我们将其写成 $l_1=l_1(\rho,\ \mu,\ k,\ \omega)$ 并考虑有一扰动 $l_1+\delta l_1=l_1(\rho+\delta\rho,\ \mu+\delta\mu,\ k+\delta k,\ \omega)$，则它也是一本征函数，但是它的结构稍有不同。应用（7.69）于这新的本征函数，得到

$$\omega^2\int_0^\infty(\rho+\delta\rho)(l_1+\delta l_1)^2dz=(k+\delta k)^2\int_0^\infty(\mu+\delta\mu)(l_1+\delta l_1)^2dz+\int_0^\infty(\mu+\delta\mu)\left[\frac{d}{dz}(l_1+\delta l_1)\right]^2dz,$$

从原来的本征函数减去(7.69)，则得到(取一级近似)

$$\omega^2\int_0^\infty(l_1^2\delta\rho+2\,\rho l_1\delta l_1)dz$$

$$=k^2\int_0^\infty(l_1^2\delta\mu+2\mu l_1\delta l_1)dz+2\,k\delta k\int_0^\infty\mu l_1^2dz$$

$$+\int_0^\infty\left(\frac{dl_1}{dz}\right)^2\delta\mu dz+\int_0^\infty 2\,\mu\frac{dl_1}{dz}\frac{d\delta l_1}{dz}dz.$$

但根据 (7.67) 我们可消去这里的所有包含 δl_1 以及 $d(\delta l_1)/dz$ 项的积分。我们还剩下 δk 和对 $\delta\rho$ 及 $\delta\mu$ 的积分之间的关系。剩下的是求 δc 和 δk 的关系，最后结果是

$$\left(\frac{\delta c}{c}\right)_\omega=-\frac{\delta k}{k}$$

$$=\frac{\int_0^\infty\left[k^2l_1^2+\left(\frac{dl_1}{dz}\right)^2\right]\delta\mu dz-\int_0^\infty\omega^2l_1^2\delta\rho dz}{2\,k^2\int_0^\infty\mu l_1^2dz}.\qquad(7.71)$$

这个公式说明在相速度的百分比变化 $\delta c/c$ 和模型参量中的扰动二者之间的线性关系，并且在相速度资料反演中它起了重要作用，如第十二章中所讨论的。对 $(\delta\mu/\mu)$ 其权函数或核函数是和应变能密度成比例的，对 $(\delta\rho/\rho)$，则和动能密度成比例，这说明在能量密度较大的深度处，μ 和 ρ 的扰动更加强烈地影响相速度。

由于刚性和密度的微小扰动，在固定频率上群速度的变化从(7.70)得到为

$$\frac{dU}{U}=\frac{\delta I_2}{I_2}-\frac{\delta c}{c}-\frac{\delta I_1}{I_1},\qquad(7.72)$$

而在此情况下，δl_1 必须在找到 δI_1 和 δI_2 之前计算出，因为包括 δl_1 和 $d(dl_1)/dz$ 的积分不能以类似于 (7.71) 的方式消去。

7.3.2 Rayleigh 波

用（7.65）给出的 Lagrange 密度，则 Rayleigh 波的 Hamilton 原理可写成

$$\omega^2\delta I_1-k^2\delta I_2-k\delta I_3-\delta I_4=0, \tag{7.73}$$

其中

$$\begin{aligned}
I_1&=\frac{1}{2}\int_0^\infty\rho(r_1^2+r_2^2)dz,\\
I_2&=\frac{1}{2}\int_0^\infty[(\lambda+2\mu)r_1^2+\mu r_2^2]dz,\\
I_3&=\int_0^\infty\left(\lambda r_1\frac{dr_2}{dz}-\mu r_2\frac{dr_1}{dz}\right)dz,\\
I_4&=\frac{1}{2}\int_0^\infty\left[(\lambda+2\mu)\left(\frac{dr_2}{dz}\right)^2+\mu\left(\frac{dr_1}{dz}\right)^2\right]dz.
\end{aligned} \tag{7.74}$$

它可表明（7.73）等价于运动方程(7.28)，边界条件（7.29）和 r_1，r_2，r_3 及 r_4 的连续性。由于满足这些条件的 r_1，r_2 是 Rayleigh 波的本征函数，（7.33）表明，对本征函数的扰动，积分 $\omega^2I_1-k^2I_2-kI_3-I_4$ 是稳定的。如同对 Love 波是正确的一样，我们发现这个积分在稳定点变为零：

$$\omega^2I_1-k^2I_2-kI_3-I_4=0. \tag{7.75}$$

因此，这个方程可检验用前面讨论过的方法所算出的本征值和本征函数。

对（7.75）式中的 k 和 ω 加一扰动，对群速度我们得到的公式为

$$I_1\delta(\omega^2)=I_2\delta(k^2)+I_3\delta k$$

或

$$U=\frac{\delta\omega}{\delta k}=\frac{I_2+\dfrac{I_3}{2k}}{cI_1}, \tag{7.76}$$

其中 c 是相速度。

由于 λ，μ 和 ρ 有一微小扰动，相速度的变化也可从(7.75)得到。对一给定的 ω 再用（7.73），我们得到

$$\delta k(2kI_2+I_3)=\frac{1}{2}\int_0^\infty \omega^2(r_1^2+r_2^2)\delta\rho dz$$
$$-\frac{1}{2}\int_0^\infty\left(kr_1+\frac{dr_2}{dz}\right)^2\delta\lambda dz$$
$$-\frac{1}{2}\int_0^\infty\left[2k^2r_1^2+2\left(\frac{dr_2}{dz}\right)^2+\left(kr_2-\frac{dr_1}{dz}\right)^2\right]\delta\mu dz \tag{7.77}$$

相速度相应的分数变化可写成

$$\left(\frac{\delta c}{c}\right)_\omega=-\frac{\delta k}{k}$$
$$=\frac{1}{4k^2UcI_1}\left\{\int_0^\infty\left(kr_1+\frac{dr_2}{dz}\right)^2\delta\lambda dz+\int_0^\infty\left[2k^2r_1^2+2\left(\frac{dr_2}{dz}\right)^2+\left(kr_2-\frac{dr_1}{dz}\right)^2\right]\delta\mu dz-\int_0^\infty\omega^2(r_1^2+r_2^2)\delta\rho dz\right\}, \tag{7.78}$$

补充 7.6

相速度的"偏微商"

由于结构中有一微小扰动 $\delta\rho$ 和 $\delta\mu$，Love 波相速度的微小变化自然地可写成如下形式：

$$\left(\frac{\delta c}{c}\right)_\omega=\int_0^\infty\frac{\rho}{c}\left[\frac{\partial c}{\partial\rho}\right]_{\omega,\mu}\frac{\delta\rho}{\rho}dz+\int_0^\infty\frac{\mu}{c}\left[\frac{\partial c}{\partial\mu}\right]_{\omega,\rho}\frac{\delta\mu}{\mu}dz. \tag{1}$$

这里方括号中出现的符号，已知为在一特定深度上相速度对密度（或刚性）的偏微商。和 (7.71) 比较，我们得到

$$\frac{\rho}{c}\left[\frac{\partial c}{\partial\rho}\right]_{\omega,\mu}=-\frac{\rho\omega^2l_1^2}{2k^2\int_0^\infty\mu l_1^2dz} \tag{2}$$

和

$$\frac{\mu}{c}\left[\frac{\partial c}{\partial \mu}\right]_{\omega,\rho}=\frac{\mu\left\{k^2 l_1^2+\left(\frac{dl_1}{dz}\right)^2\right\}}{2k^2\int_0^\infty \mu l_1^2 dz}. \tag{3}$$

这里的符号易于使人误会，如（2）和（3）的左半部呈现为无量纲的。按右半部，显然其单位事实上是长度的倒数［从（1）可直接得到］。

Dorman 和 Ewing（1962）以及 Brune 和 Dorman（1963）首先进行了相速度偏微商的计算，对两种略有不同的结构，他们简单地得到了相速度，于是取其数值差。对 Love 波和 Rayleigh 波两者的变分方法是由 Jeffreys（1961）提出的。Rodi 等（1975）给出了求群速度的实际方案。

其中用（7.76）简化右边的分母。$\delta\rho/\rho$ 的权函数还是动能，对 $\delta\lambda$ 则权函数比例于膨胀应变能。用 $\delta\left(\lambda+\frac{2}{3}\mu\right)$和 $\delta\mu$ 改写（7.78）式，我们可得权函数比例于膨胀应变能和剪切应变能(见问题 2.6)。

7.3.3 Rayleigh-Ritz 法

象在（7.67）和（7.73）中给出的对 Love 波和 Rayleigh 波的变分原理，被用在 Rayleigh-Ritz 方法中以求得本征值和本征函数。在这个方法中，我们用基本函数 $\phi_i(z)$ 的线性组合来逼近这本征函数，对基本函数的选择，通常是使其满足 $z=0$ 和 $z=\infty$处的边界条件：

$$l_1(z)=\sum_{i=1}^{n} c_i\phi_i(z). \tag{7.79}$$

如果我们将此式代入（7.66）中的能量积分，则得到

$$I_1=\mathbf{c}^T \boldsymbol{A}_1\mathbf{c},\quad I_2=\mathbf{c}^T \boldsymbol{A}_2\mathbf{c},\quad I_3=\mathbf{c}^T \boldsymbol{A}_3\mathbf{c}, \tag{7.80}$$

其中 $\mathbf{c}=(c_1, c_2, \cdots, c_n)^T$，矩阵$\boldsymbol{A}_1$，$\boldsymbol{A}_2$ 和 $\boldsymbol{A}_3$ 具有如下元素：

$$A_{1ij}=\frac{1}{2}\int_0^\infty \rho\phi_i\phi_j dz,$$

$$A_{2ij}=\frac{1}{2}\int_0^\infty \mu\phi_i\phi_j dz, \tag{7.81}$$

$$A_{3ij}=\frac{1}{2}\int_0^\infty \mu\frac{d\phi_i}{dz}\frac{d\phi_j}{dz}dz.$$

令积分对 $c_i(i=1, 2, \cdots, n)$ 的导数等于零，由此得到了使 Lagrange 积分 $\omega^2 I_1-k^2 I_2-I_3$ 成为极小的系数向量 $\mathbf{c}$。其结果由下式给出

$$(\omega^2\boldsymbol{A}_1-k^2\boldsymbol{A}_2-\boldsymbol{A}_3)\mathbf{c}=0. \tag{7.82}$$

此方程明确表示了 $\mathbf{c}$ 的本征值-本征向量问题。有意义的解 $\mathbf{c}$ 仅当 k 为本征值时存在并对一给定的 ω 满足

$$|\omega^2\boldsymbol{A}_1-k^2\boldsymbol{A}_2-\boldsymbol{A}_3|=0. \tag{7.83}$$

一旦本征值被确定，相应的本征向量可由求解（7.82）得到。

由于这个本征值相对于本征函数的任意扰动而言都是稳定的，由求解（7.82）确定的近似的本征向量可用来通过(7.69)求得更精确的本征值。

竹内和小林（Takeuchi and Kobayashi, 1959）用指数衰减函数作为基本函数并在刚性随深度线性增加的半空间中测定了 Love 波的频散。他们得到了实质上和佐藤（sato, 1959）的数值积分法同样的结果：前者用手动计算机，后者用 IBM 650 计算机，二者所用的时间大致相同，由此证明了 Rayleigh-Ritz 法的效能。最近，Wiggins（1976 b）用了立方多项式，其基本函数如图 7.6 所示。它们的值和导数，在端点是 1 成是 0，对于为满足规定的边界条件而构成的一个尝试本征函数，这一点是很方便的。Wiggins 得出结论，用这些基本函数的 Rayleigh-Ritz 法和最有效的矩阵法不相上下。类似的方法也被 Buland 和 Gilbert (1976) 所采用。

7.3.4 面波的衰减

在第五章中，我们引进了空间的 $Q(\omega)$ 来描述手面体波随传播距离的衰减，并讨论了和频散有关的问题；我们已知对弹性

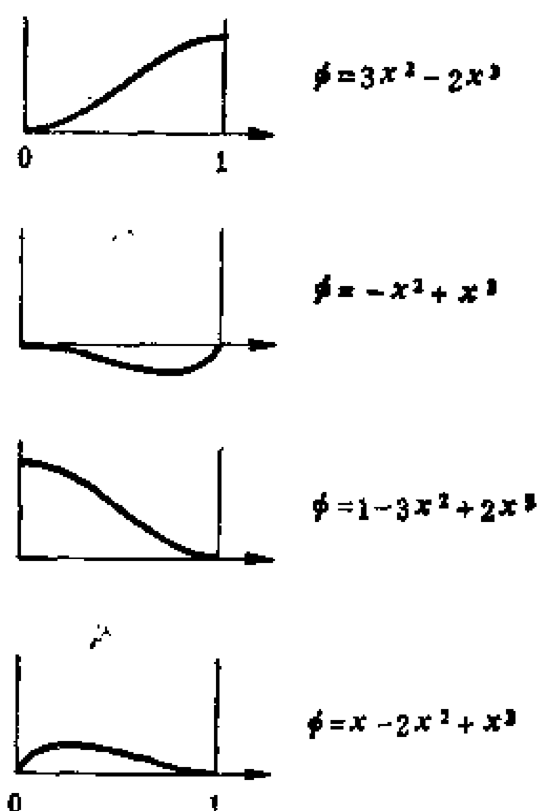


图 7.6

由 Rayleigh-Ritz 法求本征函数时，Wiggins 所用的基本函数。介质中可能出现很多非均匀层；这里画出的是用于每一层的四个归一化函数（$x=0$ 和 $x=1$ 相应于层边界）。四个函数中的每一个都表明 ϕ 和 $d\phi/dx$ 在 $x=0$ 和 1 处为 0 或为 1

介质，传播因子 $\exp[i(kx-\omega t)]=\exp[i\omega(x/c-t)]$ 可用

$$\exp[i(Kx-\omega t)]=\exp\left[\frac{(-\omega x)}{2\,c(\omega)Q(\omega)}\right]$$

$$\times\exp\left\{i\omega\left[\frac{x}{c(\omega)}-t\right]\right\}$$

代替。当一弹性波问题的解用 $c=c_e$ 给出时，则相应的非弹性的解可由下面的法则替换 c_e 给出：

$$\frac{1}{c_e}\to\frac{1}{c(\omega)}\left(1+\frac{i}{2Q(\omega)}\right). \tag{即5.87}$$

特别是，若 Q 实际上是常数，我们得到的频散是对数的并由下式给出：

$$\frac{c(\omega_1)}{c(\omega_2)}=1+\frac{1}{\pi Q}\ln\left(\frac{\omega_1}{\omega_2}\right).$$

对一具有高 Q 值的有耗散的介质，可认为法则 (5.87) 将对速度 c_e 引进一微小扰动 (Anderson and Archambeau, 1964; Anderson *et al.*, 1965)。在固定频率上引起的变化 δc 将有实部和虚部两种成分：

$$\left(\frac{\delta c}{c}\right)_\omega=\left(\frac{c}{c_e}-1\right)-\frac{i}{2\,Q^{空间}}. \tag{7.84}$$

首先让我们考虑由于在每一深度处 S 波速度的扰动而引起 Love 波相速度的变化。因 $\delta\mu/\mu$ 和 $\delta\rho/\rho$ 而引起的相速度的分数变化 $\delta c/c$ 已由 (7.71) 给出。

由于

$$\delta\beta/\beta=\frac{1}{2}(\delta\mu/\mu-\delta\rho/\rho),$$

忽略密度扰动，从 (7.71) 我们得到

$$\left(\frac{\delta c}{c}\right)_\omega=\frac{\int_0^\infty\left[k^2l_1^2+\left(\frac{dl_1}{dz}\right)^2\right]2\,\mu\frac{\delta\beta}{\beta}dz}{2\,k^2\int_0^\infty\mu l_1^2dz}. \tag{7.85}$$

用公式 (7.84) 替换上述方程中的 $\delta\beta/\beta$，我们得到 $\delta c/c$，含有实部和虚部两部分。其实部将导致由于非弹性引起的 Love 波的物质频散，还有由于介质的竖向不均匀性引起的几何频散。其虚部将导致 Love 波振幅的衰减，按 (7.84) 我们用下式来定义 Love 波的空间的 Q_L：

$$空间的\ Q_L^{-1}=-2\,\mathrm{Im}(\delta c/c)\omega. \tag{7.86}$$

将 $\mathrm{Im}(\delta\beta/\beta)=-1/(2\,Q_L)$ 代入 (7.85) 中，我们得到

$$空间\ Q_L^{-1}=\frac{\int_0^\infty\left[k^2l_1^2+\left(\frac{dl_1}{dz}\right)^2\right]\mu Q_\beta^{-1}dz}{k^2\int_0^\infty\mu l_1^2dz} \tag{7.87}$$

此公式表明，对包含有权函数和特殊模式的应变能密度成比例的剪切波，Love 波的 Q_L^{-1} 可表示为 Q_β^{-1} 的积分。

对 Rayleigh 波，λ 和 μ 的扰动被 α 和 β 的扰动所取代，考虑到（7.78）中的项 $\delta(\lambda+2\mu)/\lambda+2\mu=2\delta\alpha/\alpha+\delta\rho/\rho$,我们得到

$$\left(\frac{\delta c}{c}\right)_\omega=\frac{1}{4k^2UcI_1}\left\{\int_0^\infty\left(kr_1+\frac{dr_2}{dz}\right)^2\right.$$
$$\times(\lambda+2\mu)2\left(\frac{\delta\alpha}{\alpha}\right)dz$$
$$\left.+\int_0^\infty\left[\left(kr_2-\frac{dr_1}{dz}\right)^2-4kr_1\frac{dr_2}{dz}\right]2\mu\left(\frac{\delta\beta}{\beta}\right)dz\right\}. \tag{7.88}$$

用类似(7.86)的方式定义 Rayleigh 波的空间 Q_R，令 $\mathrm{Im}(\delta\alpha/\alpha)=-1/(2Q_\alpha)$，从（7.88）我们得到

$$\text{空间的 } Q_R^{-1}=\frac{1}{4k^2UcI_1}\left\{\int_0^\infty\left(kr_1+\frac{dr_2}{dz}\right)^2\right.$$
$$+(\lambda+2\mu)2Q_\alpha^{-1}dz+\int_0^\infty\left[\left(kr_2-\frac{dr_1}{dz}\right)^2-4kr_1\frac{dr_2}{dz}\right]$$
$$\left.\times2\mu Q_\beta^{-1}dz\right\}. \tag{7.89}$$

另外，Rayleigh 波的 Q_R^{-1} 可表示成具有适当权函数的 P 波和 S 波的 Q^{-1} 的积分。

至此，我们已经研究了空间 Q 可定义成随传播距离的衰减（补充 5.7）。测定传播的波，这个定义是合适的。然而，在几种地震测量的情况下直接观测到的是时间的 Q。最重要的情况是整个地球的一个特定的自由振荡的衰减。在此情况下，和 ω 固定的传播波实验相反，k 是不变的。由于模型参量的扰动引起相速度的变化，在固定 ω 和固定 k 的各实验之间是不同的。所以，相位函数被

$$\exp[i(kx-\Omega t)]=\exp\left[-\frac{\omega t}{2Q(\omega)}\right]\exp[ik(x-ct)]$$

代替。现在弹性速度 c_e 的替换是通过如下法则做出的。

$$c_e \to c\left(1-\frac{i}{2\,Q^{时间}}\right),$$

即

$$\left(\frac{\delta c}{c}\right)_k=\left(\frac{c}{c_e}-1\right)=\frac{i}{2\,Q^{时间}}. \qquad (7.90)$$

对这被扰动的介质，由于$(\omega,\ k+\delta k)$和$(\omega+\delta\omega,\ k)$两者是一对本征值，则在 $\omega-k$ 图中，两点连线的斜率将给出这一被扰动介质的群速度U：

$$U=\frac{\omega-(\omega+\delta\omega)}{(k+\delta k)-k}=-\frac{\delta\omega}{\delta k}. \qquad (7.91)$$

但在一种情况下，我们有 $k+\delta k=K=k(1+i/2\,Q^{空间})$，而在另一情况下，我们有 $\omega+\delta\omega=\Omega=\omega(1-i/2\,Q^{时间})$。由此，我们求得了$-\delta\omega/\delta k$并得到一般法则

$$时间的\ Q^{-1}=\frac{U}{c}\times 空间的\ Q^{-1}. \qquad (7.92)$$

补充 7.7

各向异性的一些效应

在具有竖向不均匀性的各向异性介质中，面波传播的一般理论，就概念而言，是7.2节给出的传播矩阵法的推广。位移-应力向量[见(5.101)]现在其长度为6，一般地我们不能说 Love 波和 Rayleigh波是独立的面波族。相反地，面波有一个统一的族，在稍有各向异性的介质中，它可以分解成准 Love 运动和准 Rayleigh运动。

如果各向异性较弱，则面波的相速度 c 通过下式表明它和传播方位的方向 ϕ 有关：

$$c(\omega,\ \phi)=A(\omega)+B(\omega)\cos 2\phi+C(\omega)\sin 2\phi$$
$$+E(\omega)\cos 4\phi+F(\omega)\sin 4\phi \qquad (1)$$

(Smith and Dahlen,1973)。这个公式是近似的，它类似于体波的结果(5.102)。Forsyth(1975)已将(1) 应用于太平洋中的面波资料，但他并没有把 4ϕ 项算入，因为实际上(就目前的资料)它的影响很小。

对于均匀层叠置结合面成的各向异性的半空间，Crampin (1970,

1971，1975，1977）已对面波频散作了详细的讨论。因为各向异性的晶体(例如橄榄石)有某些优势排列，其最初的固化是在如洋中脊的扩张中心附近，如果各向异性出现在地球上，那么通过各向异性的水平面就象一个对称的平面。取 x_3 为深度方向，Love(1944)证明，当一个或三个脚标为 3 时，只有当 $c_{ijkl}=0$ 时，才有相对于水平面的对称性。Crampin(1975)描述了这类各向异性的面波质点运动的特性。称之为倾斜的Rayleigh运动，它是由包括垂直和水平两个轴在内的椭圆形质点运动所组成的，而椭圆面对径向平面是倾斜的(见 5.6 节)。因此，质点运动有一个分量横截波传播的慢度方向。水平分量是同相的，但是与垂直分量相位相差 $\pm\frac{\pi}{2}$。在挪威地震仪台阵中，对横穿欧亚的面波，Crampin 和 King(1977)描述了这种质点运动的几组观测值。

这两类 Q 首先由 Brune(1962)在面波的研究中加以区分。当我们对比用驻波实验和用行波实验测定频散波的 Q 时，上述公式是重要的。对非频散波 $c=U$，则两个 Q 之间无差别。

如果我们用稳相近似式 (7.18) 测定频散波的衰减，则方程(7.92)很容易理解。对给定的 x 和 t，由 $x/t=U(\omega)$ 给出的频率 ω 在记录中占优势。由于具有频率 ω 的波，在 $t=x/U(\omega)$ 的整个时间区间内，在介质中已存在，则它必须按如下因子衰减：

$$\exp\left[\frac{-\omega t}{2\,\text{时间的}\,Q(\omega)}\right]=\exp\left[\frac{-\omega x}{2\,U(\omega)\text{时间的}Q(\omega)}\right]. \tag{7.93}$$

因为，按定义，这个因子等于

$$\exp\left[\frac{-\omega x}{2\,c(\omega)\text{空间的}\,Q(\omega)}\right],$$

所以我们即得到(7.92)。

7.4 竖向非均匀介质中 Green 函数的面波项

在这一节中，我们将得到面波的一个简洁的解，这个面波是在竖向非均匀介质中，由和时间的关系为 $e^{-i\omega t}$ 的地下点力所产生的。首先，我们对柱坐标(r, φ, z)中的运动方程给出一般解，我们将用前几节导出的运动-应力向量和一组作为 r，φ 函数的向量来描述水平向的传播。等效于一个点源的应力间断就展开为在水平方向上变化的向量函数的级数。于是我们得到一个具有所规定的间断的解，它在自由表面和无限深度处也满足边界条件。Haskell(1964)，Harkrider(1964)，Ben-Menahem 等(1970)和 Hudson(1969)都曾使用过这个方法。将变分原理应用于在 k 平面极点处算出的留数，从而得到一简洁结果。Keilis-Borok 和 Yanovskaya (1962)、Harkrider 和 Anderson (1966)，Vlaar (1966)及斋藤(Saito，1967)等都研究了这最后的一步。

首先，我们用 Herrera(1964)的互易定理来描述处理二维情况的一个简单方法，遗憾的是不能应用于三维情况。然后，我们将按斋藤(Saito，1967)方法去求三维的解。

7.4.1 二维情况

首先让我们用互易定理 (2.35) 来寻找 Love 波和 Rayleigh 波本征函数的正交关系。忽略体力并将 $\boldsymbol{v}(x,t)$和 $\boldsymbol{u}(x,t)$的 Fourier 变换写成 $\boldsymbol{v}(x,\omega)$ 和 $\boldsymbol{u}(x,\omega)$，则 (2.35) 的变换可改写成

$$0=\iint_{S}\{\boldsymbol{v}(x,\omega)\cdot\boldsymbol{T}(\boldsymbol{u}(x,\omega),\boldsymbol{n})-\boldsymbol{u}(x,\omega)\cdot\boldsymbol{T}(\boldsymbol{v}(x,\omega),\boldsymbol{n})\}dS. \tag{7.94}$$

[注意：(2.35)的褶积在这里已变成了变换之乘积。]对一给定的无体力的介质，这个方程将适用于运动方程的任意一对解 $\boldsymbol{u}$ 和 $\boldsymbol{v}$。我们取在 x 方向传播的 Love 波的两个不同的振型为 $\boldsymbol{u}$ 和 $\boldsymbol{v}$，并

定义 S 为一表面，其各个角位于(a,o)，(b,o)，(a,D)和(b,D)且包围阴影板，如图 7.7 所示。

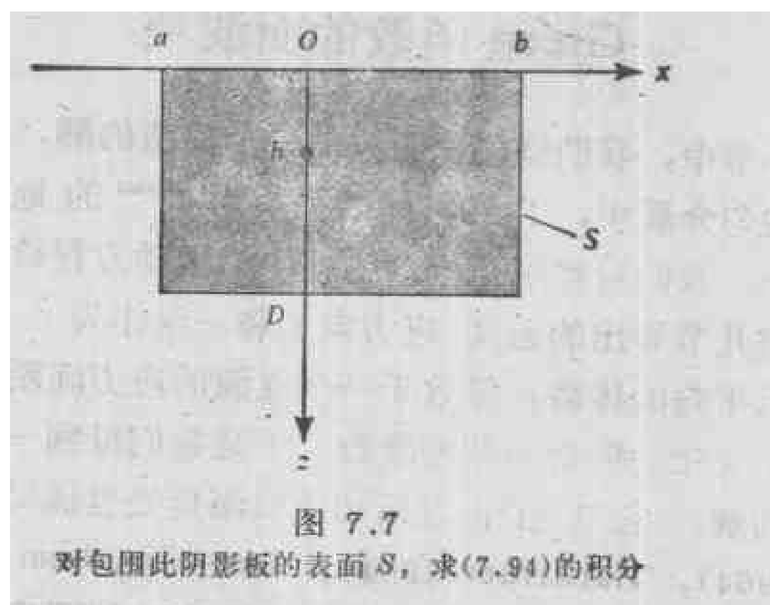


图 7.7
对包围此阴影板的表面 S，求(7.94)的积分

对 Love 波，在自由面 $z=0$ 处牵引力 T 为 0，在 $z=\infty$ 处运动为 0。沿竖直面的位移和牵引力分量对第一个解为

$$u_y=l_1(\omega,k_n,z)\exp(ik_nx),$$

$$T_y=\mu\frac{\partial u_y}{\partial x}=ik_n\,\mu\,l_1\exp(ik_nx);\tag{7.95}$$

对第二个解为

$$v_y=l_1(\omega,k_m,z)\exp(ik_mx),\tag{7.96}$$

$$T_y=ik_m\,\mu\,l_1\exp(ik_mx).$$

其它分量对积分(7.94)无贡献。将(7.95)和(7.96)代入(7.94)，当 $D\to\infty$时，我们得到

$$\int_0^\infty i(k_n-k_m)\mu(z)l_1(\omega,k_m,z)l_1(\omega,k_n,z)dz$$
$$\times\exp[i(k_n+k_m)a]$$
$$=\int_0^\infty i(k_n-k_m)\mu(z)l_1(\omega,k_m,z)l_1(\omega,k_n,z)dz$$
$$\times\exp[i(k_n+k_m)b],$$

这个等式适用于任意的 a 和 b，其条件是当且仅当

$$\int_0^{\infty} \mu(z) l_1(\omega, k_m, z) l_1(\omega, k_n, z) dz = 0 \quad 对\ k_n \neq k_m. \qquad (7.97)$$

对固定的频率 ω，当刚性分布 $\mu(z)$为一权函数时，则 Love 波不同振型的本征函数是相互正交的。

对 Rayleigh 波，类似地，我们取 n 阶振型为 u，则沿竖直面的位移分量和牵引力分量为

$$\begin{aligned}
u_x &= r_1(\omega, k_n, z)\exp(ik_n x), \\
u_z &= ir_2(\omega, k_n, z)\exp(ik_n x), \\
\tau_{xz} &= iT_1(\omega, k_n, z)\exp(ik_n x) \\
&= i\left\{\lambda \frac{dr_2}{dz} + (\lambda + 2\mu) k_n r_1\right\}\exp(ik_n x), \qquad (7.98) \\
\tau_{zx} &= T_2(\omega, k_n, z)\exp(ik_n x) \\
&= \left(\mu \frac{dr_1}{dz} - \mu k_n r_2\right)\exp(ik_n x).
\end{aligned}$$

用 k_m 代替 k_n 可得到 v 的各分量。于是 Rayleigh 波的正交关系为

$$\sum_{i=1}^{2} \int_0^{\infty} \{r_i(\omega, k_n, z) T_i(\omega, k_m, z) - r_i(\omega, k_m, z) T_i(\omega, k_n, z)\} dz = 0$$

或

$$\begin{aligned}
\int_0^{\infty} \Big\{ & (\lambda + 2\mu)(k_m - k_n) r_1(\omega, k_n, z) r_1(\omega, k_m, z) \\
& - \mu(k_m - k_n) r_2(\omega, k_n, z) r_2(\omega, k_m, z) \\
& + \lambda\left[r_1(\omega, k_n, z)\frac{dr_2(\omega, k_m, z)}{dz} - r_1(\omega, k_m, z)\frac{dr_2(\omega, k_n, z)}{dz}\right] \\
& \cdot \mu\left[r_2(\omega, k_n, z)\frac{dr_1(\omega, k_m, z)}{dz} - r_2(\omega, k_m, z)\frac{dr_1(\omega, k_n, z)}{dz}\right]\Big\} dz = 0. \qquad (7.99)
\end{aligned}$$

处理这些正交关系，我们将再用互易定理进而去求 Green 函数的面波项。对 Love 波和 Rayleigh 波，我们分别使用了如(7.95)和(7.98)对 u 所确定的同样的解，但对 v，我们使用了二维 Green 函数 $\mathbf{G}_k\exp(-i\omega t)$，即对位于 $x=0$，$z=h$ 处具有时间关系为 $\exp(-i\omega t)$ 的线力的响应。此线平行于 y 轴(即 x_2 轴)，且力作用在 x_k 方向上(即 x 或 y 或 z)，所以

$$-\rho\omega^2 G_{ik}(x,z;0,h;\omega)=\frac{\partial}{\partial x_j}\tau_{ij}(\mathbf{G}_k)+\delta_{ik}\delta(x)\delta(z-h). \tag{7.100}$$

采用从(2.35)到表示定理(2.41)同样的步骤，我们得到

$$u_k(0,h)=\int_S\{G_{ik}(x,z;0,h;\omega)T_i(\mathbf{u},\mathbf{n})-u_i(x,z)T_i(\mathbf{G}_k,\mathbf{n})\}dS. \tag{7.101}$$

现在，我们再选择如图 7.7 所示的同样的积分表面 S，但这次不仅有 $D\to\infty$，而且还有 $a\to\infty$ 和 $b\to\infty$。由于来自线源的面波未经历几何扩散，而体波经历了，我们预期在远距离处的 Green 函数将完全由从线源向外传播的面波所组成。因此，对较大的 x，Green 函数的 y 分量由 Love 波的和给出，

$$G_{yy}(x,z;0,h;\omega)\sim\begin{cases}\sum_m b_{m2}^+(h)l_1(\omega,k_m,z)\exp(ik_mx) & x\gg 0\\ \sum_m b_{m2}^-(h)l_1(\omega,k_m,z)\exp(-ik_mx) & x\ll 0.\end{cases} \tag{7.102}$$

x 和 z 的分量是由 Rayleigh 波组成的，

$$G_{xk}(x,z;0,h;\omega)\sim\begin{cases}\sum_m a_{mk}^+(h)r_1(\omega,k_m,z)\exp(ik_mx) & x\gg 0\\ \sum_m a_{mk}^-(h)r_1(\omega,k_m,z)\exp(-ik_mx) & x\ll 0,\end{cases} \tag{7.103}$$

$$G_{zk}(x,z;0,h;\omega)\sim\begin{cases}\sum_m ia_{mk}^{+}(h)r_2(\omega,k_m,z)\exp(ik_m x) & x\gg 0\\ -\sum_m ia_{mk}^{-}(h)r_2(\omega,k_m,z)\exp(-ik_m x) & x\ll 0.\end{cases}$$

(7.103)

将(7.103)和(7.95)代入(7.101)，我们得到位移的 y 分量：

$$u_y(0,h)=\sum_m b_{m2}^{+}(h)\int_0^{\infty}i(k_n-k_m)\mu(z)l_1(\omega,k_n,z)$$

$$\times l_1(\omega,k_m,z)\exp[i(k_n+k_m)b]dz$$

$$-\sum_m b_{m2}^{-}(h)\int_0^{\infty}i(k_n+k_m)\mu(z)l_1(\omega,k_n,z)l_1(\omega,k_m,z)$$

$$\times\exp[i(k_m-k_n)a]dz.$$

用正交关系(7.97)，此式简化为

$$u_y(0,h)=l_1(\omega,k_n,h)$$

$$=-2\,ik_n b_{n2}^{-}(h)\int_0^{\infty}\mu(z)l_1^2(\omega,k_n,z)dz$$

或

$$b_{n2}^{-}(h)=\frac{l_1(\omega,k_n,h)}{-4\,ik_nI_2},\tag{7.104}$$

其中 I_2 在(7.66)中已定义过。类似地，以 $u_y=l_1\exp(-ik_nx)$ 代替(7.95)，我们得到

$$b_{n2}^{+}(h)=b_{n2}^{-}(h).\tag{7.105}$$

将(7.104)和(7.105)代入(7.102)，我们得到取向在 y 方向上的线力所产生的 Green 函数的 Love 波项，

$$G_{yy}(x,z;0,h;\omega)\sim\sum_n\frac{l_1(\omega,k_n,h)l_1(\omega,k_n,z)}{4\,k_nI_2}$$

$$\times\exp\left(ik_nx+i\frac{\pi}{2}\right)\quad x\gg 0,\tag{7.106}$$

或用(7.70)

$$G_{yy}(x,z;0,h;\omega)\sim\sum_n\frac{l_1(\omega,k_n,h)l_1(\omega,k_n,z)}{4\,k_ncUI_1}$$

$$\times \exp\left(ik_n x + i\frac{\pi}{2}\right) \qquad x \gg 0,$$

其中 I_1 和 I_2 在(7.66)中给出。

上述方程表明 Green 函数的 Love 波项相当简单。对每一振型，震源深度 h，接收点深度 z，传播距离 x 和以 c, U 与 I_1 表示的介质性质的影响都被分离了。一旦本征值-本征函数的问题解决了，则由线力产生的 Love 波振幅的计算就非常简单了。后面我们将指出，对同样的公式稍做修正，即可应用于点力产生的 Love 波。

类似地，将(7.103)和(7.98)代入(7.101)并应用正交关系(7.99)，可得到 Green 函数的 Rayleigh 波项。例如，令(7.101)中的脚标 $k=1$(x 方向)，我们得到

$$\begin{aligned} u_x(0,h) &= r_1(\omega,k_n,h) \\ &= -ia_{n1}^-(h)\int_0^\infty\Big\{2k_n[(\lambda+2\mu)r_1^2(\omega,k_n,z) \\ &\qquad + \mu r_2^2(\omega,k_n,z)] \\ &\quad + 2\Big[\lambda r_1(\omega,k_n,z)\frac{dr_2(\omega,k_n,z)}{dz} \\ &\quad - \mu r_2(\omega,k_n,z)\frac{dr_1(\omega,k_n,z)}{dz}\Big]\Big\}dz \end{aligned}$$

或

$$a_{n1}^-(h) = \frac{r_1(\omega,k_n,h)}{-i4k_n\left(I_2+\dfrac{I_3}{2k_n}\right)} = \frac{r_1(\omega,k_n,h)}{-i4k_ncUI_1}, \quad (7.107)$$

其中 I_1, I_2, I_3 在(7.74)中给出。此外，我们还得到 $a_{n1}^+(h) = a_{n1}^-(h)$。将它们代入(7.103)，我们即得到作用于 x 方向的线力产生的 Green 函数的 Rayleigh 波项：

$$G_{xx}(x,z;0,h;\omega) \sim \sum_n \frac{r_1(\omega,k_n,h)r_1(\omega,k_n,z)}{4k_ncUI_1}\times$$

$$\times \exp\left(ik_n x + i\frac{\pi}{2}\right) \quad x \gg 0, \qquad (7\ 108)$$

$$G_{zz}(x,z;0,h;\omega) \sim \sum_n \frac{r_1(\omega,k_n,h)r_2(\omega,k_n,z)}{4k_n cUI_1}$$

$$\times \exp(ik_n x + i\pi) \quad x \gg 0,$$

而且，这是一个非常简单的形式，它分离了源，接收点和路径的效应。对取向在 z 方向上的线力，同样可得到其 Green 函数为

$$G_{xz}(x,z;0,h;\omega) \sim \sum_n \frac{r_2(\omega,k_n,h)r_1(\omega,k_n,z)}{4k_n cUI_1}$$

$$\times \exp(ik_n x) \qquad x \gg 0, \qquad (7\ 109)$$

$$G_{zz}(x,z;0,h;\omega) \sim \sum_n \frac{r_2(\omega,k_n,h)r_2(\omega,k_n,z)}{4k_n cUI_1}$$

$$\times \exp\left(ik_n x + i\frac{\pi}{2}\right) \qquad x \gg 0, \qquad (7.110)$$

注意，出现在 G_{xx}，G_{yy} 和 G_{zz} 中的相移都有$\frac{1}{2}\pi$的相位滞后。

补充 7.8

垂直运动的符号规定

因为 x_3 或 z 轴是指向下的，这里，取向下为垂直位移的正方向。这是和习惯作法相反的。地震学家们自然地认为深度向下为正，但后来却前后矛盾地选择了地震运动的垂直分量向上为正。本书中，在我们用 (x,y,z) 或 (r,φ,z) 坐标求出结果的任何地方，其位移和深度两者，我们均取 z 轴向下为正。当然，在球极坐标中，在地球的中心点 $r=0$，作为垂向坐标的 r，自然是垂直向上为正，如我们将在第八章和第九章有关部分中所假设的。

粗略地看一下这些解的形式，其分母中含有 k_n，这表明了振幅谱和 ω^{-1} 的关系。然而，I_1(归一化的 r_1 和 r_2)以下述方式依赖于 ω，即 $k_n I_1$ 仅为 ω 的弱变化函数。见问题 7.7。

7.4.2 三维情况

对一点源其 Green 函数的自然坐标系是图 7.8 中所定义的圆柱系统 (r, φ, z)。[让我们回顾到补充 6.5 并从分别代表 P, SV, SH 波的三个标量势 ϕ, ψ, χ 入手。我们证明了在一均匀体中的弹性位移可表示成

$$u=\nabla\phi+\nabla\times\nabla\times(0,0,\psi)+\nabla\times(0,0,\chi), \qquad (7.111)$$

这里的势函数满足补充 6.5 中的波动方程(3)。依分离变量法，通解可由以下基本解的叠加而得到：

$$\begin{aligned}\phi(x,\omega)&=J_m(kr)e^{im\phi}(Ae^{-\gamma z}+Be^{\gamma z})\exp(-i\omega t),\\ \psi(x,\omega)&=J_m(kr)e^{im\phi}(Ce^{-\nu z}+De^{\nu z})\exp(-i\omega t),\\ \chi(x,\omega)&=J_m(kr)e^{im\phi}(Ee^{-\nu z}+Fe^{\nu z})\exp(-i\omega t),\end{aligned} \qquad (7.112)$$

其中 $J_m(kr)$ 为 m 阶 Bessel 函数；m 为整数；A, B, C, D, E, F 是常数；$\gamma=(k^2-\omega^2/\alpha^2)^{1/2}$, $\nu=(k^2-\omega^2/\beta^2)^{1/2}$。[对比(7.112)和补充 6.6 中的轴对称解]。我们将发现将 r, ϕ 的关系归并为下式是有用的：

$$Y_k^m(r, \phi)=J_m(kr)e^{im\phi}, \qquad (7.113)$$

此式很自然地可称为基本的水平波函数，因为对势函数而言，它只表征水平传播。

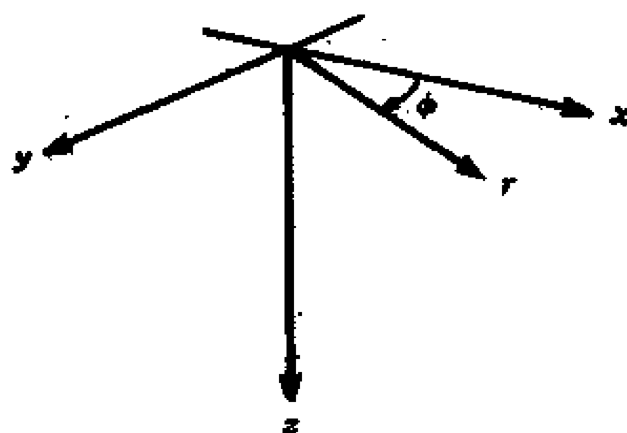


图 7.8
笛卡尔坐标和柱面极坐标的取向，通常用它来分析在一竖向非均匀介质中点源产生的波

事实上，对于我们继续使用势函数方法的一个明显障碍是我

们现在的兴趣在于竖向非均匀介质，而(7.112)的解却要求均匀性。然而，势函数可帮助我们把各种适宜于不同物理变量的水平波函数分出来，因为这方面的问题不因竖向的不均匀性而变化。然后，继续用均匀介质，通过(7.111)式，从势函数可构成(u_r, $u\phi$, u_z)。很容易得到 P 波分量或梯度 ϕ，同时对 SV 对 SH 我们有

$$\boldsymbol{u}^{SV}=\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial r\partial z},\ \frac{1}{r}\frac{\partial^2\psi}{\partial z\partial\phi},\ -\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial\psi}{\partial r}\right)-\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial\phi^2}\right),\tag{7.114}$$

$$\boldsymbol{u}^{SH}=\left(\frac{1}{r}\frac{\partial\chi}{\partial\phi},\ -\frac{\partial\chi}{\partial r},\ 0\right).$$

在 2.6 节中，对一般的正交曲线坐标，我们已得到应力-位移关系，按(2.50)和(2.45)我们可用位移分量给出作用在水平面上的牵引力：

$$\tau_{rz}=\mu\left(\frac{\partial u_z}{\partial r}+\frac{\partial u_r}{\partial z}\right),$$

$$\tau_{z\phi}=\mu\left(\frac{1}{r}\frac{\partial u_z}{\partial\phi}+\frac{\partial u_\phi}{\partial z}\right),\tag{7.115}$$

$$\tau_{zz}=\lambda\,\mathrm{div}\,\boldsymbol{u}+2\mu\frac{\partial u_z}{\partial z},$$

如果我们将势函数(7.112)代入(7.114)和(7.115)，我们即得到在深度 z 处作用于水平面上的牵引力 $\boldsymbol{T}$ 和位移 $\boldsymbol{u}$，其形式如下：

$$\begin{aligned}\boldsymbol{u}=&[l_1(\omega,k,z)\boldsymbol{T}_k^m(r,\phi)+r_1(\omega,k,z)\boldsymbol{S}_k^m(r,\phi)\\&+r_2(\omega,k,z)\boldsymbol{R}_k^m(r,\phi)]\exp(-i\omega t),\\\boldsymbol{T}=&[l_2(\omega,k,z)\boldsymbol{T}_k^m(r,\phi)+r_3(\omega,k,z)\boldsymbol{S}_k^m(r,\phi)\\&+r_4(\omega,k,z)\boldsymbol{R}_k^m(r,\phi)]\exp(-i\omega t).\end{aligned}\tag{7.116}$$

$\boldsymbol{u}$ 和 $\boldsymbol{T}$ 与 r，ϕ 的关系是由下式定义的三个正交向量函数描述的：

$$\boldsymbol{T}_k^m(r,\phi)=\frac{1}{kr}\frac{\partial Y_k^m}{\partial\phi}\hat{\boldsymbol{r}}-\frac{1}{k}\frac{\partial Y_k^m}{\partial r}\hat{\boldsymbol{\phi}},$$

$$S_k^m(r,\phi)=\frac{1}{k}\frac{\partial Y_k^m}{\partial r}\hat{r}+\frac{1}{kr}\frac{\partial Y_k^m}{\partial\phi}\hat{\phi}, \qquad (7.117)$$

$$R_k^m(r,\phi)=-Y_k^m(r,\phi)\hat{z},$$

其中 $\hat{r}$,$\hat{\phi}$ 和 $\hat{z}$ 是 r、ϕ、z 方向上的单位向量。对于 z 的关系是由六个标量函数 l_1,l_2,r_1,r_2,r_3 和 r_4 描述的。可以证明，首先用 $\boldsymbol{f}=(l_1,l_2)^T$ 给出(7.24)，然后用 $\boldsymbol{f}=(r_1,r_2,r_3,r_4)^T$ 给出(7.28)，这些函数[从势函数(7.112)中与 z 有关的项得到的]确实满足 7.2 节中讨论过的熟知的方程 $\partial\boldsymbol{f}/\partial z=\boldsymbol{Af}$。

对于均匀介质，这个结果促使我们从公式(7.116)开始，甚至在竖向不均匀的介质中，将它代入运动方程和应力-应变关系式中。按此方法，我们可直接地获得一阶联立微分方程(7.24)和(7.28)，发现对柱状波的运动-应力向量，其与 z 的关系和平面波问题中的 z 关系完全相同。

我们刚刚给出了柱状波和平面波具有共同的 z 相关性的准确原因。如果我们取向量函数（7.117）中的 r 较大，则直观上此结果是合理的。首先，象在（6.15）中所做的那样，我们以 $[H_m^{(1)}(kr)+H_m^{(2)}(kr)]/2$ 代换 $J_m(kr)$，并用外去波的渐近展开式

$$H_m^{(1)}(kr)\sim\sqrt{\frac{2}{\pi kr}}\exp\left[i\left(kr-\frac{2m+1}{4}\pi\right)\right].$$

我们还将忽略随距离的衰减比 $1/\sqrt{r}$ 更快的项。于是向外去的波

$$T_k^m(r,\phi)\sim-i\sqrt{\frac{1}{2\pi kr}}\exp\left(ikr-i\frac{2m+1}{4}\pi+im\phi\right)\hat{\phi}$$

$$S_k^m(r,\phi)\sim i\sqrt{\frac{1}{2\pi kr}}\exp\left(ikr-i\frac{2m+1}{4}\pi+im\phi\right)\hat{r}, \qquad (7.118)$$

$$R_k^m(r,\phi)\sim-\sqrt{\frac{1}{2\pi kr}}\exp\left(ikr-i\frac{2m+1}{4}\pi+im\phi\right)\hat{z},$$

这些式子表明，在大距离处，这些波的特性局部地和适当偏振的平面 Love 波与平面 Rayleigh 波相象。而且，它们和 z 的关系可由平面波的研究中得到，同时，我们还可以用在柱状波问题中的平面波根据运动应力向量得到的所有结果。

现在让我们考虑在竖向非均匀介质中由点力 $\boldsymbol{F}\exp(-i\omega t)$ 产生的面波。取作用点为 $r=0$，$z=h$，相应的体力（每单位体积中的力）为 $\boldsymbol{F}\exp(-i\omega t)[\delta(r)/(2\pi r)]\delta(z-h)$。下面我们将取通常使用的笛卡尔坐标，它通过 $x=r\cos\varphi$，$y=r\sin\varphi$，和 (r,φ,z) 发生关系。同时注意 $\delta(r)/(2\pi r)=\delta(x)\delta(y)$（由于对水平的平面积分时，此等式的每一边均有同样的效应）。按方程(3.4)，所施的体力等效于 $z=h$ 处水平面上牵引力的间断性，可由下式给出：

$$\boldsymbol{T}(h+0)-\boldsymbol{T}(h-0)=-\boldsymbol{F}\exp(-i\omega t)\delta(x)\delta(y). \quad (7.119)$$

补充 7.9

关于水平的波函数

在第六章和第七章中描述的平面波，其水平波函数是 e^{ikx}。它是平面波独有的特点，即这个相同的相位因子，对全部有意义的物理变量（如位移、膨胀、应变和应力）是共同的。对非笛卡尔坐标，第一个问题是，分离解甚至可能是不存在的。然而，对柱坐标和球极坐标分离解确实存在，这对地球物理中考察波的传播是十分重要的。

面临的下一个问题是这样一个事实，在例如柱坐标中，从一个物理变量到另一个物理变量，其水平波函数可能是不同的。在补充 6.6 中我们看到了一个简单的例子，对于 u_z 和 τ_{zz}，在补充 6.6 中是 J_0。为讨论一般的轴对称问题，不但有一个对 k 的依赖关系，而且还有一个对方位序数 m 的依赖关系，并且在 (7.116) 和 (7.117) 中，我们发现，处理三个不同的水平波函数是很方便的，它们每个都是向量。

对平面波的水平波函数，用 Fourier 反变换

$$f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f(k)e^{+ikx}dk \quad (1)$$

合成水平空间变量 x 的各函数是可能的。在补充 6.10 中，对水平相位

函数 J_m，我们得出了类似的结果（反 Hankell 变换）。于是，将它们和 Fourier 级数

$$f(\phi)=\frac{1}{2\pi}\sum_{m=-\infty}^{\infty}f(m)e^{im\phi}$$

$$f(m)=\int_0^{2\pi}f(\phi)e^{-im\phi}d\phi \tag{2}$$

联合起来，则求得 $(r,\ \phi)$ 的向量函数的展开式是可能的。这个展开式为

$$f(r,\phi)=\frac{1}{2\pi}\sum_{m=-\infty}^{\infty}\int_0^{\infty}[f_T(k,m)\boldsymbol{T}_k^m(r,\phi)+f_S(k,m)\boldsymbol{S}_k^m(r,\phi)$$

$$+f_R(k,m)\boldsymbol{R}_k^m(r,\phi)]kdk, \tag{3}$$

这里的 $\boldsymbol{T}_k^m$，$\boldsymbol{S}_k^m$，$\boldsymbol{R}_k^m$ 是（7.117）中给出的水平波函数，且（3）中的系数由下式给出：

$$\begin{aligned}
f_T(k,m)&=\int_0^{2\pi}\int_0^{\infty}\boldsymbol{f}(r,\phi)\cdot[\boldsymbol{T}_k^m(r,\phi)]^*r\ dr\ d\phi,\\
f_S(k,m)&=\int_0^{2\pi}\int_0^{\infty}\boldsymbol{f}(r,\phi)\cdot[\boldsymbol{S}_k^m(r,\phi)]^*r\ dr\ d\phi,\\
f_R(k,m)&=\int_0^{2\pi}\int_0^{\infty}\boldsymbol{f}(r,\phi)\cdot[\boldsymbol{R}_k^m(r,\phi)]^*r\ dr\ d\phi.
\end{aligned}\tag{4}$$

在笛卡尔坐标中，水平波函数具有一可表示为 $\delta(k-k')=\frac{1}{2\pi}\times\int_{-\infty}^{\infty}\times\exp[i(k-k')x]dx$ 的正交性。对于我们的向量函数，一个等效结果在(7.121) 中给出。

解的方法将是 (i) 将此间断性分解成它的 $(k,\ m)$ 分量 (ii) 对每一个 $(k,\ m)$ 解方程 $\partial\boldsymbol{f}/\partial z=\boldsymbol{A}\boldsymbol{f}$，其中 $\boldsymbol{f}$ 是和 z 有关的运动-应力向量，它在跨过 $z=h$ 处具有已知的间断性，于是 (iii) 用它的 $(k,\ m)$ 分量的叠加构成这个解为 $(r,\ \phi,\ z)$ 的函数。

我们设法求出下式中的一些系数：

$$-\boldsymbol{F}\exp(-i\omega t)\delta(x)\delta(y)=\frac{\exp(-i\omega t)}{2\pi}\sum_m\int_0^{\infty}k[f_T(k,m)\boldsymbol{T}_k^m$$

$$+f_S(k,m)S_k^m+f_R(k,m)R_k^m]dk. \tag{7.120}$$

恰好 T_k^m，S_k^m 和 R_k^m 是相互正交的，这三种类型的水平波函数中，每一种都以如下形式满足正交性关系（对不同的 k 和 m）：

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{\infty} T_k^m(r,\phi)\cdot[T_{k'}^{m'}(r,\phi)]^* r\ dr\ d\phi=\frac{2\pi\delta_{mm'}\delta(k-k')}{\sqrt{kk'}}, \tag{7.121}$$

其中 * 代表复共轭。由此得出（7.120）的展开式系数由下式给出

$$f_T(k,m)=-\int_0^{2\pi}\int_0^{\infty}[T_k^m(r,\phi)]^*\cdot F\delta(x)\delta(y)r\ dr\ d\phi, \tag{7.122}$$

对 f_S 和 f_R 有相似的结果。

考虑到 $\int_0^{2\pi}\int_0^{\infty}(\quad)r\ dr\ d\phi=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}(\quad)dxdy$ 以及如下的重要特性：

$$T_k^m(r,\phi)=k^{-1}\nabla\times(0,0,Y_k^m), \tag{7.123}$$

再利用笛卡尔坐标，则（7.122）中二重积分的计算就可简化。

在笛卡尔坐标中解释（7.123），从（7.122）我们得到

$$f_T(k,m)=$$

$$-\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{k}\left(F_x\frac{\partial Y_k^{-m}}{\partial y}-F_y\frac{\partial Y_k^{-m}}{\partial x}\right)\delta(x)\delta(y)dxdy$$

$$=-F_x e^{-im\pi/2}\frac{\partial}{\partial(ky)}J_m(ky)\Big|_{y=0}$$

$$+F_y\frac{\partial}{\partial(kx)}J_m(kx)\Big|_{x=0} \tag{7.124}$$

由于除 $m=\pm1$ 以外，J_m 在原点的微商为零，所以，除 $m=\pm1$ 外，有 $f_T(k,m)=0$。因而，在 $\zeta=0$ 处，$(\partial/\partial\zeta)J_{\pm1}(\zeta)=\pm\frac{1}{2}$，所以

$$f_T(k,1)=\frac{1}{2}(F_y+iF_x),$$
$$f_T(k,-1)=\frac{1}{2}(-F_y+iF_x). \quad (7.125)$$

对 $f_S(k,m)$ 有类似的计算方法，利用

$$S_k^m(r,\phi)=k^{-1}\nabla Y_k^m(r,\phi) \quad (7.126)$$

并在笛卡尔坐标中计算，则求得除 $m=\pm1$ 外，$f_S(k,m)=0$,于是有

$$f_S(k,1)=\frac{1}{2}(-F_x+iF_y),$$
$$f_S(k,-1)=\frac{1}{2}(F_x+iF_y). \quad (7.127)$$

对 $f_R(k,m)$，我们直接在柱坐标中计算：

$$f_R(k,m)=\int_0^{2\pi}\int_0^{\infty}F_z\frac{\delta(r)}{2\pi r}e^{-im\phi}J_m(kr)r\ dr\ d\phi,$$

所以除 $m=0$ 外，有 $f_R(k,m)=0$，于是有

$$f_R(k,0)=J_0(0)F_z=F_z. \quad (7.128)$$

对牵引力的不连续性，现在已得到了全部展开系数，其中仅 $m=0$ 和 $m=\pm1$ 的项才是有贡献的项。

我们的下一步是求解运动-应力向量(l_1, l_2, r_1, r_2,r_3, r_4)，它们在牵引力分量 l_2, r_3, r_4上（分别地）具有规定的不连续性 f_T, f_S, f_R。当然，我们的解必须满足运动方程和自由表面条件：

在 $z=0$ 处 $\qquad l_2=r_3=r_4=0. \qquad (7.129)$

它也必须满足辐射条件，这条件要求当 $z\to\infty$时 l_1, r_1, r_2只能含有下行的波，或者，如果波数足够大,以致 $\gamma=(k^2-\omega^2/\alpha^2)^{1/2}$ 和 $\nu=(k^2-\omega^2/\beta^2)^{1/2}$ 变为实数（正的），则

当 $z\to\infty$时 $\qquad$ 所有的 l_1, r_1, $r_2\to0. \qquad (7.130)$

当在 7.2 节导出面波的本征值问题时，我们曾得到运动方程的一个连续解不能满足均匀的边界条件 (7.129) 和 (7.130)，除非

对给定的 ω，k 取特定的离散值。因此，重要的是如果对此问题附加上在源的深度处牵引力的不连续性，则对 k 的任意值求得解才变成是可能的。下面我们给出这个解，请注意，一旦运动-应力向量问题被解出为 (k, m, z, ω) 的函数，则可能写出由点源 $\boldsymbol{F}\exp(-i\omega t)$ 产生的稳态位移，其形式为

$$\boldsymbol{u}(r,\phi,z,t)=$$

$$\exp(-i\omega t)\frac{1}{2\pi}\sum_{m=-\infty}^{\infty}\int_0^{\infty}k[l_1(k,m,z,\omega)\boldsymbol{T}_k^m(r,\phi)$$

$$+r_1(k,m,z,\omega)\boldsymbol{S}_k^m(r,\phi)+r_2(k,m,z,\omega)\boldsymbol{R}_k^m(r,\phi)]dk. \tag{7.131}$$

首先让我们求解 $l_1(k,m,z,\omega)$，其过程概述如下：

$$\boldsymbol{l}=\begin{pmatrix}l_1\\l_2\end{pmatrix}$$

满足

$$\frac{\partial \boldsymbol{l}}{\partial z}\begin{pmatrix}0 & \mu^{-1}\\-\omega^2\rho+k^2\mu & 0\end{pmatrix}\boldsymbol{l}, \tag{即7.24}$$

在 $z=0$ 处 $l_2=0$。当 $z\to\infty$ 时

或者 $\boldsymbol{l}$ 成为下行波（一均匀体波）

或者 $\boldsymbol{l}\to 0$（一非均匀波） (7.132)

这取决于值 k/ω（水平慢度）。最后，

$$\boldsymbol{l}\Big|_{z=h^+}-\boldsymbol{l}\Big|_{z=h^-}=\begin{pmatrix}0\\f_T(k,m)\end{pmatrix}. \tag{7.133}$$

我们将构成一个不连续解 $\boldsymbol{l}'$，它满足 (7.133)，进而我们构成一个连续解 $\boldsymbol{l}''$，以使其线性组合

$$\boldsymbol{l}=\boldsymbol{l}'+\frac{\boldsymbol{l}''}{\Delta(k)} \tag{7.134}$$

满足全部要求的条件。$\boldsymbol{l}'$ 和 $\boldsymbol{l}''$ 两者解出了运动方程，其边界条件为

$$\begin{aligned}&\text{对所有的 } z>h \quad l'_1=0 \text{ 和 } l'_2=0,\\&\text{在 } z=h-0 \text{ 处} \quad l'_1=0 \text{ 和 } l'_2=-f_T,\end{aligned} \tag{7.135}$$

$$\begin{aligned}&\text{当 } z\to\infty \quad l''_1 \text{下行 或 } l''_1\to 0,\\&\text{在 } z=0 \text{ 处} \quad l''_2=-\Delta(k)l'_2.\end{aligned} \tag{7.136}$$

很容易证明，(7.134) 给出的 $\boldsymbol{l}$ 包含有上面定义的 $\boldsymbol{l}'$ 和 $\boldsymbol{l}''$，这 $\boldsymbol{l}$ 确实满足全部所要求的条件 (7.132) 和 (7.133)。当 $z\to\infty$时，对 (7.136) 中的 l''_1 的辐射条件可以取两种形式，取决于水平慢度 k/ω 值。如果该值足够小，则深度较大处的 l''_1 是一均匀的下行体波。而如果$\frac{k}{\omega}>\lim\limits_{z\to\infty}\frac{1}{\beta(z)}$，则当 $z\to\infty$时，l''_1是趋向于零的非均匀波。函数 $\Delta(k)$ 已定义过了，所以，在非连续解 $\boldsymbol{l}'$ 中的表面剪应力如乘以$-\Delta(k)$，则恰好等于在连续解中的这个应力。但是，如果 k 刚好是面波的本征值，则连续解 $\boldsymbol{l}''$ 中的表面应力变为零。由此得到，当 k 为一本征值且 $\boldsymbol{l}''$ 是一面波的本征函数时，则 $\Delta(k)$必然为零。此时不可能有下行波（当 $z\to\infty$时），因为 $\boldsymbol{l}''$ 满足具有齐次边界条件和无源项的波动方程。因此，k 的本征值必须足够大，以使当 $z\to\infty$时 $l''_1\to 0$，这样才能防止由体波携带的能量向下传播而损失。

在图 7.9 中，我们更加详细地给出了如何求得 $\boldsymbol{l}'$ 和 $\boldsymbol{l}''$。通过 (7.134) 构成 $\boldsymbol{l}$，现在我们可用 (7.131) 合成位移为

$$u(r,\phi,z,t)=\exp(-i\omega t)\frac{1}{2\pi}\sum_m\int_0^\infty k\left[l'_1+\frac{l''_1}{\Delta(k)}\right]\boldsymbol{T}_k^m(r,\phi)dk. \tag{7.137}$$

我们的下一个目标是确定在此位移场中面波的贡献。回顾(7.124)，如果源是一个点力，则仅当 $m=\pm1$ 时才是有贡献的。

(7.137) 中的被积函数，在 $\Delta=0$ 时有极点。对 Δ 而言，我们曾选择了这样一个函数，即当 k 为一本征值时，它变为零，这些极点的贡献将给出简正振型，或此情况下的 Love 波。然而，

(7.137) 也包含了所有的体波和可能出现的漏能振型的贡献。对这积分的计算将按照在 (6.11)—(6.15) 和 (6.30) 的讨论中所采取的一些步骤进行。因而，我们用$[H_m^{(1)}(kr)+H_m^{(2)}(kr)]/2$代替 $J_m(kr)$，并将 $H_m^{(2)}$对正 k 的积分转换成 $H_m^{(1)}$对负 k 的积分，所以，(7.137) 变成一个对整个实 k 轴的积分。以$\frac{1}{2}H_m^{(1)}$代替 J_m，我们将把 T_k^m 写成 $T_k^{m(1)}$，于是极点的贡献将是

$$u^{\text{LOVE}}=\exp(-i\omega t)\sum_m\sum_n ik_n\frac{l_1''(k_n,m,z,\omega)}{\left(\frac{\partial\Delta}{\partial k}\right)_{k=k_n}}T_{k_n}^{m(1)}(r,\phi),\tag{7.138}$$

其中 $k_n(n=0, 1, 2,\cdots)$ 是 $\Delta(k)=0$ 的正实根。(根据弱非弹性效应的论证，负实根无贡献。在负实轴上的极点向下移至第三象限中，并在上半平面中形成的一条闭合回路的外边，但在正实 k 轴上的极点向上移至第一象限中，并且其留数是可求的。在 7.6 节和 9.3 节中我们将进面讨论这些积分路径和有关的分支切割及体波。)

$(\partial\Delta/\partial k)_{k=k_n}$ 的计算，用 7.3 节的变分原理来做是很简单的。根据 (7.68)，对波动方程的连续解 l''，我们得到

$$\frac{1}{2}[l_1'l_2']_0^\infty=-\omega^2I_1+k^2I_2+I_3.$$

于是，从边界条件 (7.136)得到

$$\frac{1}{2}\Delta(k)(l_2'l_1')_{z=0}=-\omega^2I_1+k^2I_2+I_3.$$

如果 k 接近本征值，则 l''接近为本征函数。因为 l''稍微偏离真实的本征函数 (见 (7.67))时，$(-\omega^2l_1+k^2l_2+l_3)$ 是稳定的，由此得到由于 k 的扰动产生 Δ 的变化可写成

$$\left(\frac{\partial\Delta}{\partial k}\right)_{k=k_n}(l_2'l_1')_{z=0}=4k_nI_2=4k_ncUI_1,\tag{7.139}$$

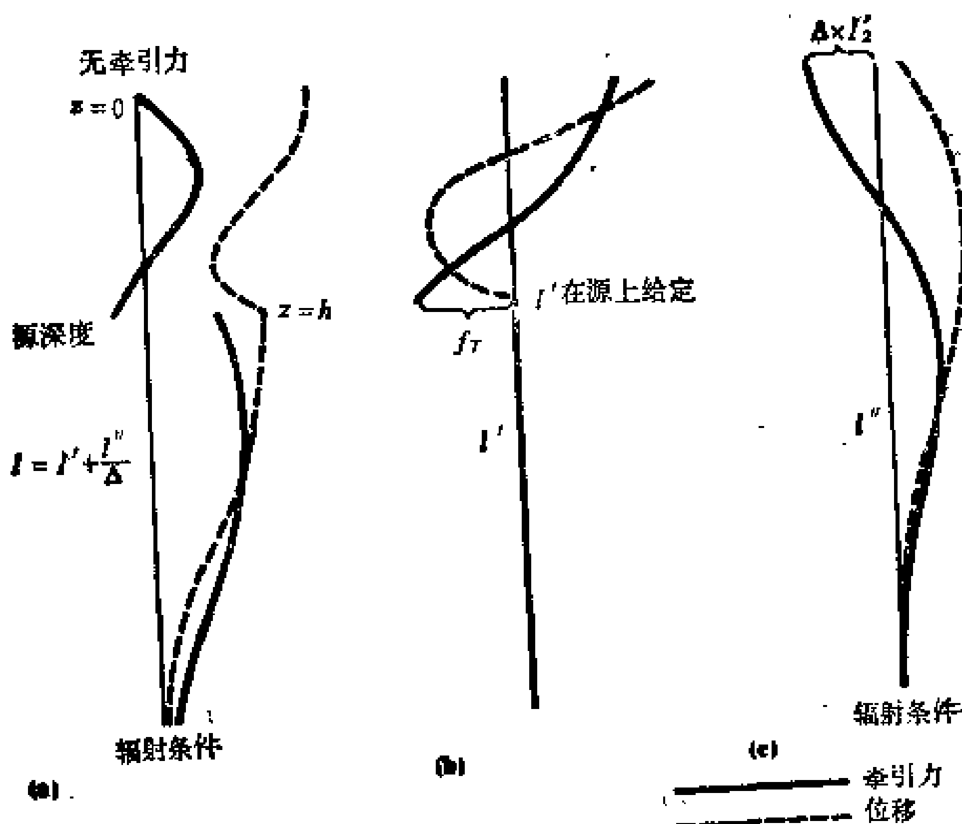


图 7.9

(a) 在 $z=h$ 处，牵引力不连续的 SH 波特性的示意图。这个波是 l，它在 $z=0$ 和 $z=h$ 处满足齐次条件。(b) 在 $z=h$ 以下，解 l' 为零。对给定的 k，在源的上部，对 $z=h$ 的 l'，取初始值（f_T）并对 $dl'/dz=Al'$ 向上到 0 求积分，则可得到 l'。对面波的激发，我们将发现 l' 实际上无需计算。(c) 解 l'' 是连续的，它可在较大深度处取一满足辐射条件的解，然后对运动方程向上至 $z=0$ 求积分而得到（对给定的 k）。这个解乘以（对所有深度）标量常数，这常数的选择应使表面牵引力变成 $-\Delta x$（l' 中的表面牵引力）。

注意 $l=l'+\Delta^{-1}l''$ 定义在全部选定的 k 上。对足够小的波数，能量向下辐射是可能的（体波）。然而，对足够大的波数，l（和 l''）随深度成指数衰减。如图所示的即为此情况。

其中 c 和 U 是和 ω 及 k_n 相对应的相速度与群速度（见(7.70)）。因为从运动方程给出$\left(\frac{d}{dz}\right)(l_1'l_2''-l_1''l_2')=0$ 是很容易的，因而我们可从上述方程中消掉 $z=0$ 时的 l_2'。计算 $z=0$ 和 $z=h-0$ 时的常数 $l_1'l_2''-l_1''l_2'$，并用（7.135）和（7.136），我们得到

$$l_1'' l_2'|_{z=0} = -f_T(k_n, m) l_1''|_{z=h}, \tag{7.140}$$

整理(7.138)－(7.140)，现在我们得到

$$u^{\text{LOVE}} = -i\exp(-i\omega t) \sum_m \sum_n \frac{f_T(k_n, m) l_1'(h) l_1'(z)}{4\, cUI_1} T_{k_n}^{m(1)}. \tag{7.141}$$

对 m 求和很容易实现，因为除 $m=\pm 1$ 外，$f_T=0$(见(7.125))。由于 (7.141) 中的 l_1' 只不过是一个特定的 Love 波振型，我们将去掉字码右上角的撇号而用 l_1，即，我们回复到对单个振型最初的标记。我们还用 (7.118) 中给出的渐近公式代替 $T_k^{m(1)}$。根据在 $r=0$ 和 $z=h$ 处施加的点力 $F\exp(-i\omega t)$ 而给出的 Love 波振型的激发，其最后结果为

$$u^{\text{LOVE}} = \exp(-i\omega t) \sum_n \frac{(F_y\cos\phi - F_x\sin\phi) l_1(k_n, h, \omega)}{8\, cUI_1} \times \sqrt{\frac{2}{\pi k_n r}} [l_1(k_n, z, \omega)\hat{\boldsymbol{\phi}}] \exp\left[i\left(k_n r + \frac{\pi}{4}\right)\right], \tag{7.142}$$

其中 $I_1 = \frac{1}{2}\int_0^\infty \rho[l_1(k_n, z, \omega)]^2 dz$，$l_1(k_n, z, \omega)$是一连续的本征函数。

对 Rayleigh 波，按相似的步骤，最后的结果为

$$u^{\text{RAYLEIGH}} = \exp(-i\omega t) \times \sum_n \frac{F_z r_2(k_n, h, \omega) + i(F_x\cos\phi + F_y\sin\phi) r_1(k_n, h, \omega)}{8\, cUI_1} \times \sqrt{\frac{2}{\pi k_n r}} [r_1(k_n, z, \omega) e^{-i\pi/4}\hat{\boldsymbol{r}} + r_2(k_n, z, \omega) e^{i\pi/4}\hat{\boldsymbol{z}}] \exp(ik_n r), \tag{7.143}$$

其中 $I_1 = \frac{1}{2}\int_0^\infty \rho(r_1^2 + r_2^2) d_z$.

Keilis-Borok 和 Yanovskaya(1962) 给出了 Love 波的简洁结果，即方程 (7.142) 和 (7.143) 中用 $1/(cUI_1)$ 表示的根点

的留数。Harkrider 和 Anderson（1966）推测出 Rayleigh 波的相应结果并且他们用数值法给出了证明。对于一个点源激发的整个地球的自由振荡（下一章中的研究课题），斋藤（Saito，1967）第一个得到了同样的简洁形式。

将（7.106），（7.107）和（7.109）中给出的线源的解进行对比，可以看出，二维的和三维的解极为相似。当和线源相比时，点源解的相位超前 $\pi/4$，并由于有一个比例于 $\omega^{1/2}$的因子而包含有更高的频率。这一点很容易理解，因为线源可看成是点源的叠加或是点源在空间上的平滑。解的根本简化，即将源、介质及接收点诸因子分离开，对两种情况都适用（见补充 6.1）。

为使这些稳态位移的结果和 Green 函数中我们的标记法相一致，我们去掉（7.142）和（7.143）中的因子 exp（$-i\omega t$），于是可将左半部视为作用在 $\xi=(0,\ 0,\ h)$ 上的点力 $\boldsymbol{F}(\omega)$ 在频率域中产生的位移，由此得出

$$u_i(\boldsymbol{x},\omega)=F_p(\omega)G_{ip}(\boldsymbol{x};\xi;\omega). \qquad (7.144)$$

所谓 $\boldsymbol{G}(\boldsymbol{x};\xi;\ \omega)$，它是 τ 固定为零时和 t 有关的 $\boldsymbol{G}(\boldsymbol{x},t;\ \xi,\tau)$ 的 Fourier 变换。在第三章和第四章经常出现等价于（7.144）的褶积。与（7.142）和（7.143）的对比表明，可用 Green 函数中的 Love 波项和 Rayleigh 波项来描述面波的激发。具体地说，它们是

$$G^{\text{LOVE}}=\sum_n \frac{l_1(z)l_1(h)}{8\,cUI_1}\begin{pmatrix}\sin^2\phi & -\sin\phi\cos\phi & 0\\ -\sin\phi\cos\phi & \cos^2\phi & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

$$\times\left(\frac{2}{\pi k_n r}\right)^{1/2}\exp\left[\ i\left(k_n r+\frac{\pi}{4}\right)\right] \qquad (7.145)$$

和

$$G^{\text{RAYLEIGH}}=\sum_n \frac{1}{8\,cUI_1}$$

$$\times\begin{pmatrix} r_1(z)r_1(h)\cos^2\phi & r_1(z)r_1(h)\cos\phi\sin\phi & -ir_1(z)r_2(h)\cos\phi \\ r_1(z)r_1(h)\sin\phi\cos\phi & r_1(z)r_1(h)\sin^2\phi & -ir_1(z)r_2(h)\sin\phi \\ ir_2(z)r_1(h)\cos\phi & ir_2(z)r_1(h)\sin\phi & \times r_2(z)r_2(h) \end{pmatrix}$$

$$\times\left(\frac{2}{\pi k_n r}\right)^{1/2}\exp\left[i\left(k_n r+\frac{\pi}{4}\right)\right]. \qquad (7.146)$$

7.5 由具有任意地震矩的点源产生的 Love 波和 Rayleigh 波

如果面波被一点源激发，此点源又仅由矩张量$\boldsymbol{M}$描述，则研究此激发的一种方法是用等效体力，正如我们在前节中所作的那样。这是斋藤（Saito, 1967）的方法，现得到牵引力不连续性的（k, m）展开式（7.120），当$m=\pm 2$时，有非零项。然而，我们已经得到了 Green 函数的 Love 分量和 Rayleigh 分量，所以较快的办法是只用公式

$$u_i(\boldsymbol{x},\omega)=M_{pq}(\omega)\frac{\partial}{\partial\xi_q}G_{ip}(\boldsymbol{x};\boldsymbol{\xi};\omega),$$

在微分运算G^{LOVE}和G^{RAYLEIGH}中，我们仅保留最大的项，即包括垂直本征函数的深度微商或$\exp(ik_n r)$的水平微商。用$\partial\gamma/\partial\xi_1=-\cos\phi$，$\partial\gamma/\partial\xi_2=-\sin\phi$，作为例子我们得到

$$u_z^{\text{LOVE}}(\boldsymbol{x},\omega)=-\sum_n\sin\phi\frac{l_1(z)}{8cUI_1}\left(\frac{2}{\pi k_n r}\right)^{1/2}\exp\left[i\left(k_n r+\frac{\pi}{4}\right)\right]$$
$$\times\left\{ik_n l_1(h)[M_{xx}\sin\phi\cos\phi-M_{yx}\cos^2\phi\right.$$
$$+M_{xy}\sin^2\phi-M_{yy}\sin\phi\cos\phi]$$
$$\left.-\frac{dl_1}{dz}\bigg|_h[M_{xz}\sin\phi-M_{yz}\cos\phi]\right\}. \qquad (7.147)$$

(7.147) 的推导类似于通过 (4.28) 推导 (4.29)，尽管现在我们仅保留了远场项。对 u_y^{LOVE} 可得到相似的表示式并且立刻可得到 $u_z^{\mathrm{LOVE}}=0$，所以，一向量公式可给出为

$$u^{\mathrm{LOVE}}(\boldsymbol{x},\omega)=\sum_n \frac{l_1(z)}{8\,cUI_1}\left(\frac{2}{\pi k_n r}\right)^{1/2}\exp\left[i\left(k_n r+\frac{\pi}{4}\right)\right]\{\quad\}\hat{\phi}, \tag{7.148}$$

其中{ }和 (7.147) 中的括号{ }相同。

对 Rayleigh 波，我们从 (7.146) 的最后一行可得

$$\begin{aligned} u_z^{\mathrm{RAYLEIGH}} = &\sum_n \frac{r_2(z)}{8\,cUI_1}\left(\frac{2}{\pi k_n r}\right)^{1/2}\exp\left[i\left(k_n r+\frac{\pi}{4}\right)\right] \\ &\times\Big\{k_n r_1(h)[M_{xx}\cos^2\phi+(M_{xy}+M_{yx})\sin\phi\cos\phi \\ &+M_{yy}\sin^2\phi]+i\frac{dr_1}{dz}\Big|_h[M_{xz}\cos\phi+M_{yz}\sin\phi] \\ &-ik_n r_2(h)[M_{zx}\cos\phi+M_{zy}\sin\phi]+\frac{dr_2}{dz}\Big|_h M_{zz}\Big\}. \end{aligned} \tag{7.149}$$

对 Rayleigh 波运动的径向分量（水平向），得到为

$$u_r^{\mathrm{RAYLEIGH}}=\sum_n \frac{r_1(z)}{8\,cUI_1}\left(\frac{2}{\pi k_n r}\right)^{1/2}\exp\left[i\left(k_n r-\frac{\pi}{4}\right)\right]\{\quad\}, \tag{7.150}$$

其中{ }和 (7.149) 中的括号{ }相同。

注意，用矩张量表示的这些面波激发的公式，不仅适用于小的位错源，而且也适用于小的体积源。为研究这一点，考虑一个具有矩密度 $m_{pq}=\partial M_{pq}/\partial V$ 的体积源。这是一个如 3.4 节中所述的每单位体积中的矩密度，我们从等价于 (3.30) 的方程人手，其位移的 x_i 分量为

$$u_i(\boldsymbol{x},\omega)=\int_V m_{pq}(\boldsymbol{\eta},\omega)\frac{\partial}{\partial\eta_q}G_{ip}(\boldsymbol{x};\boldsymbol{\eta};\omega)\,dV(\boldsymbol{\eta}).$$

如果矩密度集中于 ξ 点上，若 V 中 η 变化，则

$$m_{pq}(\boldsymbol{\eta},\omega)=M_{pq}(\omega)\delta(\boldsymbol{\eta}-\boldsymbol{\xi}),$$

且上述表示式确实又给出了 $u_i=M_{pq}G_{ip,q}$。

作为一个例子，让我们先考虑爆炸源的情况。作为一个点源，矩张量是一个具有相等元素 $M_{xx}=M_{yy}=M_{zz}=M_0$ 的对角矩阵。在此情况下，显然是不能激发 Love 波的。Rayleigh 波在方位上是各向同性的，并且由（7.149）给出的垂直向位移为

$$u_z(x,\omega)=\sum_n \frac{r_2(z)}{8\,cUI_1}\left(\frac{2}{\pi k_n r}\right)^{1/2}\left(\frac{-1}{i\omega}\right)\exp\left[i\left(k_n r+\frac{\pi}{4}\right)\right]$$
$$\times\left\{k_n r_1(h)+\left.\frac{dr_2}{dz}\right|_h\right\}, \tag{7.151}$$

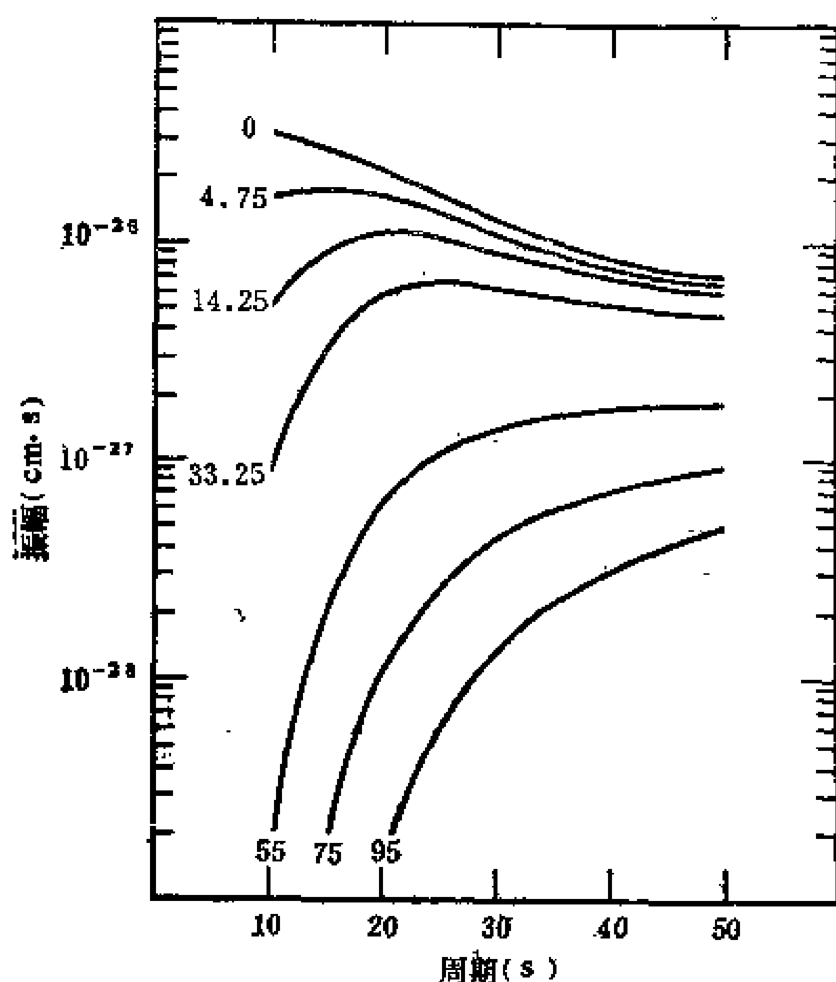


图 7.10

对具有单位地震矩（对角元素）的地下爆炸，在 Δ=2000 公里处 Rayleigh 波的振幅谱（垂直位移）。每一曲线旁的数值表示震源深度，以公里计（引自 Tsai and Aki, 1971）

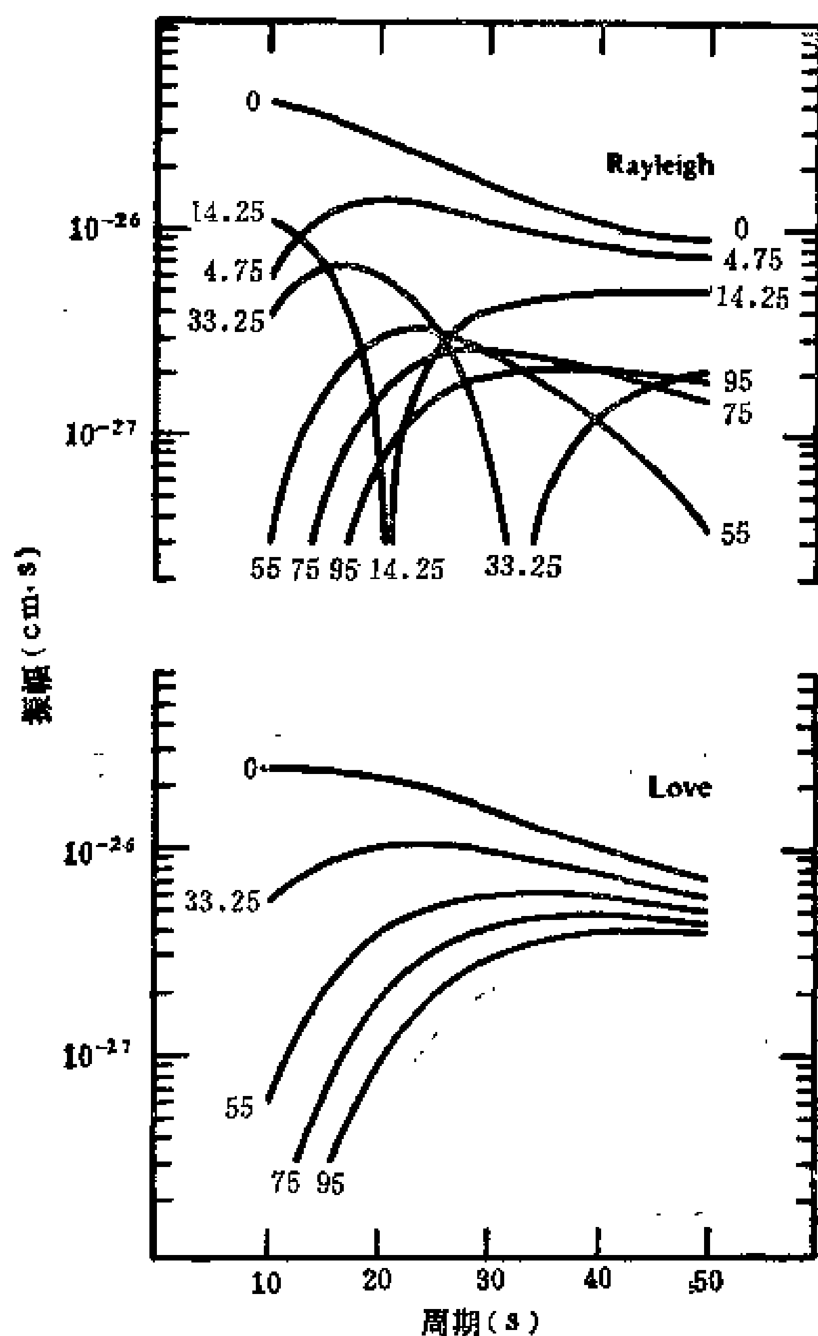


图 7.11

对具有单位阶梯函数地震矩的垂直走滑地震，在2000公里处与断层走向的夹角为$\varphi=30°$时，Rayleigh波（垂直的）和Love波的振幅谱。每一曲线旁的数值表示震源深度，单位为公里（引自 Tsai and Aki, 1971）

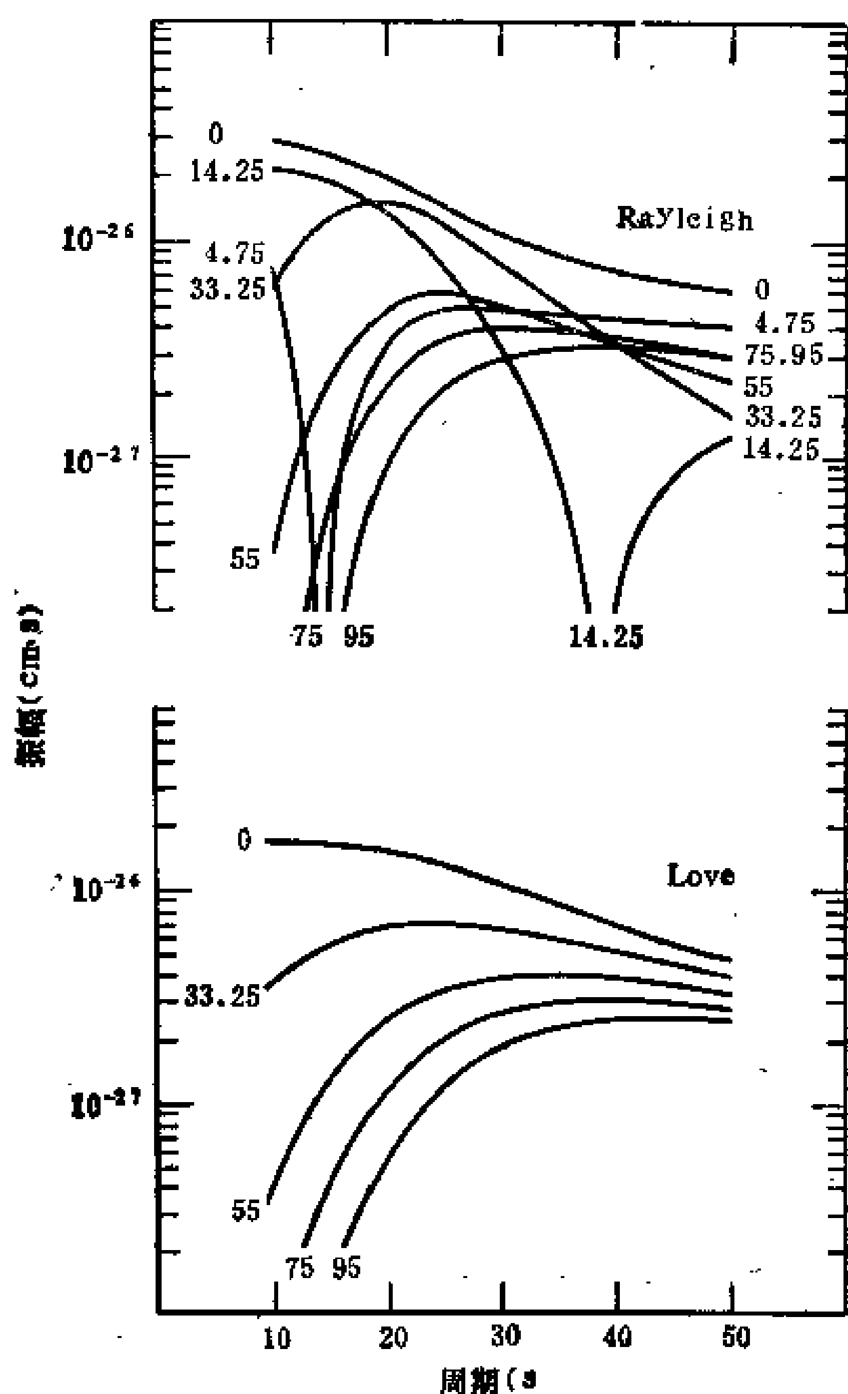


图 7.12

对倾角为45°并有单位阶梯函数地震矩的倾滑断层，在 $\Delta = 2000$ 公里、与断层走向夹角为30°时，Rayleigh 波和 Love 波的振幅谱，每一曲线旁的数字为震源深度，单位为公里（引自 Tsai and Aki, 1971）

这里我们已假定，$M_0(t)$ 为一具有幅度为 1 达因·厘米的阶跃，所以，$M_0(\omega)=-1/i\omega$。

用先前对 Gutenberg 的大陆地球模型（见补充 7.5）得到的相速度、群速度和本征函数，计算由不同深度的爆炸源所产生的基频 Rayleigh 波的振幅是简单的。仅取（7.151）中的第一项（即$n=0$），这里用厘米-秒单位。2000 公里震中距处的数值结果如图 7.10 所示。很清楚，爆炸源产生的 Rayleigh 波激发，随深度逐渐衰减。

另一方面，具有对称性双力偶矩张量的地震源产生的 Rayleigh 波频谱和震源机制及震源深度的关系是复杂的。在一竖直断层上，纯走滑运动的情况和沿一 45°倾角断层面的倾滑运动的情况，分别如图 7.11 和 7.12 所示。在这两种情况中，接收点均位于震中距为 2000 公里且和断层走向间的方位角为 30°处，并且对 Rayleigh 波和 Love 波两者，假定有 1 达因·厘米的双力偶矩的阶梯状变化。在（7.148）和（7.149）中要求的M的直角坐标分量可从补充 4.4 中得到。虽然在两种情况中 Love 波频谱随震源深度都平滑地减低，但 Rayleigh 波频谱却强烈地依赖于震源机制和震源深度，这就对测定这些震源参数提供了一个有力的方法。

7.6 漏能振型

本章内，至今我们仅考虑了面波或简正振型，它们是在波数平面中极点上的留数所产生的。在等于或大于截止频率时，简正振型的解变为零，因为极点从“顶部”Riemann叶（这里垂直波数的虚部被选择为正以保证在无限深度处的辐射条件）移向下部的叶中。一完整的解要求围绕分支切割作附加积分的计算；对半空间问题如图6.12 表示的那样。本节中我们将证明，分支切割的积分可转换成下叶中诸极点留数贡献之和。不同于简正振型，它

随时间呈指数衰减，因为能量漏到下半空间中了。它们叫做漏能振型。

我们将研究最简单的成层介质的漏能振型，即在一液体半空间上有一液体层。Pekeris（1948）为了解释由 Ewing 和 Worzel（1948）得到的关于海洋声学的观测数据，对此介质中波的产生和传播进行了广泛地研究。这里我们将按照 Rosenbaum （1960）的推导，将整个波场完整地表示为简正振型和漏能振型之和。此结果对得到适合于较大时间间隔的简单的近似公式是有用的。

考虑一液体层，其厚度为 H，密度为 ρ_1，声波速度为 α_1，此层置于密度为 ρ_2，速度为 α_2 的液体半空间之上（图 7.13）。我们将假定在层内位于深度 h 处有一球状压力源。如 6.2 节所研究的，我们将用同样的坐标，并从两个相接的液体半空间问题中同样的源表达式开始。我们将首先写出如式（6.11）的初始压力波

$$P^{入}=\frac{A}{R}\exp\left[i\omega\left(\frac{R}{\alpha_1}-t\right)\right], \tag{7.152}$$

此处 R 是源点 Q 和接收点 P 之间的距离。我们用类似于（6.12）和（6.13）解的尝试形式，但有一附加项，此项表示在层中向两个路径传播的波，同时测定被积函数中的未知因子以满足边界条件。边界条件是（i）在 $z=0$ 处压力为零，(ii) 穿过 $Z=H$ 交界面的压力和垂直位移连续，(iii) 没有波来自 $z=\infty$ 处。于是（对 $0\leqslant z\leqslant h$）层中整个压力场可写成

$$2\exp(-i\omega t)\int_0^\infty J_0(kr)\,k\frac{\sinh\gamma_1 z}{\gamma_1}F_1(\omega,k)\,dk, \tag{7.153}$$

其中

$$F_1(\omega,k)=A\frac{\rho_2\gamma_1\cosh\{\gamma_1(H-h)\}+\rho_1\gamma_2\sinh\{\gamma_1(H-h)\}}{\rho_2\gamma_1\cosh(\gamma_1 H)+\rho_1\gamma_2\sinh(\gamma_1 H)} \tag{7.154}$$

这里 $\gamma_i=(k^2-\omega^2/\alpha_i^2)^{1/2}$，$\gamma_1$ 和 γ_2 的符号的选择是使 $\mathrm{Re}\gamma_1\geqslant 0$

和 $\mathrm{Re}\gamma_2 \geqslant 0$。便于记忆的方法是，只要辐射条件被满足，$i\gamma_2$ 有为正或为零的实部和虚部。

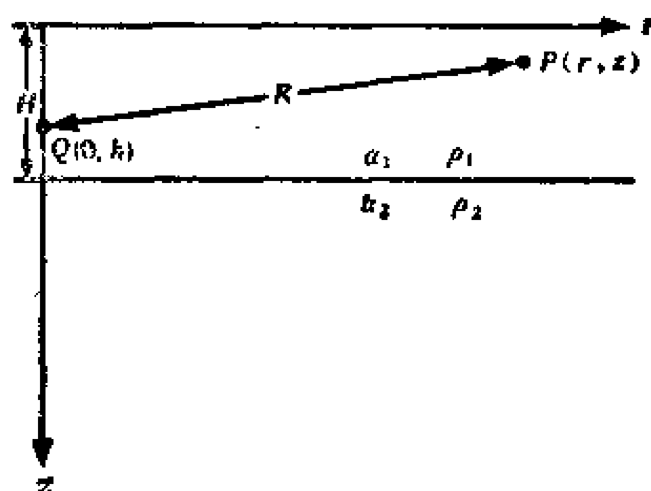


图 7.13
液体半空间上一液体层内，在Q点处一点源的参数

对截止频率以下的频率，为得到最常见的解，考虑具有连续谱的瞬时源是必要的。让我们考虑如下形式的初始压力波：

$$P^{入}(t)=\frac{A\exp\left[\sigma\left(\frac{R}{\alpha_1}-t\right)\right]}{R},\quad t>\frac{R}{\alpha_1},$$

$$=0,\quad t<\frac{R}{\alpha_1}. \tag{7.155}$$

由于上述源可通过下式表示成一个 Fourier 反积分：

$$P^{入}(t)=\frac{A}{2\pi R}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\exp\left[-i\omega\left(t-\frac{R}{\alpha_1}\right)\right]}{\sigma-i\omega}d\omega, \tag{7.156}$$

则相应的总压力场可由 (7.153) 对 ω 的积分得到

$$P^{总}(t)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\exp(-i\omega t)}{\sigma-i\omega}d\omega\int_0^{\infty}J_0(kr)k\frac{\sinh\gamma_1 z}{\gamma_1}F_1(\omega,k)dk. \tag{7.157}$$

因为 $P^{\#}(t)$是实数，它对 ω 的 Fourier 变换是复共轭的，同时我们可将 (7.157) 改写成

$$P^{\#}(t)=\frac{2}{\pi}\operatorname{Re}\int_{0}^{\infty}\frac{\exp(-i\omega t)}{\sigma-i\omega}d\omega\int_{0}^{\infty}J_{0}(kr)k\frac{\sinh\gamma_{1}z}{\gamma_{1}}\times F_{t}(\omega,\ k)dk. \tag{7.158}$$

现在我们改变积分的次序并首先通过复 ω 平面中变形的积分路径对 ω 来计算积分。因为被积函数是一个 γ_1 的偶函数，所以 $\omega=\pm\alpha_1 k$ 不是一个支点，并且此问题中的分支切割仅仅是和 γ_2 有联系的分支切割。围绕$\omega=\pm\alpha_2 k$的分支切割是沿着 $\operatorname{Re}\gamma_2=0$ 进行的，它相应于$|\operatorname{Re}\omega|>\alpha_2 k$ 的实 ω 轴上那部分，如图 7.14 所示。

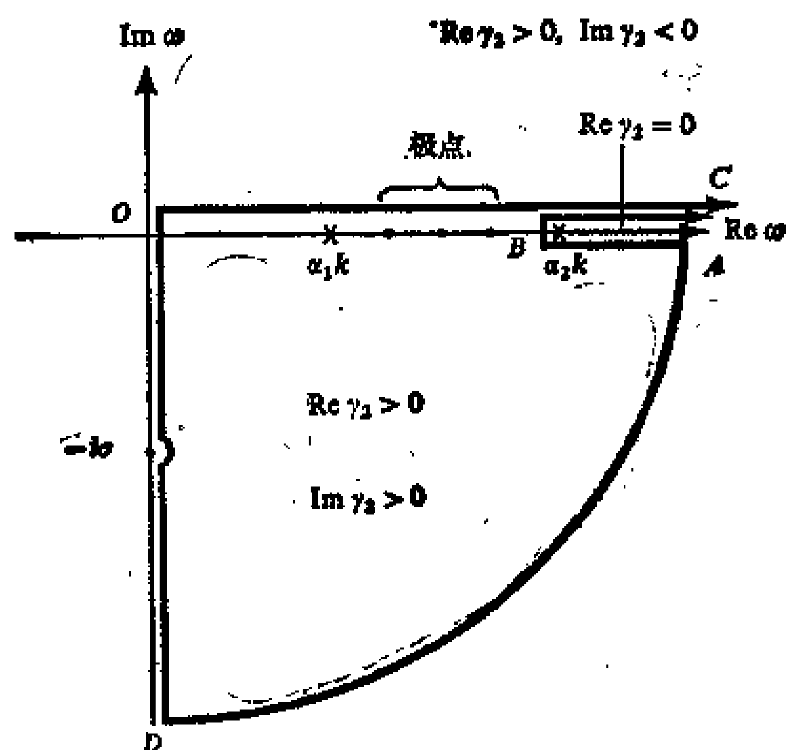


图 7.14
ω 面中的极点（圆点）和支点（叉）

由于辐射条件，我们最初的积分路径位于 $\operatorname{Re}\gamma_2>0$ 的顶叶中。下一步我们将证明，

$$f_1(\omega,\ k)\equiv\rho_2\gamma_1\cosh\gamma_1 H+\rho_1\gamma_2\sinh\gamma_1 H=0 \qquad (7.159)$$

式中仅有有限个实根存在于顶叶中。令

$$i\gamma_1 H=P_1+iq_1,\ i\gamma_2 H=P_2+iq_2,$$

其中 P_1，P_2，q_1，q_2 是实数，将它们代入 $f_1(\omega,\ k)$中并取其虚部，如果（7.159）成立，则我们得到

$$\frac{\sinh q_1\cosh q_1}{\cos^2 p_1\cosh^2 q_1+\sin^2 p_1\sinh^2 q_1}+\frac{\rho_2}{\rho_1}\frac{p_1p_2+q_1q_2}{p_2^2+q_2^2}=0 \qquad (7.160)$$

由于 $\gamma_1^2-\gamma_2^2=\omega^2/\alpha_2^2-\omega^2/\alpha_1^2$ 是实数，$p_1q_1=p_2q_2$。因而

$$\frac{p_1p_2+q_1q_2}{p_2^2+q_2^2}=\frac{q_1}{q_2}\frac{p_1^2+q_2^2}{p_2^2+q_2^2}.$$

把这个代入（7.160），我们看到，如 $q_2>0$，则（7.160）中的第一和第二项有相同的符号。因此，除了当 $q_1=\mathrm{Re}\gamma_1 H=0$ 以外，$f_1(\omega,\ k)$ 的根在 $q_2=\mathrm{Re}\gamma_2 H>0$ 的顶叶中不可能存在。而当 $\mathrm{Re}\gamma_1 H=0$ 时，这些根是实数并相应的相速度 c 由下面的公式给出：

$$\tan\omega H\sqrt{\frac{1}{\alpha_1^2}-\frac{1}{c^2}}=-\frac{\rho_2\sqrt{\frac{1}{\alpha_1^2}-\frac{1}{c^2}}}{\rho_1\sqrt{\frac{1}{c^2}-\frac{1}{\alpha_2^2}}}. \qquad (7.161)$$

这个方程和 Love 波的周期方程（7.6）相类似，但又有一个重要差别。因为右边为负号，所以零阶正切曲线不能给出一个根(见图7.2)。因此，在一成层的声波介质中，所有的振型都有有限的截止频率。我们将取 $n=1$ 作为最大的振型（而不是 $n=0$）。第 n 阶振型的截止频率 ω_{cn} 可令（7.161）中的 $c=\alpha_2$ 而给出：

$$\omega_{cn}=\frac{\pi\left(n-\frac{1}{2}\right)}{H\sqrt{\frac{1}{\alpha_1^2}-\frac{1}{\alpha_2^2}}}. \qquad (7.162)$$

相应的截止波数为

$$k_{cn}=\frac{\omega_{cn}}{\alpha_2}. \qquad (7.163)$$

对一给定的 k，仅有有限个根出现在顶叶上，它们符合 $k_{cn}<k$，如图 7.14 所示。除了在实轴上的这些极点外，由源的时间函数产生的另一极点处于负虚轴上的 $-i\sigma$ 处。

现在，让我们将初始积分路径 OC 以下述方式改变成 $ODABC$，如图 7.14 所示，即

$$\int_{OC}=\int_{OD}+\int_{DA}+\int_{ABC}-2\pi i\sum \text{各极点的留数}.$$

对一较大的 t，由于因子 $\exp(i\omega t)$，当弧的半径趋近于无限时，(7.158)中的被积函数在 DA 上变为零。另一方面，除了沿着围绕 $-i\sigma$ 的小半圆以外，沿路径 OD 被积函数是纯虚数，它仅有的贡献是在 $-i\sigma$ 处以 $2\pi i$ 乘负的二分之一留数。我们将把它写成

$$P_L=\int_{OD}=2e^{-\sigma t}\int_0^\infty J_0(kr)k\frac{\sinh\gamma_1(\sigma)z}{\gamma_1(\sigma)}F_1(-i\sigma,k)dk, \qquad (7.164)$$

其中 $\gamma_1(\sigma)=(\sigma^2/\alpha_1^2+k^2)^{1/2}$。这表示其时间关系是与源函数一样的非振荡运动。虽然这个表示式违背声学的因果关系（运动在初至波到达之前开始），但对我们主要兴趣所在的较大的 t，它对结果并无影响。

简正振型的解是对实轴上极点的留数求和，可由下式给出：

$$\begin{aligned}P_N&=-2\pi i\sum\text{留数}\\&=4\,\mathrm{Re}\sum_n\int_{k_{cn}}^\infty J_0(kr)k\sinh(\gamma_1 z)\frac{\exp(-i\omega_n t)}{\omega_n+i\sigma}\\&\qquad\times F_2(\omega_n,k)dk,\end{aligned} \qquad (7.165)$$

其中

$$F_2(\omega_n,k)=\frac{A\rho_2\sinh(\gamma_1 h)}{\sinh(\gamma_1 H)\left[\frac{\partial}{\partial\omega}f_1(\omega,k)\right]_{\omega=\omega_n}}. \qquad (7.166)$$

这里 ω_n 是 $f_1(\omega_n,k)=0$ 的根，k_{cn} 是 (7.163) 中定义的截止

波数。采用此积分限是因为当 $k<k_n$ 时第 n 个极点在顶叶中不存在。

现在还剩下沿路径 ABC 的积分。如果在 AB 和 BC 之间被积函数是连续的，这个路径的积分当然为零。但是由于 γ_2 在穿过分支切割时有相反的符号，故此积分实际并不为零。事实上，沿 BC 的 $\mathrm{Im}\gamma_2$ 是负的，沿 AB 是正的。为说明这一点，用图 7.15 中定义的 r_1，r_2，θ_1，θ_2，我们写成

$$\alpha_2\gamma_2=-i(\omega^2-\alpha_2^2k^2)^{1/2}=-i\sqrt{r_1r_2}\left(\cos\frac{\theta_1+\theta_2}{2}+i\sin\frac{\theta_1+\theta_2}{2}\right).$$

第一象限可由 $0<\theta_1+\theta_2<\pi$ 定义。因此，在顶叶中 $\mathrm{Re}\gamma_2>0$，且 $\mathrm{Im}\gamma_2$ 是负的。同样，我们可证明，$\mathrm{Im}\gamma_2$ 在 ω 面中顶叶的第四象限内是正的。（在底叶中，第一象限由 $2\pi<\theta_1+\theta_2<3\pi$ 定义。）

由于 γ_2 的符号已确定，沿 ABC 的积分可改写成

$$\int_{ABC}=\int_{BC}-\int_{BA}$$

$$=\frac{4}{\pi}\mathrm{Im}\int_0^\infty J_0(kr)kdk\int_{\alpha_2k}^\infty\frac{\exp(-i\omega t)}{\omega+i\sigma}$$

$$\times\sinh\gamma_1 zF_3(\omega,\ k)\times d\omega, \tag{7.167}$$

其中

$$F_3(\omega,\ k)=$$

$$\frac{A\rho_1\rho_2\gamma_2\sinh\gamma_1h}{(\rho_2\gamma_1\cosh\gamma_1H+\rho_1\gamma_2\sinh\gamma_1H)(\rho_2\gamma_1\cosh\gamma_1H-\rho_1\gamma_2\sinh\gamma_1H)}. \tag{7.168}$$

为计算上述积分，我们把积分路径从 BC 变为 BC'，如图 7.16 所示。这次我们将保持（7.167）的被积函数为解析的。由此得出，我们被迫取第四象限中根的 $\mathrm{Re}\gamma_2<0$，即我们下降到 Riemann 下叶中。当半径趋于无限时，沿 1/4 圆周 CC' 的积分变为零。这个改变部分地利用了位于改变这路径时所掠过区域中的极点的留数来代替支线积分。因此，

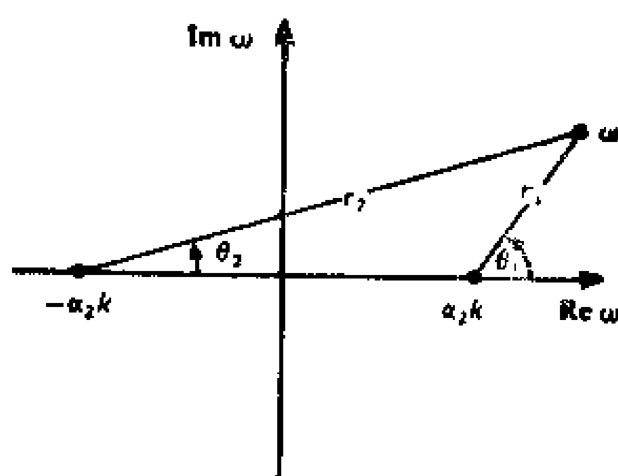


图 7.15

图7.14中对γ_1选择的根的定义。利用$0\leqslant\theta_1<2\pi$，$-\pi<\theta_2\leqslant\pi$和$\alpha_1\gamma_1=(r_1r_2)^{1/2}\exp[i(\theta_1+\theta_2-\pi)/2]$

$$\int_{ABC}=P_{B_1}+P_{B_2},$$

其中

$$P_{B_1}=\frac{4}{\pi}\,\mathrm{Im}\int_0^{\infty}J_0(kr)kdk\int_{\alpha_2k}^{\alpha_2k-i\infty}\frac{\exp(-i\omega t)}{\omega+i\sigma}\times\sinh\gamma_1 zF_3(\omega,\ k)d\omega \tag{7.169}$$

和 $\quad P_{B_2}=-2\pi i\sum$ 留数

$$=4\,\mathrm{Re}\sum_n\int_0^{k_{on}}J_0(kr)kdk\,\frac{\exp(-i\omega_n t)}{\omega_n+i\sigma}\times\sinh\gamma_1 zF_2(\omega_n,k)dk. \tag{7.170}$$

在计算留数中，注意，在下叶中遇到的F_3的所有极点是下式的根：

$$\rho_2\gamma_1\cosh\gamma_1H+\rho_1\gamma_2\sinh\gamma_1H=0,$$

即为$f_1(\omega,\ k)=0$的根。从（7.159）的讨论中得到，如果$\mathrm{Re}\gamma_2<0$，则$\rho_2\gamma_1\cosh\gamma_1H-\rho_1\gamma_2\sinh\gamma_1H$不可能有复根。除积分限以外，式（7.170）和简正振型的解（7.165）相同。这些积分限的出现是由于极点仅对$0<k<k_{on}$才存在于BC'右边的区域中。这需有一种解释。当k从零增加到无穷的过程中，我们将在

ω 面中追踪极点的运动。

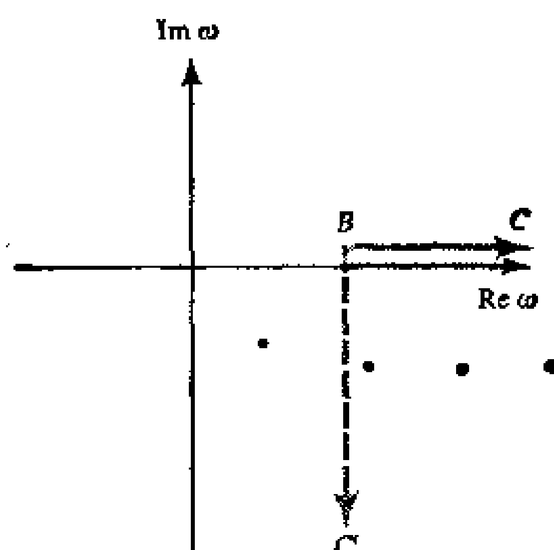


图 7.16
复 ω 面的 Riemann 下叶上 ($\mathrm{Re}\gamma_2<0$) 的极点

让我们假想 k 表示时间。在 $k=0$ 时，$i\gamma_1=\omega/\alpha_1$，$i\gamma_2=\omega/\alpha_2$，并且 $f_1(\omega, 0)=0$ 的根由下式给出：

$$\omega_n=\frac{\alpha_1\left(n-\frac{1}{2}\right)\pi}{H}-i\frac{\alpha_1}{2H}\ln\frac{\alpha_2\rho_2-\alpha_1\rho_1}{\alpha_2\rho_2+\alpha_1\rho_1}. \qquad (7.171)$$

极点位于 ω 面的下叶中，如图 7.16 所示(我们假定 $\rho_2\alpha_2>\rho_1\alpha_1$)。在 $k=0$ 时，ω 面中的初始速度和加速度分别为

$$\frac{d\omega_n}{dk}=0,$$

$$\frac{d^2\omega_n}{dk^2}=\frac{\alpha_1^2}{\omega_n}\left[1+i\frac{\rho_1\alpha_2}{\rho_2\omega_n H}\left(1-\frac{\alpha_1^2}{\alpha_2^2}\right)\Big/\left(1-\frac{\rho_1^2\alpha_1^2}{\rho_2^2\alpha_2^2}\right)\right]. \qquad (7.172)$$

考察加速度的实部和虚部，我们得到，在图 7.17 中箭头所示的方向上极点受到加速。最低阶的极点加速最大。

另一方面，在 $k=0$ 时，积分路径 BC' 位于负虚轴上。路径

BC' 以恒定速度即高于初始阶段极点的速度向右移动。因此，BC' 随 k 的增加逐一地通过极点。在 (7.170) 中引入的积分限 k_{cn} 是当 BC' 追上第 n 个极点时 k 的瞬时值。对 $k<k_{cn}$，第 n 个极点是在 BC' 的右边，因而留数有贡献。在 $k=k_{cn}$ 时，第 n 个极点的位置 ω_{cn} 满足如下的方程：

$$\mathrm{Re}\,\omega_{cn}=\alpha_2 k_{cn}. \tag{7.173}$$

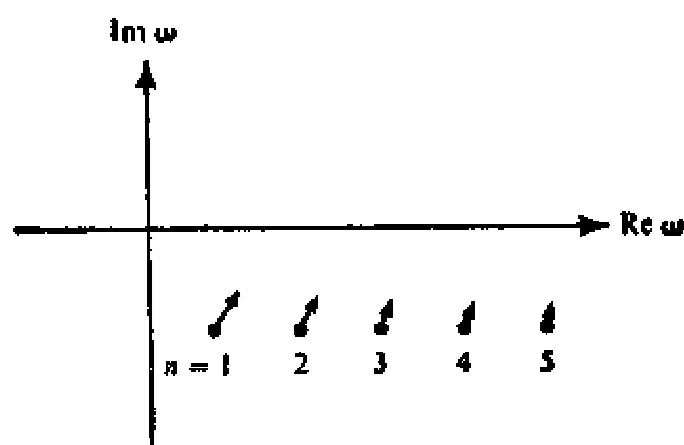


图 7.17

在Riemann 下叶中，极点的初始位置（即在 $k=0$ 时）。箭头表示极点位置"加速度"的方向和相对大小

在 BC' 通过之后，一极点转到右边并向上转至实 ω 轴。在实轴上，它碰到了来自第一象限的另一极点(双根)。于是这些根之一向左移动，另一根向右移动，两者均沿实轴移动。移向右边的根现在被加速并在 $k=k_{cn}$ 时又一次被 BC' 追上，其极点在截止频率 $\omega_{cn}=\alpha_2 k_{cn}$ 处向上跳到顶叶中。此后，它随着 k 趋向于无穷而缓慢地向下达到 $\alpha_1 k$。

现在，我们必须沿着路径 BC' 计算由 (7.169) 给出的积分 P_{B1}。为此，我们将再一次改变积分的顺序并转到 k 平面中。与此同时，我们用下式将变量 ω 变成 q：

$$q=i(\omega-\alpha_2 k). \tag{7.174}$$

改写 (7.169)，我们得到

$$P_{B1}=\frac{4}{\pi}\mathrm{Im}\int_0^{\infty}e^{-qt}dq\int_0^{\infty}J_0(kr)k\frac{e^{-ia_2kt}}{q-\sigma+ia_2k}$$
$$\times\sinh\gamma_1 zF_3(\omega,k)dk, \tag{7.175}$$

由于 $\gamma_2=(iq/a_2)^{1/2}(2k-iq/a_2)^{1/2}$，分支点位于 $k=i(q/2a_2)$，如图 7.18 所示。从分支点到 $-i\infty$ 作切割。分支切割和处于下叶中初始积分路径 BC' 的这一选择(图 7.16)，给出了 γ_2 的实部和虚部的符号，如图 7.18 所指明的。

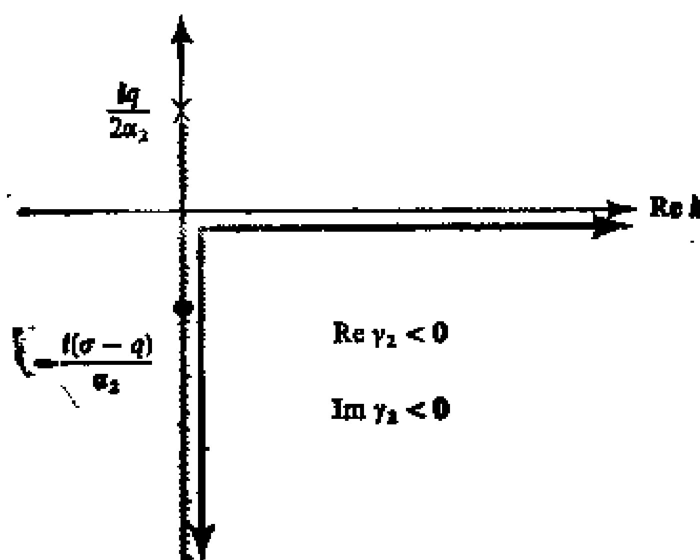


图 7.18
k 平面中的极点(圆点)和分支点(叉)

我们将积分路径从正实轴上变到负虚轴上，以使被积函数中的因子 e^{-ia_2kt} 将沿着后一路径迅速衰减。用这一变化，我们得到了来自第四象限中复数极点的贡献。由于在那里 $\mathrm{Re}\gamma_2<0$，$\rho_2\gamma_1\cdot\cosh\gamma_1H-\rho_1\gamma_2\sinh\gamma_1H=0$ 不可能有复数根。因此，极点是 $\rho_2\gamma_1\cosh\gamma_1H-\rho_1\gamma_2\sinh\gamma_1H=0$ 的根。从而，我们得到

$$P_{B1}=P_{BL}+P_{B3}$$
$$P_{BL}=\frac{4}{\pi}\mathrm{Im}\int_0^{\infty}e^{-qt}dq\int_0^{-i\infty}J_0(kr)k\frac{e^{-ia_2kt}}{q-\sigma+ia_2k}$$
$$\times\sinh\gamma_1 zF_3(\omega,k)dk \tag{7.176}$$

和

$$P_{B3}=-2\pi i\sum \text{留数}$$

$$=4\,\mathrm{Re}\sum_{n}\int_{0}^{q_{on}} e^{-qt}J_0(k_n r)k_n\frac{\exp(-i\alpha_2 k_n t)}{q-\sigma+i\alpha_2 k_n}$$

$$\times\sinh\gamma_1 z F_4(q,k)dq, \tag{7.177}$$

其中

$$F_4(q,k)=\frac{A\rho_2\sinh\gamma_1 H}{\sinh\gamma_1 H\left[\frac{\partial}{\partial k}(\rho_2\gamma_1\cosh\gamma_1 H+\rho_1\gamma_2\sinh\gamma_1 H)\right]_{k=k_n}}. \tag{7.178}$$

若 $\sigma<q$，则(7.176) 中对 k 的积分为零，因为极点 $i(q-\sigma)/\alpha_2$ 将不在积分路径上。所以对 q 的积分区间为 $0<q<\sigma$。若 $\sigma=0$，则 P_{BL} 变为零(即为一阶梯函数源)，它对我们并不是一个重要的项。

对 P_{B3} 的积分限 q_{on} 需要给以说明。如前所述，对实的正 k，仅有两个 k 值，即 k_{on} 和 k_{cn}，在这两个 k 值时 ω 的实部变成 $\alpha_2 k$。换言之，对实的正 k 和实的正 q，$f_1(\omega,k)$有两个根，其形式如下：

$$\omega=\alpha_2 k-iq. \tag{7.179}$$

一个根相应于 k_{cn}，此时 $q=0$，而另一根相应于 k_{on}，此时 $q=q_{on}$。对实的正 q，在实的正 k 轴上 $f_1(\omega,k)=0$ 没有其它的根。

现在，在 $q=0$ 附近，可证明 $\mathrm{Im}(dk/dq)_{f_1=0}<0$。因而，当 q 从零开始增加时，一个极点移向第四象限中，如图 7.19 所示。由于这极点仅仅在 $q=q_{on}$ 时再一次穿过实的 k 轴，故对 $q>q_{on}$，极点在第四象限将不存在。依此，P_{B3} 的积分限为 $0<q<q_{on}$。

最后，我们按下面的关系式将积分变量由 q 变成 k：

$$f_1(q,k)=\rho_2\gamma_1\cosh\gamma_1 H+\rho_1\gamma_2\sinh\gamma_1 H=0.$$

于是

$$\frac{dq}{dk}=-\frac{(\partial f_1/\partial k)_{q=\text{常数}}}{(\partial f_1/\partial q)_{k=\text{常数}}}=\frac{(\partial f_1/\partial k)_{q=\text{常数}}}{i(\partial f_1/\partial\omega)_{k=\text{常数}}}$$

将此式代入（7.177），我们得到

$$P_{B3}=4\,\mathrm{Re}\sum_n\int_{k_{on}}^{k_{cn}}\frac{J_0(kr)k\exp(-i\omega_n t)}{\omega_n+i\sigma}\sinh\gamma_1 z F_2(\omega_n,k)dk,\tag{7.180}$$

此式中的被积函数与(7.165)和(7.170)中的P_N和P_{B2}的相一致。把所有的项放在一起，最后我们得到

$$P^{总}=4\,\mathrm{Re}\sum_n\int_0^\infty\frac{J_0(kr)k\exp(-i\omega_n t)}{\omega_n+i\sigma}\sinh\gamma_1 z F_2(\omega_n,k)dk,\tag{7.181}$$

其中非振荡项P_L和P_{B1}被忽略。在k_{on}和k_{cn}之间，积分路径偏离实k轴，如图7.19所示。

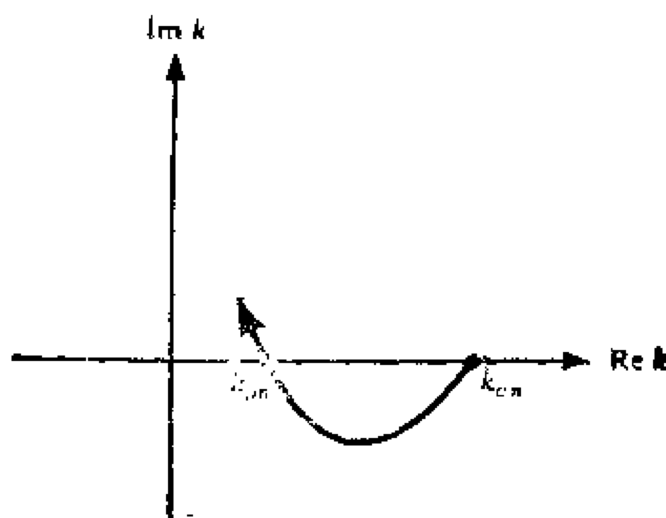


图 7.19
k平面中一极点的路径

7.6.1 风琴管振型

首先，我们考虑这样的情况，接收点放在源的上边，即$r=0$，犹如反射测量中可能遇到的情况。于是，积分(7.181)取补充6.3中考虑过的、具有指数$-i\omega_n t$的形式，并且对较大的t用最速下降法可算出此积分。因为如(7.172)所表示的，在$k=0$时$d\omega_n/dk=0$，所以在此情况中鞍点位于$k=0$处。假定主要贡献是来自$k=0$的附近，我们可将被积函数的相位因子$\exp(-i\omega_n t)$

展开成 k 的幂级数，仅保留其前两项。$k=0$ 时 ω_n 和 $d^2\omega_n/dk^2$ 的值分别由（7.171）和（7.172）给出。最速下降路径由下式给出：

$$-\frac{it}{2}\omega_n''(0)k^2=-i\frac{t}{2}k^2\left[\frac{d^2\omega_n}{dk^2}\right]_{k=0}=-x^2,$$

其中 x 是实数。依前方程，将变量由 k 变成 x，我们得到

$$P^{\clubsuit}=-4\ \mathrm{Re}\sum_n\frac{F_2(\omega_n,0)}{\omega_n(0)+i\sigma}\sin\frac{\omega_n z}{\alpha_1}\exp(-i\omega_n(0)t)$$
$$\times\frac{2}{\omega_n''(0)t}\int_0^\infty xe^{-x^2}dx.$$

利用(7.166)和(7.171)来代替 $F_2(\omega_n,0)$ 和 $\omega_n(0)$，并且考虑到 $\int_0^\infty xe^{-x^2}dx=\frac{1}{2}$，上述公式可改写成

$$P^{\clubsuit}=4A\frac{\alpha_1^2}{Ht}\sum_n\left|\frac{\sin(\omega_n h/\alpha_1)\sin(\omega_n z/\alpha_1)}{\omega_n(-i\omega_n+\sigma)\omega_n}\right|_{k=0}$$
$$\times\left(\frac{\alpha_2\rho_2-\alpha_1\rho_1}{\alpha_2\rho_2+\alpha_1\rho_1}\right)^{\alpha_1 t/2H}\cos\left[\frac{\alpha_1}{H}\left(n-\frac{1}{2}\right)\pi t+\psi\right],\tag{7.182}$$

其中 ψ 是绝对值符号里边的相角值。

上述公式表示一个具有周期为 $4H/[(2n-1)\alpha_1]$ 的阻尼振荡。最低阶的振型($n=1$)，其波长等于层厚度 H 的 4 倍：一个1/4波长的振荡。与其阻尼相应的时间性 Q（补充 5.7），由下式给出：

$$Q=\frac{\left(n-\frac{1}{2}\right)\pi}{\ln\left(\frac{\alpha_2\rho_2+\alpha_1\rho_1}{\alpha_2\rho_2-\alpha_1\rho_1}\right)}.\tag{7.183}$$

如果阻抗比较大，或 $\alpha_2\rho_2\gg\alpha_1\rho_1$，则其对数接近于 0 并且 Q 变得很大，结果将引起长时间持续回响。这种类型的回响称为风琴管

振型，因为它实质上是在垂直方向上的一维振荡。

7.6.2 相速度和衰减

让我们考虑另一情况，此时接收点远离震源，我们可以使用Bessel 函数 $J_0(kr)$的渐近展开式。将(6.16)代入(7.181)并仅保留前边的项，我们得到

$$P^{总} \sim \frac{4}{\pi r}\mathrm{Re}\sum_n \int_{-\infty}^{\infty} (k)^{1/2} \frac{\exp\left(-i\omega_n t + ikr - i\frac{\pi}{4}\right)}{\omega_n + i\sigma} \times F_2(\omega_n, k)dk. \tag{7.184}$$

在此情况下，鞍点由下式确定：

$$\frac{d(-i\omega_n t + ikr)}{dk} = 0$$

或

$$\frac{d\omega_n}{dk} = \frac{r}{t}. \tag{7.185}$$

由于 r/t 是实数，我们可知群速度 $d\omega_n/dk$ 在鞍点处也是实数。为确定鞍点的位置，必须找到这样的 $(\omega_n,\ k_n)$，使之同时满足(7.185)和 $f_1(\omega_n,\ k_n)=0$ 的(7.159)。一旦我们得到鞍点，即所说的 k_{sn} 和相应的 ω_{sn}，则最速下降路径由下式确定：

$$-i\omega_n t + ikr \sim -i\omega_{ns} t + ik_{sn} r - \frac{i}{2}\omega_{sn}''(k - k_{sn})^2 t$$
$$= -i\omega_{sn} t + ik_{sn} r - x^2$$

x 是实数。沿最速下降路径完成这积分，我们得到

$$P^{总} \sim \frac{4}{\sqrt{rt}}\sum_n |Q_n| \exp(-L_n t)\cos(\mathrm{Re}\,\omega_{sn} t - \mathrm{Re}\,k_{sn} r + \psi), \tag{7.186}$$

其中 $L_n = -\mathrm{Im}\,\omega_{sn} + \mathrm{Im}\,k_{sn} r/t$,

$$Q_n = \frac{\sqrt{k_{sn}}\,F_2(\omega_{sn},\ k_{sn})}{(i\omega_{sn} + \sigma)\sqrt{\omega_{sn}''}},$$

同时 ϕ 是 Q_n 的相角。这些公式给出了相速度以及和每一漏能振型有关的衰减。

Rosenbaum(1960)给出了一些数值结果。例如，图 7.20 表明了在 $\alpha_2/\alpha_1=4$ 和 $\rho_2/\rho_1=2.7$ 的情况下最低振型($n=1$)中的群速度 $d\omega_n/dk=r/t$，和相速度 $\mathrm{Re}(\omega_{sn})/\mathrm{Re}(k_{sn})=c$ 之间的关系。图 7.21 表明相应的衰减因子 L。声波漏能振型，对于较高的相速度有较低的群速度，并且它的群速度总是比简正振型的要低。在刚性表面上置有一层时，其中简正振型的群速度和相速度之间的关系如图 7.20 中的虚线所示。另一方面，对一弹性体，确实存在比简正振型较早到达的漏能振型。在近距离处常常观测到在 P 波之后有一个衰减振荡的长周期运动，称为 PL 波。这一运动被 Oliver 和 Major(1960)解释为漏能振型。

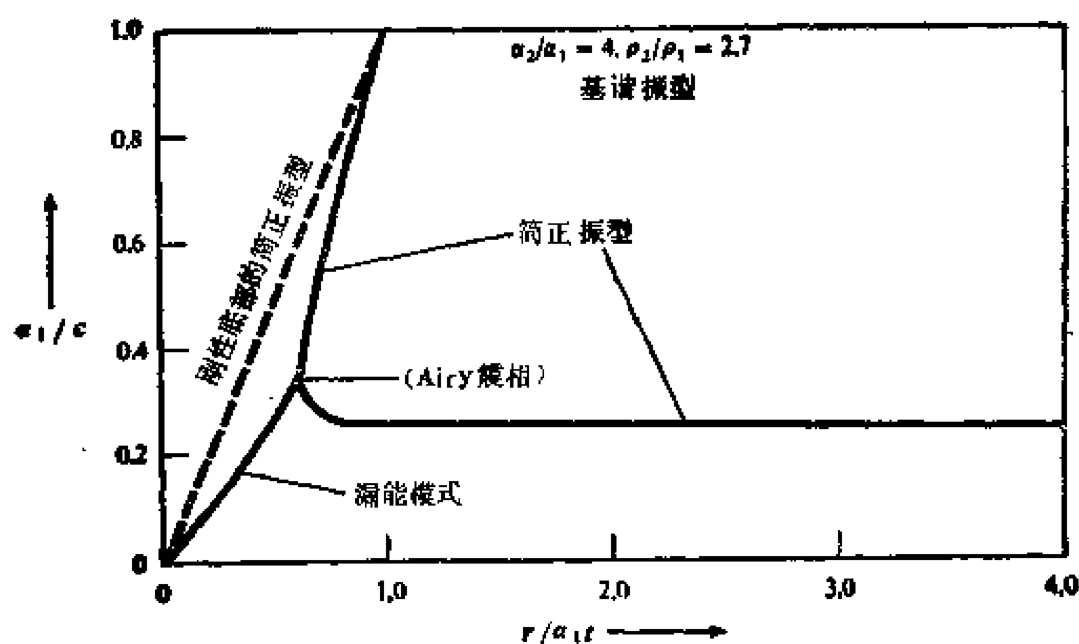


图 7.20

对基频的简正振型和漏能振型，在 $\alpha_2/\alpha_1=4$ 和 $\rho_2/\rho_1=2.7$ 的情况下群速度和相速度之间的关系。当半空间是刚性时，漏能振型中和简正振型中群速度和相速度之间的关系是相似的(引自 Rosenbaum, 1960)

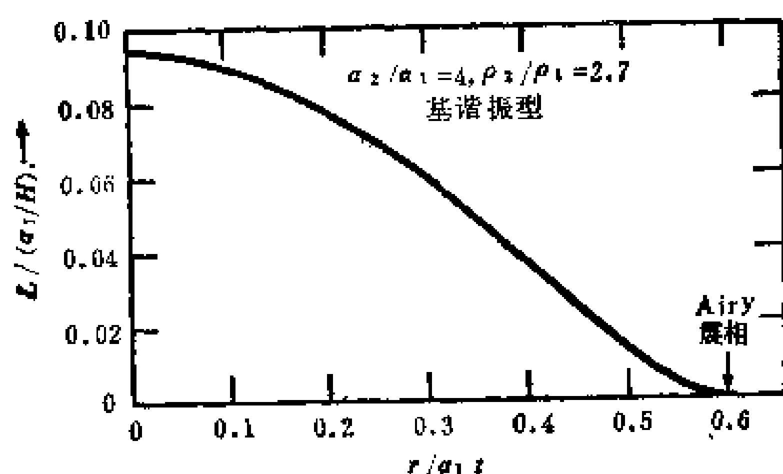


图 7.21
漏能振型的衰减因子(引自 Rosenbaum,1960)

建议进一步阅读的文献

Ewing, M., J. L. Worzel, and C. L. Pekeris. *Propagation of Sound in the Ocean*. Geological Society of America, Memoir 27, 1948.

Ewing, W. M., W. S. Jardetzky, and F. Press. *Elastic Waves in Layered Media*. New York: McGraw-Hill, 1957.

Gantmacher, F. R., *The Theory of Matrices* (2 vols.). New York: Chelsea Publishing Co., 1959.

Gilbert, F., and G. E. Backus. Propagator matrices in elastic wave and vibration problems. *Geophysics*, **31**, 326-332, 1966.

Lighthill, M. J., Group velocity. *Journal of the Institute of Mathematics and Its Applications*, **1**, 1-28, 1965.

Brune, J. N., J. E. Nafe, and J. E. Oliver. A simplified method for the analysis and synthesis of dispersed wave trains. *Journal of Geophysical Research*, **65**, 287-304, 1960.

Schwab, F. A., and L. Knopoff. Fast surface wave and free mode computations. *In* B. A. Bolt (editor),

Seismology: Surface Waves and Earth Oscillations (Methods in Computational Physics, Vol. 11). New York: Academic Press, 1972.

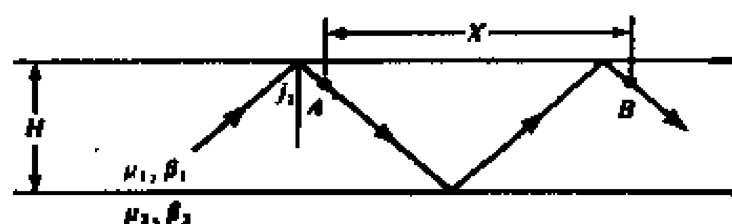
Schultz, M. H. *Spline Analysis.* Englewood Cliffs, New Jersey: Prentice-Hall, 1973.

Oliver, J., and M. Major. Leaking modes and the PL phase. *Bulletin of the Seismological Society of America*, **50**, 165-180, 1960.

Banmford, D., S. Crampin, and others. Special edition on anisotropy. *Geophysical Journal of the Royal Astronomical Society*, **49**, 1-243, 1977.

问 题

7.1 这里我们介绍在半空间上一单层中Love波的另一观点。对这类面波(具有频率 ω 和相速度 $c(\omega)$)其物理机制是，体波在表层内的超临界反射($\beta_1<\beta_2$) 产生面波。对同样深度的两点A和B，在面波传播方向上两点间的距离取为X，则B点的相位必然与A点有 $X\omega/c$ 的相移。



a) 对A和B之间的体波，证明其相移为

$$\psi=\frac{2H\omega}{\beta_1}\sec j_1-2\arctan\left[\frac{\mu_2\left(\frac{1}{c^2}-\frac{1}{\beta_2^2}\right)^{1/2}}{\mu_1\left(\frac{1}{\beta_1^2}-\frac{1}{c^2}\right)^{1/2}}\right].$$

[提示：方程(5.32)在这里是有用的。]

b) 若面波存在，证明ψ和$X\omega/c$仅差2π的整数倍。根据这个要求可得到频散关系式(7.6)。

c) 如果$\beta_1>\beta_2$，为什么Love波不能存在？

7.2 证明，在均匀层中SH波的传播矩阵可由(7.50)的矩阵乘法(在$Z=Z_0$时计算)给出，而(7.50)是由(7.49)转换而得。从(7.55)和(7.56)可得到P-SV波的相应结果。[Thomson和Haskell最初得到的传播因子即是由此方法，而并非由(7.41)。]

7.3 以$\boldsymbol{f}(Z_l)$及$\boldsymbol{f}(Z_{l-1})$和$\boldsymbol{W}_l$的关系推广上述问题的概念，并证明

$$\boldsymbol{f}(z_l)=\boldsymbol{F}_l(z_l)\boldsymbol{F}_l^{-1}(z_{l-1})\boldsymbol{f}(z_{l-1}).$$

因此，证明从z_0到z_k的传播因子可表示成

$$\boldsymbol{P}(z_k,\ z_0)=[\boldsymbol{F}_k(z_k)\boldsymbol{F}_k^{-1}(z_{k-1})][\boldsymbol{F}_{k-1}(z_{k-1})\boldsymbol{F}_{k-1}^{-1}(z_{k-2})]\cdots[\boldsymbol{F}_1(z_1)\boldsymbol{F}_1^{-1}(z_0)]$$

(注意，如介质由非均匀层叠置而成，这些结果仍是真实的。如若$\boldsymbol{F}_l(z)$是一矩阵，此矩阵的列即为第l层中$\partial \boldsymbol{f}/\partial z=\boldsymbol{A}(z)\boldsymbol{f}$的线性独立的解。)

7.4 在5.4节和7.2节中，我们证明了$\boldsymbol{FW}$可认为是解$\partial \boldsymbol{f}/\partial z=\boldsymbol{A}\boldsymbol{f}$的所有可能的各类型波之和；$\boldsymbol{F}$的每一列可分别是$\partial \boldsymbol{f}/\partial z=\boldsymbol{A}\boldsymbol{f}$的基本解；$\boldsymbol{w}$是一恒定矢量，它给出$\boldsymbol{Fw}$中所含的每一基本解的权。考虑当$k>\omega/\alpha$时(7.55)中$\boldsymbol{F}$的第一列，证明(7.54)的$\boldsymbol{Fw}$中相应的波是一个非均匀$P$波，它的位移振幅是

$$\dot{P}e^{-\nu z}[\alpha^2k^2/\omega^2-\sin^2(kx-\omega t)]^{1/2}.$$

7.5 通过重新定义原点，证明，构成$G_{np}(0,0,h;x,y,z;\omega)$的一种方法是在对$G_{np}(x,y,z;0,0,h;\omega)$的公式中，做变换($r\to r$；$\phi\to\phi+\pi$；$z\to h$；$h\to z$)。用此方法证明面波分量(7.145)和(7.146)满足互易关系

$$G_{np}(0,0,h;x,y,z;\ \omega)=G_{np}(x,y,z;\ 0,0,h;\omega).$$

7.6 证明，当波数不变时，由结构扰动($\delta\rho,\delta\mu$)产生的Love波

相速度的变化为

$$\left(\frac{\delta c}{c}\right)_k=\frac{\int_0^\infty\left[k^2l_1^2+\left(\frac{dl_1}{dz}\right)^2\right]\delta\mu dz-\int_0^\infty\omega^2l_1^2\delta\rho dz}{2\omega^2\int_0^\infty\rho l_1^2dz}.$$

7.7 证明，对 Poisson 比为 0.25 的半空间，其 Rayleigh波的本征函数由下式给出

$$r_1=e^{-0.8475kz}-0.5773\,e^{-0.3933kz},$$

$$r_2=0.8475\,e^{-0.8475kz}-1.4679\,e^{-0.3933kz},$$

并且能量积分 I_1 等于 $0.6205\,\rho/k$（k 是水平波数，ρ 是密度）。因此，用(7.149)可得到位于深度 h 处具有任意矩张量的点源所产生的 Rayleigh 波的显式。

7.8 频散波列的波形由下式给出：

$$f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}|F(\omega)|e^{-i\omega t+i\phi(\omega)}d\omega$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_0^\infty|F(\omega)|\cos[\omega t-\phi(\omega)]d\omega$$

如果群速度的延迟时间 $t_g=d\phi/d\omega$ 和 $d|F(\omega)|/d\omega$ 对离散频率 ω_i 是已知的，则上式可容易而准确地计算。证明

$$f(t)=\sum\frac{1}{\pi}\int_{\omega_i-\Delta\omega_i/2}^{\omega_i+\Delta\omega_i/2}|F(\omega)|\cos(\omega t-\phi(\omega))d\omega$$

$$\sim\sum_i\frac{\Delta\omega_i}{\pi}\left[|F(\omega_i)|\cos\omega_i(t-t_{pi})\frac{\sin\{(\Delta\omega_i/2)(t-t_{gi})\}}{(\Delta\omega_i/2)(t-t_{gi})}\right.$$

$$-\frac{d|F(\omega_i)|}{d\omega}\frac{\sin\omega_i(t-t_{pi})}{t-t_{gi}}\left\{\frac{\sin[(\Delta\omega_i/2)(t-t_{gi})]}{(\Delta\omega_i/2)(t-t_{gi})}\right.$$

$$\left.\left.-\cos\left[\frac{\Delta\omega_i}{2}(t-t_{gi})\right]\right\}\right],$$

其中 $t_{pi}=\phi(\omega_i)/\omega_i$ 是在 ω_i 处的相位延迟时间。

7.9 由观测到的如下一些性质可确定面波的相速度做为频率的函数

a）它们的群速度是4.4公里/秒，和频率无关；

b）它们的波形随距离而变化，但每走过8800公里则回复到同样形状；

c）它们的相速度随周期而增加。（在周期范围为40—200秒之间的长周期Love波大致表现有上述特性。面为频率和群速度无关，它们表现为一脉冲形式，并有时称为G波）。

第八章　地球的自由振荡

大地震产生的长周期面波，由于它们绕地球连续运行，在一给定的台站上可以记录到几次。在第七章中讨论过的平地球模型，对分析这些长周期面波显然是不适用的。甚而对象 20 秒那样的短周期，地球曲率对面波频散的影响也是不能忽略的，尤其是当上地幔中有一明显的低速层时，它可俘获大部份能量并有效地减少运行的距离。此外，频散可以如此强烈，以致绕地球运行 $N+1$ 次的长周期面波可以和绕地球运行 N 次的较慢的短周期波以及和沿相反方向绕地球运行的波发生干涉。因此，为完善面波的分析，研究球形地球模型是很重要的。但本章的主要目的是要弄清楚面波和体波（和漏能模式）是一些可以用更基本的运动即地球的自由振荡来表示的现象。

因为地球是个有限体，作为整体它仅在某些一定的离散频率处才能共振。让我们先来弄清楚为什么一定如此。

前几章中，波系是以其水平波数（k）和频率（ω）来描述的。由于这些波在介质中传播时在横向上（水平方向）无限地伸展，在此情况下 k 是连续可变的。我们强调一种方法，在此方法中对每一 ω 只有某些波数 $k=k_n(\omega)$（$n=1,\ 2,\ \cdots$）才是可能的。但我们也可将 k 看成独立变量，则发现对面波振型，只有某些本征频率 $\omega=\omega_n(k)$ 时才是可能的（虽然对每一个 n，ω 连续变化）。正是频散关系的后一形式，自然地和球形地球中自由振荡的讨论相连。因为在球面几何中这会得出由于介质在横向是有限的（$0\leqslant\Delta<2\pi$，其中 Δ 如图 8.1 所示），“水平波数”被固定在某些离散数值上。事实上，我们将利用水平的角波数 l 来代替 k，并发现 l 必然为零或为正整数。我们写成 ${}_n\omega_l$ 面不是 ${}_n\omega(l)$，对

给定的 l,我们最初的目的之一是必须得到正的本征频率 ${}_n\omega_l(n=0, 1, 2,\cdots)$。

对一均匀的液体球，我们将从“频散关系” $\omega={}_n\omega_l$ 的讨论开始进行这一分析——即我们须知道对基频（$n=0$）和谐频（$n>0$），ω 如何依赖于 l。我们将忽略重力，所以我们将研究的是一个不真实的但却简化了的模型，为导出在任何球模型的分析中所需要的很多波函数，这简化模型是很有用的。因此我们将描述一个点源激发的自由振荡，重点放在地球的球形对面波传播的影响上。对于周期大于 500 秒左右的波，重力效应变得很重要，我们将说明应如何考虑自重力。最后，我们将讨论由于地球自转引起的谱线分离以及（在第十三章中）由于地球结构的横向变化引起的分离。

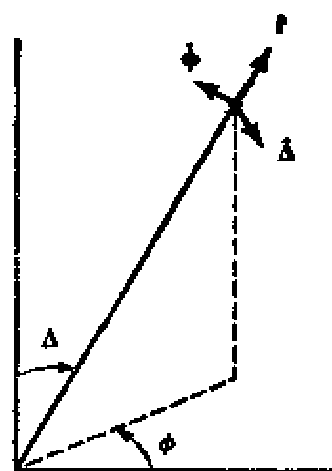


图 8.1
球极坐标（r, Δ, ϕ）其原点在地球的中心。$\Delta=0$ 的线往往看成是穿过震源的，在此情况下称其为震中坐标

8.1 均匀液体球的自由振荡

所有自由振荡系统都具有地球自由振荡的一些主要特性，可能其中最简单的是“琴弦”问题的解。弦的横向运动是位置 x 和时间 t 的函数，它满足一维波动方程 $c^2\,\partial^2y/\partial^2x=\partial^2y/\partial^2t$，并在 $x=0$ 和 $x=l$ 处满足 $y(x,t)=0$。我们将假定读者比较熟悉有关的 Sturm-Liouville 理论。最重要的结果是满足上述波动方程和边界条件的任意解 $y(x, t)$ 可展开为

$$y=\sum_n a_n y_n(x, t),$$

其中 a_n 是常数，y_n 是自由振荡；$y_n=\sin({}_n\omega x/c)\cos({}_n\omega t)$ 具

有本征频率 ${}_n\omega=(n+1)\pi c/L$。

为得出球形介质中一些熟悉的特性，我们将假设有一半径为 r_0、均匀的、可压缩的液体球，其弹性性质为体积模量 k 和密度为 ρ。在此介质内没有体力，我们将考察关于平衡压力场中微小压力扰动 P 引起的自由振荡。因为应力 τ_{ij} 仅为 $-P\delta_{ij}$，故通常的运动方程（2.17）可写成

$$\rho\ddot{\boldsymbol{u}}=-\nabla P, \tag{8.1}$$

Hooke 定律（2.18）可简化为

$$P=-\kappa\nabla\cdot\boldsymbol{u}. \tag{8.2}$$

由于 ρ 和 κ 是常数，因而

$$c^2\nabla^2 P=\partial^2 P/\partial^2 t^2, \tag{8.3}$$

其中 $c^2=\kappa/\rho$。

我们假定一“自由”边界条件——即在半径 r_0 的表面上有 $P(\boldsymbol{x},\ t)=0$。选择球极坐标系 (r,Δ,ϕ)，如图 8.1 所示。很自然地是要试图找到依赖于（r，Δ，φ，t）并可分解为四个不同因子的特解：$P=R(r)\Theta(\Delta)\Phi(\phi)T(t)$。我们在（5.8）的讨论中指出对某一常值 ω，$T=\exp(\pm i\omega t)$，为分离空间关系，我们需要用球极坐标中的 ∇^2 算子，即

$$\nabla^2 P=\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial P}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2\sin\Delta}\frac{\partial}{\partial\Delta}\left(\sin\Delta\frac{\partial P}{\partial\Delta}\right)$$
$$+\frac{1}{r^2\sin^2\Delta}\frac{\partial^2 P}{\partial\phi^2}. \tag{8.4}$$

在补充 8.1 中我们得到

$$\Theta(\Delta)\Phi(\phi)=Y_l^m(\Delta,\phi)\equiv(-1)^m\left[\frac{2l+1(l-m)!}{4\pi(l+m)!}\right]^{1/2}$$
$$\times P_l^m(\cos\Delta)e^{im\phi}, \tag{8.5}$$

其中 l 和 m 是整数，$-l\leqslant m\leqslant l$，并且 $P_l^m(\cos\Delta)$ 是连带 Legendre 函数。虽然已经分离了 Δ 和 ϕ 的关系，在一般实用中都将（8.5）式中的乘积 $\Theta\Phi$ 写成 $Y_l^m(\Delta,\ \phi)$。

补充 8.1

球面谐函数

在球面几何中，特殊函数 $\Theta(\Delta)\Phi(\varphi)$ 分离了方程 $c^2\nabla^2 P=\partial^2 P/\partial t^2$ 解的水平变化，由此可得到一系列重要的特性。这里我们将概述地球物理学中常用的某些特性的推导，因为在地球的整个球面上需要确定连续的有界函数。

尝试一个解 $P(\boldsymbol{x},\ t)=R(r)\Theta(\Delta)\Phi(\varphi)\exp(-i\omega t)$，我们由(8.3)和（8.4）得到

$$\frac{\sin^2\Delta}{R}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dR}{dr}\right)+\frac{\sin\Delta}{\Theta}\frac{d}{d\Delta}\left(\sin\Delta\frac{d\Theta}{d\Delta}\right)$$

$$+\frac{\omega^2 r^2}{c^2}\sin^2\Delta=-\frac{1}{\Phi}\frac{d^2\Phi}{d\phi^2}.$$

左半部与 ϕ 无关，因此 $(1/\Phi)(d^2\Phi/d\phi^2)$ 是一常数。求解 Φ 并注意，如果 $P(\boldsymbol{x},\ t)$ 是位置的单值函数，则 $\Phi(\phi)$ 一定是周期性的，且周期为 2π，于是我们得到本征函数

$$\Phi=e^{im\varphi}\qquad m=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \pm3,\ \cdots \tag{1}$$

现在 R 和 Θ 对 $(r,\ \Delta)$ 的方程为

$$\frac{1}{R}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dR}{dr}\right)+\frac{\omega^2 r^2}{c^2}=\frac{m^2}{\sin^2\Delta}-\frac{1}{\sin\Delta\Theta}\frac{d}{d\Delta}\left(\sin\Delta\frac{d\Theta}{d\Delta}\right),$$

这里已使等式左半部仅和 r 有关，右半部仅和 Δ 有关。因此，若以上方程对所有的 $(r,\ \Delta)$ 都可满足，必须存在某个常数 K，使得

$$\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dR}{dr}\right)+\left(\frac{\omega^2 r^2}{c^2}-K\right)R=0, \tag{2}$$

和

$$\frac{d}{d\Delta}\left(\sin\Delta\frac{d\Theta}{d\Delta}\right)=\left(\frac{m^2}{\sin^2\Delta}-K\right)\sin\Delta\Theta. \tag{3}$$

我们连续分析 Θ 的方程，从如下情况开始：

$m=0$ 的情况

函数 $\Phi(\varphi)$ 是常数，解 $P(\boldsymbol{x},\ t)$ 有轴对称性，Θ 满足 $\frac{d}{d\Delta}\left(\sin\Delta\times\frac{d\Theta}{d\Delta}\right)=-K\sin\Delta\Theta$，并且为了方便可消掉角 Δ 而用变量 $x=\cos\Delta$ 代替，因而也消掉了 Θ 方程中的三角函数项。我们得到

$$(1-x^2)\frac{d^2\Theta}{dx^2}-2x\frac{d\Theta}{dx}+K\Theta=0, \tag{4}$$

称为 Legendre 方程。在常数K为一般值时，解在$-1\leqslant x\leqslant 1$区间的端点上有奇点。这是相应于$0\leqslant\Delta\leqslant\pi$的区间，也是描述地球中的位置所必须的。但是对某些$K$的特定值，存在非奇异解$\Theta$，它是$x$的多项式。

为证明这一点，假定存在一个如下形式的解

$$\Theta(x)=x^k\sum_{i=0}^{\infty}b_i x^i \qquad (b_0\neq 0). \tag{5}$$

将 (5) 代入 (4)，使x的每一幂次的系数为零，我们得到

$$b_0 k(k-1)=0, \tag{6}$$

$$b_1(k+1)k=0, \tag{7}$$

并且通式为

$$b_{i+2}=b_i\left[\frac{(k+i)(k+i+1)-K}{(k+i+1)(k+i+2)}\right]. \tag{8}$$

由 (6) 可知，$k=0$或$k=1$。不失普遍性，我们将假定$k=0$(因为由 (7) 和 (8)，$k=1$意味着所有具有奇数脚标的b_i为零，所以只有b_0便可确定所有的非零的b_i；这结果被包括在$k=0$的情况中)。

由 (8) 可知，一般当$i\to\infty$时，$|b_i+2/b_i|\to 1$。因此，和几何级数相比，假如$-1<x<1$，则 (5) 是收敛的，但在$x=\pm 1$ ($\Delta=0$或π) 处情况如何呢？可以证明，Θ的无穷级数将发散，除非由于某种原因，偶数脚标之一的b_i为零，且奇数脚标的b_i亦为零（进而所有以后的b_i为零，所以这无穷级数化简为多项式，此多项式对特定值$x=\pm 1$显然"收敛")。考虑(8)，并令$k=0$，我们看到只有一种情况,可以使b_{i+2}等于零（若$b_i\neq 0$)，那就是$k=i(i+1)$。

由此，我们得到一个重要结果，为从Θ方程中分离出径向方程而引入的常数K必须是两个相邻整数的乘积。否则，Θ方程没有在整个$0\leqslant\Delta\leqslant\pi$区间中可以成立的解。

此外，如果$K=l(l+1)$且l为偶数，则正是偶数脚标的b_i组成了解。由于要求$b_1=0$，奇数脚标系列必须终止。类似地，如果$K=l(l+1)$且l为奇数，则$b_0=0$。在任一情况下，Θ的解是一个l次的多项式。对b_0或b_1的习惯选择是按如下要求进行的：

当 $x=1$ 时 $\Theta(x)=1$. (9)

此多项式结果为 Legendre 多项式。把它们写成递降幂次的和，其 l 或偶或奇，大量的计算给出下式：

$$\Theta=P_l(x)=\frac{(2l)!}{2^l(l!)^2}\left[x^l-\frac{l(l-1)x^{l-2}}{2(2l-1)}\right.$$

$$\left.+\frac{l(l-1)(l-2)(l-3)x^{l-4}}{2\cdot4\cdot(2l-1)(2l-3)}-\cdots\right], \tag{10}$$

最后一项截止于 x 或 1 处（乘以一常数）。Legendre 多项式的前几项为

$$P_0(x)=1,\quad P_1(x)=x,\quad P_2(x)=\frac{1}{2}(3x^2-1),$$

$$P_3(x)=\frac{1}{2}(5x^3-3x),\quad P_4(x)=\frac{1}{8}(35x^4-30x^2+3),$$

其通式为

$$P_l(x)=\frac{1}{2^l l!}\frac{d^l}{dx^l}(x^2-1)^l,$$

此即 Rodrigues 公式。

$m\neq0$ 的情况

若 m 是一个非零整数，开始我们将假定它为正的。于是由(3)中的 $x=\cos\Delta$，我们得到

$$\frac{d}{dx}\left[(1-x^2)\frac{d\Theta}{dx}\right]=\frac{m^2}{1-x^2}-K\Theta. \tag{11}$$

我们可试求类似于 (5) 的幂级数解。然而，这个方法会陷入困境，因为我们得到的 b_{i+2} 公式不只包括 b_i（如以前 $m=0$ 时对 Θ 所作的）而且还包括 b_{i+1}，并且此三项之间递推关系的通解是很麻烦的。为推测可以做什么，我们记得，在 $m=0$ 时在 $x=\pm1$ 附近 Θ 的特性是很重要的。考查 (11) 中的系数，可期望当 $m>0$ 时它们也是重要的。因此，我们转而简要地考查 $x=\pm1$ 附近的 Θ。当 $e=x\pm1$ 且 e 很小时，(11) 近似为

$$e\frac{d^2\Theta}{de^2}+\frac{d\Theta}{de}-\frac{m^2\Theta}{4e}=0,$$

此式的解为 $\Theta=e^{m/2}$ 和 $\Theta=e^{-m/2}$。这第二个解在 $e=0$ 处很不规则，可以抛弃。而且，似乎在 $x=\pm1$ 处 Θ 应当有 $m/2$ 阶零点。它们两者都可通过下式分解出来：

$$\Theta(x)=(1-x^2)^{m/2}A(x),$$

并且我们希望通过 $A(x)$ 的研究来研究 Θ。

此方法是有效的，因为 A 满足常微分方程

$$(1-x^2)\frac{d^2A}{dx^2}-2(m+1)\frac{dA}{dx}+[K-m(m+1)]A=0, \quad (12)$$

并且在展式 $A(x)=x^s\sum_{i=0}^{\infty}c_ix^i$ 中的系数正好有一个二项递推公式。这个递推公式是

$$c_{i+2}=\frac{[(i+m)(i+m+1)-K]}{(i+1)(i+2)}c_i.$$

一般说，这个公式将产生 $A(x)$ 的两个级数解（一个是 x 的偶次幂，含有系数 c_0；另一个是奇次幂，含有系数 c_1）。如果这些级数不是截止于某一幂次 x^r 上，它们将具有 $(1-x^2)^{-m}$ 的特性。若要求 Θ 在 $-1\leqslant x\leqslant 1(0\leqslant\Delta\leqslant\pi)$ 区间中无奇点，就得到 $c_{r+2}=0$，并且如 r 为偶数时，$c_1=0$，如 r 为奇数时，$c_0=0$。因而

$$(r+m)(r+m+1)=K,$$

且 K 的本征值，它再一次为（即若 $m=0$）相邻整数的乘积；$r\geqslant 0$，$m\geqslant 0$，因此，对某些整数 $l\geqslant 0$ 时，我们取 $K=l(l+1)$。由于 $r\geqslant 0$，我们也得到了 $m\leqslant l$ 这个重要结果。

注意，如果 $m>0$ 或 $m=0$，由于 K 取同样的本征值，此径向函数 $R(r)$ 不因降低轴对称的要求而改变。

我们已表明，$\Theta(x)=(1-x^2)^{m/2}A(x)$，这里的 A 现为 x 的多项式。求这个多项式的系数没有特别的困难。然而，可用一个较快的方法得到 A 的公式，因为若 Legendre 多项式 P_l[见(4)]所满足的方程被微分 m 次，则有如下结果：

$$(1-x^2)\frac{d^{m+2}}{dx^{m+2}}P_l-2(m+1)x\frac{d^{m+1}}{dx^{m+1}}P_l$$
$$+[l(l+1)-m(m+1)]\frac{d^m}{dx^m}P_l=0.$$

将此式和 $A(x)$ 所满足的方程(12)对比，我们看到 A 的一个解为 $A(x)=d^mP_l(x)/dx^m$。由于 $A(x)$ 是包含 x 的非负幂次的多项式，在 $-1\leqslant x\leqslant 1$ 中任何位置上，不存在 $A(x)$ 不连续的危险。

所以，乘积$(1-x^2)^{m/2}d^m P_l(x)/dx^m$ 是角函数 $\Theta(x)$的解。这就是所谓的连带 Legendre 函数，$P_l^m(x)$。

含有 Θ 的方程 (11) 仅以 m^2 和 m发生关系。因此，如 $m<0$，非奇异解必须和 $P_l^{|m|}(\cos\Delta)$ 成比例。按通常习惯，

$$P_l^{-m}(x)=(-1)^m\frac{(l-m)!}{(l+m)!}P_l^m(x), \tag{13}$$

上式中的比例常数是取其使

$$P_l^m(x)=\frac{(1-x^2)^{m/2}}{2^l l!}\frac{d^{l+m}(x^2-1)^l}{dx^{l+m}} \tag{14}$$

适用于$-l\leqslant m\leqslant l$ 中所有的 l，m。

一些书中已给出了 P_l 和 P_l^m 的性质 (Robin, 1957; Hobson, 1955)，并且 Wiggins 和斋藤 (Saito) (1971) 说明了如何进行有效的计算。汇总最重要的几个公式，得到

$$\frac{1}{(1+r^2-2r\cos\Delta)^{1/2}}=\sum_{l=0}^{\infty}r^l P_l(\cos\Delta) \quad 0<r<1, \tag{15}$$

$$(l-m+1)P_{l+1}^m(x)-(2l+1)xP_l^m(x)\\ +(l+m)P_{l-1}^m(x)=0, \tag{16}$$

$$(1-x^2)\frac{d}{dx}P_l^m(x)=(l+1)xP_l^m(x)-(l-m+1)P_{l+1}^m(x). \tag{17}$$

为了方便，可定义全归一化的面谐函数为

$$Y_l^m(\Delta,\ \phi)=(-1)^m\left[\frac{2l+1(l-m)!}{4\pi(l+m)!}\right]^{1/2}P_l^m(\cos\Delta)e^{im\phi}, \tag{18}$$

整数 $l\geqslant0$ 和整数 m 满足$-l\leqslant m\leqslant l$。因而

$$\int_0^{2\pi}d\phi\int_0^{\pi}[Y_l^m(\Delta,\phi)]^*Y_{l'}^{m'}(\Delta,\phi)\sin\Delta\, d\Delta=\delta_{ll'}\delta_{mm'}, \tag{19}$$

和

$$Y_l^{-m}(\Delta,\phi)=(-1)^m[Y_l^{m}(\Delta,\phi)]^*.$$

在点源激发的简正振型理论中，我们需要 Y_l^m 的值和 $\Delta=0$ 时它的一些导数。一主要的结果是，对 $m\geqslant0$，当 $\Delta\to0$ 时

$$P_l^m(\cos\Delta)\to\frac{1}{2^m m!}\frac{(l+m)!}{(l-m)!}\Delta^m$$

下面我们必须研究径向波函数 $R=R(r)$，并且它必须满足

$$\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dR}{dr}\right)+\left[\frac{\omega^2}{c^2}-\frac{l(l+1)}{r^2}\right]R=0. \qquad (8.6)$$

由于这里 c 是常数，(8.6) 是一个标准方程，已知它以球面 Hankel 函数为其解。此外，因为我们感兴趣的解，在 $0\leqslant r\leqslant r_0$ 范围内的任一处对压力均无奇点，所以，(8.6) 的解必须是 $R(r)\propto j_l(\omega r/c)$，其中 j_l 是 l 阶的球面Bessel函数。因为 l 是整数，我们可利用关系式

$$j_l(x)=x^l\left(-\frac{1}{x}\frac{d}{dx}\right)^l\left(\frac{\sin x}{x}\right) \qquad (8.7)$$

所以，当 $l=0$，

$$rR(r)\propto\sin(\omega r/c), \qquad (8.8)$$

当 $l=2$，

$$R(r)\propto\left(\frac{3c^3}{\omega^3r^3}-\frac{c}{\omega r}\right)\sin(\omega r/c)-\frac{3c^2}{\omega^2r^2}\cos(\omega r/c). \qquad (8.9)$$

还需考虑 $r=r^0$ 处的“自由”边界条件，它要求 $R(r_0)=0$。正是这个条件给出了可允许的本征频率 ${}_n\omega_l$。因此，由 (8.8)，对 $l=0$ 我们得到 $\sin(\omega r_0/c)=0$。由此得出

$${}_n\omega_0=\frac{(n+1)\pi c}{r_0}\ (n=0,\ 1,\ 2,\cdots). \qquad (8.10)$$

$n=0$ 给出了基频振型，$n\geqslant1$ 构成谐频或高阶振型。$l=0$ 时的运动纯属径向振型，因为相关的 u_Δ 和 u_φ 为零。在 $r_0=6000$ 公里和 $c=5$ 公里/秒的情况下，相应于 (8.10) 的周期为 ${}_nT_0=2400/(n+1)$秒，基频 ${}_0T_0$ 是 40 分。若 $l=2$，$j_l(x)$的第一个零点出现在 $x\sim1.8\pi$ 处，因而 ${}_0T_2\sim22$ 分。在图 8.2 中我们给出了 $n=0$，1，2 时的本征函数 ${}_nR_0\propto j_0({}_n\omega_0r/c)$，以及 $n=0$，1，2 时的本征函数 ${}_nR_2\propto j_2({}_n\omega_2r/c)$。

均匀液体球的自由振荡的重要特性是它们的正交性，和对方位阶数 m 的简并。因此，对于在 $|\boldsymbol{x}|<r_0$ 之内方程 $c^2\nabla^2p=\partial^2p/\partial t^2$ 的稳定状态[$\exp(-i\omega t)$]解的向量空间（解在 $|\boldsymbol{x}|=r_0$ 处满足

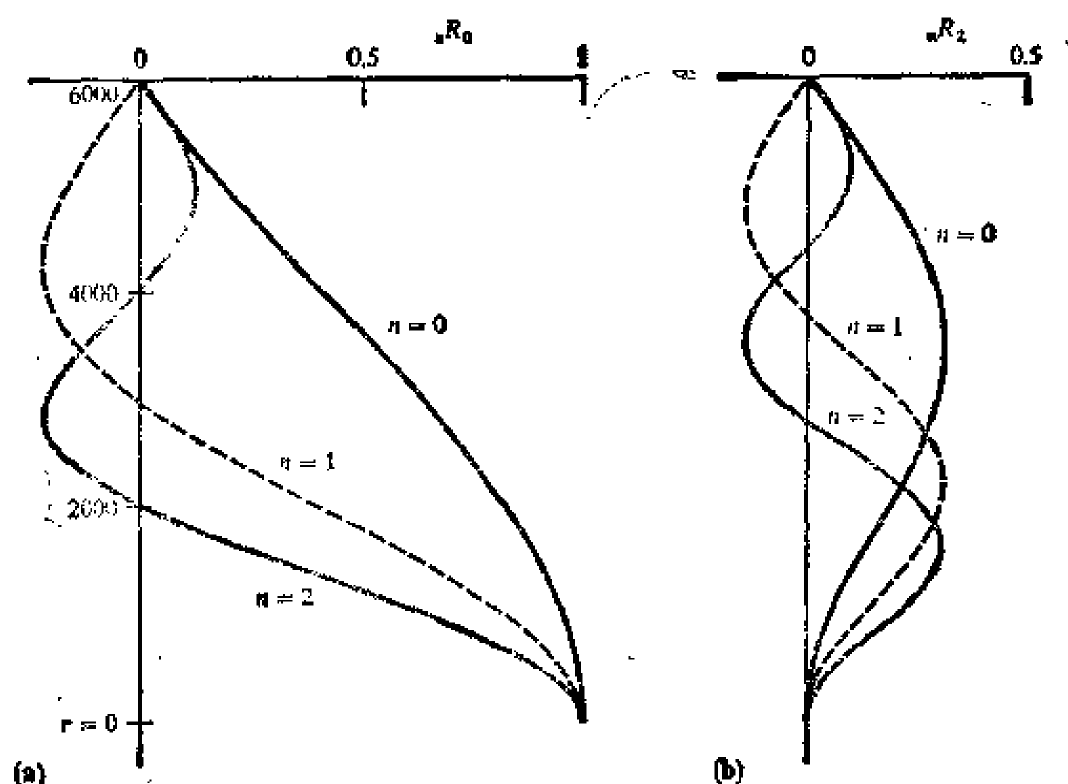


图 8.2

半径6000公里的液体球内，压力的本征函数 $_nR_l$ 表示成半径的函数。(a)$n=0$，1，2 时的 $_nR_0(r)$。(b)$n=0$，1，2 时的 $_nR_2(r)$

$P(x, t)=0$)，我们定义了一个内积。如果 f 和 g 是此向量空间的两个向量，我们定义

$$\{f, g\}=\iiint\limits_{|x|<r_0}\rho f^* g dV. \tag{8.11}$$

还假定，f 和 g 是分别具有本征频率 ω_f 和 ω_g 的简正振型。于是由代数运算给出

$$[\omega_g^2-(\omega_f^*)^2]\{f, g\}=0.$$

这里令 $f=g$，则得到本征函数必须是实数。如 $f\neq g$ 且 $\omega_f\neq\omega_g$，也可得到在 $\{f, g\}=0$ 的意义上 f 和 g 是正交的。因此，在现在的问题中，除了 $l=l'$，$m=m'$ 和 $n=n'$ 以外，有下列关系：

$$\{j_l({}_n\omega_l r/c)Y_l^m(\Delta,\ \phi),\ j_{l'}({}_{n'}\omega_{l'}r/c)Y_{l'}^{m'}(\Delta,\ \phi)\}=0. \quad (8.12)$$

对整数 $l\geqslant 0$，$n\geqslant 0$ 的每一种选择，都有 $(2l+1)$ 个自由振荡，并共同具有同样的本征频率 ${}_n\omega_l$ 和同样的径向本征函数 $j_l({}_n\omega_l r/c)$。这种简并的引起是由于一维波动方程(8.6)和 m 无关，并且在 $-l\leqslant m\leqslant l$ 区间中的每一 m，通过压力 $={}_np_l^m(x,\ t)=j_l({}_n\omega_l r/c)Y_l^m(\Delta,\ \phi)\exp(-i_n\omega_l t)$ 形成了不同的简正振型。

将自由振荡的分析推广到比我们的均匀液体球远远更好的地球模型是可能的，它可仍然保持了同样的正交性和简并的特点，并且可用 (l,m,n) 给模型以同样的编号方式。对于液体模型的一个显著改进是均匀的弹性固体球。Horace Lamb 于 1882 年对此进行了充分的研究。这是一个最简单的可压缩的介质，它显示出两种独立的振型体系，即球型和环型，它们的分别完全和在展平地球模型中，P-SV 的运动不同于 SH(第七章)一样。这正如在柱面几何中我们导出了面谐波向量 (7.117)，那么现在我们也必须导出球面几何中这样的向量。我们定义

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{R}_l^m(\Delta,\ \phi)&=Y_l^m\hat{\boldsymbol{r}},\\
\boldsymbol{S}_l^m(\Delta,\ \phi)&=\frac{1}{[l(l+1)]^{1/2}}\left(\frac{\partial Y_l^m}{\partial\Delta}\hat{\boldsymbol{\Delta}}+\frac{1}{\sin\Delta}\frac{\partial Y_l^m}{\partial\phi}\hat{\boldsymbol{\phi}}\right),\\
\boldsymbol{T}_l^m(\Delta,\ \phi)&=\frac{1}{[l(l+1)]^{1/2}}\left(\frac{1}{\sin\Delta}\frac{\partial Y_l^m}{\partial\phi}\hat{\boldsymbol{\Delta}}-\frac{\partial Y_l^m\hat{\boldsymbol{\phi}}}{\partial\Delta}\right),
\end{aligned} \quad (8.13)$$

其中 $Y_l^m(\Delta,\ \varphi)$ 是(8.5)中定义的全归一化的面谐波，$\hat{\boldsymbol{r}},\hat{\boldsymbol{\Delta}},\hat{\boldsymbol{\varphi}}$ 分别为在 r,Δ,φ 方向上的单位向量(图 8.1)。很容易看出 $\boldsymbol{R}$，$\boldsymbol{S}$，和 $\boldsymbol{T}$ 是相互垂直的，因为 $Y_l^m(\Delta,\varphi)$ 是全归一化的，所以向量函数满足以下的正交关系：

$$\int_0^\pi \sin\Delta d\Delta\int_0^{2\pi}d\phi\boldsymbol{R}_l^{m*}\cdot\boldsymbol{R}_{l'}^{m'}=\delta_{mm'}\delta_{ll'},$$

$$\int_0^\pi \sin\Delta d\Delta\int_0^{2\pi}d\phi\boldsymbol{S}_l^{m*}\cdot\boldsymbol{S}_{l'}^{m'}=\delta_{mm'}\delta_{ll'},$$

$$\int_0^\pi \sin\Delta d\Delta\int_0^{2\pi}d\phi\boldsymbol{T}_l^{m*}\cdot\boldsymbol{T}_{l'}^{m'}=\delta_{mm'}\delta_{ll'}.$$

球型的运动是一种 $\nabla\times\boldsymbol{u}$ 的径向分量为零的运动，而环型的运动则同时具有 $u_r=0$ 和 $\nabla\cdot\boldsymbol{u}=0$。均匀液体球显然只能维持球型运动。如果在此介质中的简正振型有一比例于 $j_l({}_n\omega_l r/c)\,Y_l^m\times(\Delta,\ \varphi)\exp(-i\omega t)$的压力场，那么，根据(8.1)，相应的位移场比例于

$$\left\{\left(\frac{dj_l}{dr}\right)\boldsymbol{R}_l^m(\Delta,\phi)+\frac{[l(l+1)]^{1/2}}{r}j_l\boldsymbol{S}_l^m(\Delta,\ \phi)\right\}\frac{\exp(-i_n\omega_l t)}{\rho({}_n\omega_l)^2}. \tag{8.14}$$

从这一结果和直接从(8.13)显见，$\boldsymbol{R}_l^m$ 和 $\boldsymbol{S}_l^m$ 是用来描述和球型运动有关的向量场，而 $\boldsymbol{T}_l^m$ 则用来描述和环型运动有关的向量场。

假如我们考虑的地球模型是球对称的并且不转动，我们将发现，通过推广（8.14）中出现的径向函数来描述球型振型是可能的。但此振型仍将显示出同样的水平波函数、同样的简并和类似于(8.12)的正交性。符号 ${}_nS_l$ 常用于标记球型振型，而 ${}_nT_l$ 则用于标记环型振型。

在某种意义上，球形地球模型比展平地球模型更易于研究，因为球内的任意运动均可用简正振型的叠加来表示。在前一章中占据了较大篇幅的漏能模式，对球体是不存在的。下一节将表明，推导被点源激发的自由振荡的公式比面波的更简单。

8.2 点源激发的自由振荡

由于球是一有限体，任意扰动均可表成简正振型的叠加。根据 Gilbert (1971) 的文章，我们将追溯到 19 世纪，从 Rayleigh 和 Routh 研究过的 N 个质点系统的振动入手。

考虑 N 个质点最初处于平衡状态。然后，一组外力 $\boldsymbol{f}_\alpha(t)$ 作用在第 α 个质点上（$\alpha=1,2,\cdots,N$），使所有的质点运动。令第 α 个质点的质量为 m_α，第 α 个质点离开平衡位置的位移为 $\boldsymbol{u}_\alpha$。

当位移较小时，我们可假定，质点间内力的变化为位移的线性之和。于是，运动方程可写成

$$m_\alpha \frac{d^2 \boldsymbol{u}_\alpha(t)}{dt^2} + \sum_{\beta=1}^{N} c_{\alpha\beta} \boldsymbol{u}_\beta(t) = \boldsymbol{f}_\alpha(t) \quad t > 0 (\alpha = 1, 2, \cdots, N), \tag{8.15}$$

其初始条件为

$$\boldsymbol{u}_\alpha(0) = 0 \quad 和 \quad \frac{d}{dt}\boldsymbol{u}_\alpha(0) = 0,$$

且 $\boldsymbol{c}$ 是对称的又是正的有限的(参考(2.32))。

当 $\boldsymbol{f}_\alpha = 0$ 时，系统的简正振型由(8.15)的解给出。由于每个质点有三个方程，对整个系统有 3 N 个本征频率 ω 和 $3N$ 个本征向量(简正振型)。以 ${}_i\boldsymbol{u}_\alpha \exp(-i\omega_i t)$ 代表简正振型，它是在第 i 个简正振型中第 α 个质点的位移．对每一个 i，为描述此振型需要所有质点($\alpha = 1, \cdots, N$)的运动．在第 i 个简正振型中第 α 个质点的运动，可由求解下式得到：

$$-\omega_i^2 m_\alpha({}_i\boldsymbol{u}_\alpha) + \sum_\beta c_{\alpha\beta}({}_i\boldsymbol{u}_\beta) = 0 \quad (\alpha = 1, \cdots, N). \tag{8.16}$$

除 $i = j$ 外，在

$$\sum_\alpha m_\alpha({}_j\boldsymbol{u}_\alpha^*)({}_i\boldsymbol{u}_\alpha) = 0$$

的意义上，本征向量 ${}_i\boldsymbol{u}_\alpha$ 是正交的，但其振幅不能用(8.16)确定。我们选择下式使其归一化：

$$\sum_\alpha m_\alpha({}_j\boldsymbol{u}_\alpha^*)({}_i\boldsymbol{u}_\alpha) = \delta_{ij}. \tag{8.17}$$

取(8.16)和 ${}_j\boldsymbol{u}_\alpha^*$ 的标量积，对 α 求和，利用(8.17)，我们得到

$$\sum_{\alpha\beta} c_{\alpha\beta}({}_j\boldsymbol{u}_\alpha^*)({}_i\boldsymbol{u}_\beta) = \omega_i^2 \delta_{ij}. \tag{8.18}$$

为得到(8.15)的解为简正振型的叠加，我们需要求展开式的，

系数 a_i

$$u_\alpha(t)=\sum_i a_i({}_iu_\alpha)\exp(-i\omega_i t)\quad(t>0).\qquad(8.19)$$

（当然，用于实 $u_\alpha(t)$ 的是这个和的实部。）我们利用 Laplace 变换，$u_\alpha(t)\to u_\alpha(s)$，从(8.19)得到

$$u_\alpha(s)=\sum_i\frac{a_i}{s+i\omega_i}{}_iu_\alpha.\qquad(8.20)$$

为求系数 a_i，我们将(8.20)代入(8.15)的 Laplace 变换：

$$m_\alpha s^2\sum_i\left(\frac{a_i}{s+i\omega_i}\right){}_iu_\alpha+\sum_\beta c_{\alpha\beta}\sum_i\left(\frac{a_i}{s+i\omega_i}\right){}_iu_\beta=f_\alpha(s).\ (8.21)$$

根据(8.17)，(8.18)和(8.21)，很容易得到

$$\frac{a_j}{s+i\omega_j}=\frac{\sum_\alpha{}_ju_\alpha^*f_\alpha(s)}{s^2+\omega_j^2},$$

所以，从(8.20)我们得到

$$u_\alpha(s)=\sum_i\left[\frac{\sum_\beta{}_iu_\beta^*f_\beta(s)}{s^2+\omega_i^2}\right]{}_iu_\alpha,\qquad(8.22)$$

此式反变换到时间域是很简单的。假定力的变化为时间的阶梯函数，$f_\alpha(t)=F_\alpha H(t)$，我们得到了（8.22）中的 $f_\beta(s)=s^{-1}F_\beta$。$[s(s^2+\omega_i^2)]^{-1}$的 Laplace 反变换为 $H(t)(1-\cos\omega_i t)/\omega_i^2$，所以，当 $t>0$ 我们得到

$$u_\alpha(t)=\sum_i\left(\sum_\beta{}_iu_\beta^*F_\beta\right){}_iu_\alpha\frac{1-\cos\omega_i t}{\omega_i^2}.\qquad(8.23)$$

当介质有能量耗散时，利用时间的 Q（补充 5 7），我们得到

$$u_\alpha(t)=\sum_i\left(\sum_\beta{}_iu_\beta^*F_\beta\right){}_iu_\alpha\frac{1-\exp[-(\omega_i t/2Q_i)]\cos\omega_i t}{\omega_i^2}.$$

(8.24)

这个解的结构有一些很有趣的特性。第一，我们注意到静态位移作为简正振型之和，很容易从(8.24)得到。事实上，(8.24)表明，每个振型的运动可认为是围绕一个新的参考值的衰减振荡，这新的参考值是在 $t=0$ 时开始引进的，如图 8.3 所示。第二，简正振型的和式(8.24)告诉我们，只从一个质点位移的观测，关于源可以知道些什么。这里假定我们知道该系统的全部简正振型。如果我们观测第 α 质点及其位移 $u_\alpha(t)$，我们可希望推断出 $i=1,2,\cdots,3N$ 的各激发系数

$$\sum_\beta {}_iu_\beta^* F_\beta .$$

(对于在第 α 个质点上有一个节点的那些振型，这是不可能的。在这些情况中，${}_iu_\alpha=0$，第 i 个振型的激发系数不可能从对于 ${}_iu^\alpha(t)$ 的了解来确定，因为那里观测不到此振型。获得激发系数的过程包括考察 $u_\alpha(t)$ 的 Fourier 谱以及测量集中于每一个 ω_i 处谱线峰值的高度。此外，对近于相同频率的两个振型，确定其激发系数也是有困难的。)有趣的是，通过仅仅观测一个质点并得到其激发系数，然后，用带有不同 α 的(8.24)去预测该系统中所有其它质点的运动，这是可能的。即使没有测定某些激发系数（注意前述理由），对所有的 α，预测 $u_\alpha(t)$ 谱的主要部分也还是可能的。

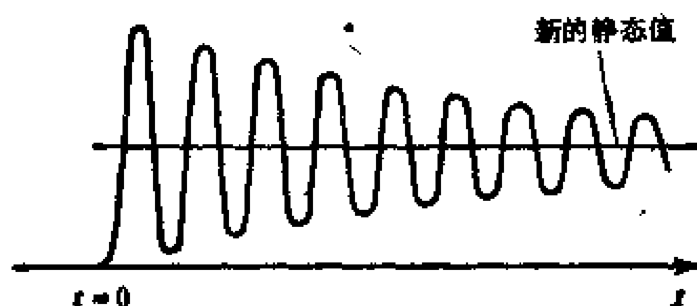


图 8.3

在 $t=0$ 时作用一阶梯函数的源，在一给定的简正振型中地面运动的记录

我们对解(8.24)已做了这些说明，因为它能很容易地被修改以应用于地球。我们考虑增加质点数以使它们是近于连续的。在极限情况下各质点的和，如$\sum_{\beta=1}^{N} {}_i u_\beta^* F_\beta$可用体积积分，例如用$\int_V {}_i u^*(\xi) f(\xi) dV(\xi)$代替，其中$f(\xi)$现为每单位体积中的体力。我们将继续假设这体力为时间的阶梯函数。依(8.24)我们立即可得

$$u(x,t)=\sum_i\left(\int_V {}_i u^*(\xi)\cdot f(\xi)dV\right){}_i u(x)$$

$$\times\frac{1-\exp[-(\omega_i t/2Q_i)]\cos\omega_i t}{\omega_i^2}. \qquad (8.25)$$

这里我们用i表示整个地球的第i个简正振型。即，每一个i相应于三个一组的整数(l,m,n)的某些值，在8.1节中得到的这些值，对表征各个振型是必要的。因此(8.25)的和是一无限的和，但，如Rayleigh(1945，101段)证明的，由于有因子ω_i^{-2}此和式收敛。(8.25)中的简正振型已按下式归一化(参考(8.171)：

$$\int_V \rho(\xi){}_i u^*(\xi){}_j u(\xi)dV=\delta_{ij}, \qquad (8.26)$$

其中$\rho(\xi)$是密度，而且是在整个地球上求体积积分。

现在我们求由一矩张量规定的点源产生的球形地球模型的振动。用先前作为练习(问题3.4)给出的结果，体力变为

$$f_p(\xi,t)=-M_{pq}(t)\frac{\partial}{\partial\xi_q}\delta(\xi-x_s). \qquad (8.27)$$

我们将假定M相当于在x_s处的时间阶梯函数，所以体力也是阶梯函数，且(8.25)直接可用。现在，第i个激发系数为

$$\int_V {}_i u^*(\xi)\cdot f(\xi)dV=-M_{pq}\int_V {}_i u_p^*(\xi)\frac{\partial}{\partial\xi_q}\delta(\xi-x_s)dV(\xi)$$

$$={}_i u_{p,q}^*(x_s)M_{pq}={}_i e_{pq}^*(x_s)M_{pq}, \qquad (8.28)$$

其中${}_ie_{pq}$是第 i 个简正振型中(pq)的应变分量。为求得(8.28)中最后的等式，我们用了对称性 $M_{pq}=M_{qp}$。将(8.28)代入(8.25)，最后我们得到作用在 $\boldsymbol{x}_s$ 处的一任意点源 $\boldsymbol{M}H(t)$的位移：

$$\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},t)=\sum_i ({}_ie^*_{pq}(\boldsymbol{x}_s)M_{pq})_i\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x})\,\frac{1-\exp(-\omega_it/2\,Q_i)\cos\omega_it}{\omega_i^2}. \tag{8.29}$$

因此，一旦地球的简正振型${}_i\boldsymbol{u}$为已知，则计算地球对带有任意矩张量的点源的响应是不难的。

为得到简正振型的公式，我们必须有更具体的地球模型。这里，我们将考虑一个无自转的球对称的地球，其密度 $\rho(r)$ 以及 Lamé 常数 $\lambda(r)$ 和 $\mu(r)$，仅仅和离对称中心的距离 r 有关。对此模型，运动方程(2.47)至(2.50)，可用第七章中采用的运动应力向量法加以研究。在球极坐标中，对振型(l,m,n)的位移，适当的初解是

$$\begin{aligned}&[{}_nU_l(r)\boldsymbol{R}_l^m(\Delta,\phi)+{}_nV_l(r)\boldsymbol{S}_l^m(\Delta,\phi)\\&+{}_nW_l(r)\boldsymbol{T}_l^m(\Delta,\phi)]\exp(-i_n\omega_lt).\end{aligned} \tag{8.30}$$

作用在 $r=$常数的球面上有关的牵引力为

$$\begin{aligned}&[{}_nR_l(r)\boldsymbol{R}_l^m(\Delta,\ \phi)+{}_nS_l(r)\boldsymbol{S}_l^m(\Delta,\ \phi)\\&+{}_nT_l(r)\boldsymbol{T}_l^m(\Delta,\phi)]\exp(-i_n\omega_lt).\end{aligned} \tag{8.31}$$

对径向函数，我们可将方程写成两个分离的形式：

$$\frac{d}{dr}\begin{pmatrix}V\\U\\S\\R\end{pmatrix}=$$

$$\begin{pmatrix}\frac{1}{r} & -\frac{[l(l+1)]^{1/2}}{r} & \frac{1}{\mu} & 0\\ \frac{\lambda[l(l+1)]^{1/2}}{r(\lambda+2\mu)} & -\frac{2\lambda}{r(\lambda+2\mu)} & 0 & \frac{1}{\lambda+2\mu}\\ \frac{4l(l+1)\mu(\lambda+\mu)}{r^2(\lambda+2\mu)}-\rho\omega^2-\frac{2\mu}{r^2} & -\frac{2\mu(3\lambda+2\mu)[l(l+1)]^{1/2}}{r^2(\lambda+2\mu)} & -\frac{3}{r} & -\frac{\lambda[l(l+1)]^{1/2}}{r(\lambda+2\mu)}\\ \frac{2\mu(3\lambda+2\mu)[l(l+1)]^{1/2}}{r^2(\lambda+2\mu)} & -\rho\omega^2+\frac{4\mu(3\lambda+2\mu)}{r^2(\lambda+2\mu)} & \frac{[l(l+1)]^{1/2}}{r} & \frac{-4\mu}{r(\lambda+2\mu)}\end{pmatrix}$$

$$\times\begin{pmatrix} V \\ U \\ S \\ R \end{pmatrix} \tag{8.32}$$

和

$$\frac{d}{dr}\begin{pmatrix} W \\ T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{r} & \dfrac{1}{\mu} \\ \dfrac{\mu(l-1)(l+2)}{r^2}-\rho\omega^2 & -\dfrac{3}{r} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} W \\ T \end{pmatrix}. \tag{8.33}$$

(我们已从因变量中和 ω 中将脚标 l 和 n 去掉。注意 m 不出现在矩阵方程中。)

因此，无自转的球对称的地球的振动，可分成两类振型。一类是球型振型，其水平波函数为 $\boldsymbol{R}_l^m$ 和 $\boldsymbol{S}_l^m$，其径向波函数由(8.32)确定。另一类是环型振型或扭动振型，其水平波函数为 $\boldsymbol{T}_l^m$，其径向波函数由(8.33)确定。对比(8.32)和(7.28)中的矩阵，可清楚地看到，球型振型包含 Rayleigh 波。对比(8.33)和(7.24)，我们看到，环型振型包含 Love 波。该对比要求，面波的水平波数 k 等同于自由振荡的 $[l(l+1)]^{1/2}/r$。在下一节中我们将给出面波和自由振荡更详细的比较。

为求简正振型，我们必须在下列边界条件下解出 (8.32) 和 (8.33)的本征值-本征向量问题，此边界条件为，解在 $r=0$ 处是规则的，在地球的表面处牵引力为零。数值方法和在第七章中描述过的 Rayleigh-Ritz 方法均可采用来解这些问题。处理 $r=0$ 处的条件，其中一种方法 (Takeuchi and Saito, 1972)是假定地球在 $r<r_1$ 时是均匀的并以 r 的幂级数求解微分方程。然后，在 $r=r_1$ 处计算幂级数，并从这些值开始向上求其数值积分。对每一整数 l 则有本征值 ${}_n\omega_l$ ($n=1, 2, \cdots$)，对每一 ${}_n\omega_l$ 则有一运动应力向量的本征函数。此外，我们注意到一种简并，即当 m 处于区间 $-l\leqslant m\leqslant l$ 时，其本征频率和径向本征函数与 m 无关。

简正振型的归一化公式(8.26)和水平波函数的归一化公式一

起将导出径向函数如下的归一化形式：

$$\int_0^{r_\oplus}\rho(r)\{[{}_nU_l(r)]^2+[{}_nV_l(r)]^2\}r^2dr=1 \tag{8.34}$$

和

$$\int_0^{r_\oplus}\rho(r)[{}_nW_l(r)]^2r^2dr=1, \tag{8.35}$$

其中 $r_\oplus$ 是地球的半径。

这样，关于简正振型的解已完全确定。计算点源响应的下一步骤是求应变张量以计算源点处简正振型的位移，前曾在(8.29)中要求过这一点。对球坐标$(r,\ \Delta,\ \phi)$，令 $h^r=1$，$h^\Delta=r$，$h^\phi=r\sin\Delta$，我们从(2.45)得到应变分量：

$$\begin{aligned}
e_{rr}&=\frac{\partial u_r}{\partial r},\\
e_{\Delta\Delta}&=\frac{1}{r}\frac{\partial u_\Delta}{\partial\Delta}+\frac{u_r}{r},\\
e_{\phi\phi}&=\frac{1}{r\sin\Delta}\frac{\partial u_\phi}{\partial\phi}+\frac{u_\Delta}{r}\cot\Delta+\frac{u_r}{r},\\
e_{\Delta\phi}&=e_{\phi\Delta}=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{r}\left(\frac{\partial u_\phi}{\partial\Delta}-u_\phi\cos\Delta\right)+\frac{1}{r\sin\Delta}\frac{\partial u_\Delta}{\partial\phi}\right],\\
e_{\phi r}&=e_{r\phi}=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{r\sin\Delta}\frac{\partial u_r}{\partial\phi}+\frac{\partial u_\phi}{\partial r}-\frac{u_\phi}{r}\right],\\
e_{r\Delta}&=e_{\Delta r}=\frac{1}{2}\left[\frac{\partial u_\Delta}{\partial r}-\frac{u_\Delta}{r}+\frac{1}{r}\frac{\partial u_r}{\partial\Delta}\right],
\end{aligned} \tag{8.36}$$

其中 u_r，u_Δ 和 u_ϕ 为(8.30)给出的 r，Δ，ϕ 的位移分量。

根据 Gilbert 和 Dziewonski (1975) 的工作，我们令源点位于极点$(\Delta=0)$并计算简正振型的应变分量为 $\lim\limits_{\Delta\to 0}e(\Delta)$。于是我们得到，$|m|>2$ 时所有的分量为零。一球型振型的应变分量如表 8.1 所列。对环型振型其对应的结果如表 8.2 所列。出现在这些表中的常数 b_0 为$[(2l+1)/4\pi]^{1/2}$。在源的水平，$r=r_s$ 处计算应变分量并把它们代入(8.29)，则得到地球对点源的响应，此点

源具有任一矩张量，它是时间的阶梯函数。对一般的时间关系，我们可用 $M_{pq}(t)=\int_{-\infty}^{\infty}\dot{M}_{pq}(\tau)H(t-\tau)d\tau$。这被积函数可解释为在 $t=\tau$ 时起作用的阶梯函数源，从(8.29)我们得到

$$u(X,\ t)=\sum_{i}\left[{}_{i}e_{pq}^{*}(X_{s})\dot{M}_{pq}(t)\right]*{}_{i}u(x)\times\left(\frac{1-\exp(-\omega_{i}t/2Q_{i})\cos\omega_{i}t}{\omega_{i}^{2}}\right). \tag{8.37}$$

表 8.1　球型振型的应变分量

	$m=0$	$m=\pm 1$	$m=\pm 2$
e_{rr}	$b_0\frac{dU}{dr}$	0	0
$e_{\Delta\Delta}$	$\frac{b_0}{r}\left[U-\frac{1}{2}\sqrt{l(l+1)}V\right]$	0	$\frac{b_0\sqrt{(l+2)(l-1)}}{4}\frac{V}{r}$
$e_{\phi\phi}$	$e_{\Delta\Delta}$	0	$-e_{\Delta\Delta}$
$2e_{r\Delta}$	0	$\frac{-b_0}{2}\left[\frac{\sqrt{l(l+1)}}{r}U+\frac{dV}{dr}-\frac{V}{r}\right]$	0
$2e_{r\phi}$	0	$2ime_{r\Delta}$	0
$2e_{\Delta\phi}$	0	0	$ime_{\Delta\Delta}$

表 8.2　环型振型的应变分量

	$m=0$	$m=\pm 1$	$m=\pm 2$
e_{rr}	0	0	0
$e_{\Delta\Delta}$	0	0	$\frac{imb_0}{8}\sqrt{(l+1)(l-1)}\frac{W}{r}$
$e_{\phi\phi}$	0	0	$-e_{\Delta\Delta}$
$2e_{r\Delta}$	0	$\frac{imb_0}{2}\left[\frac{dW}{dr}-\frac{W}{r}\right]$	0
$2e_{r\phi}$	0	$\frac{b_0}{2}\left[\frac{dW}{dr}-\frac{W}{r}\right]$	0
$2e_{\Delta\phi}$	0	0	$\frac{-b_0\sqrt{(l+2)(l-1)}}{2}\frac{W}{r}$

这里在 $\dot{M}_{pq}$ 后边的星号代表褶积，我们写出（8.37），为的是表明点源很自然地可用其矩变化率张量 $\dot{M}(t)$来表征。

本节中，我们采用了 Gilbert(1971)及 Gilbert 和 Dziewonski (1975)在推导自由振荡激发公式中所用的简单而直接的步骤。以前，斋藤（1967）曾解决过同样的问题，他用的是类似于第七章中我们描述过的面波激发的方法，他还得到了等价于（8.29）的公式。斋藤的结果被 Mendiguren (1973) 用于设计频谱峰高分辨率的迭加技术中，如第十一章中所叙述的。图 8.4 给出对一个大

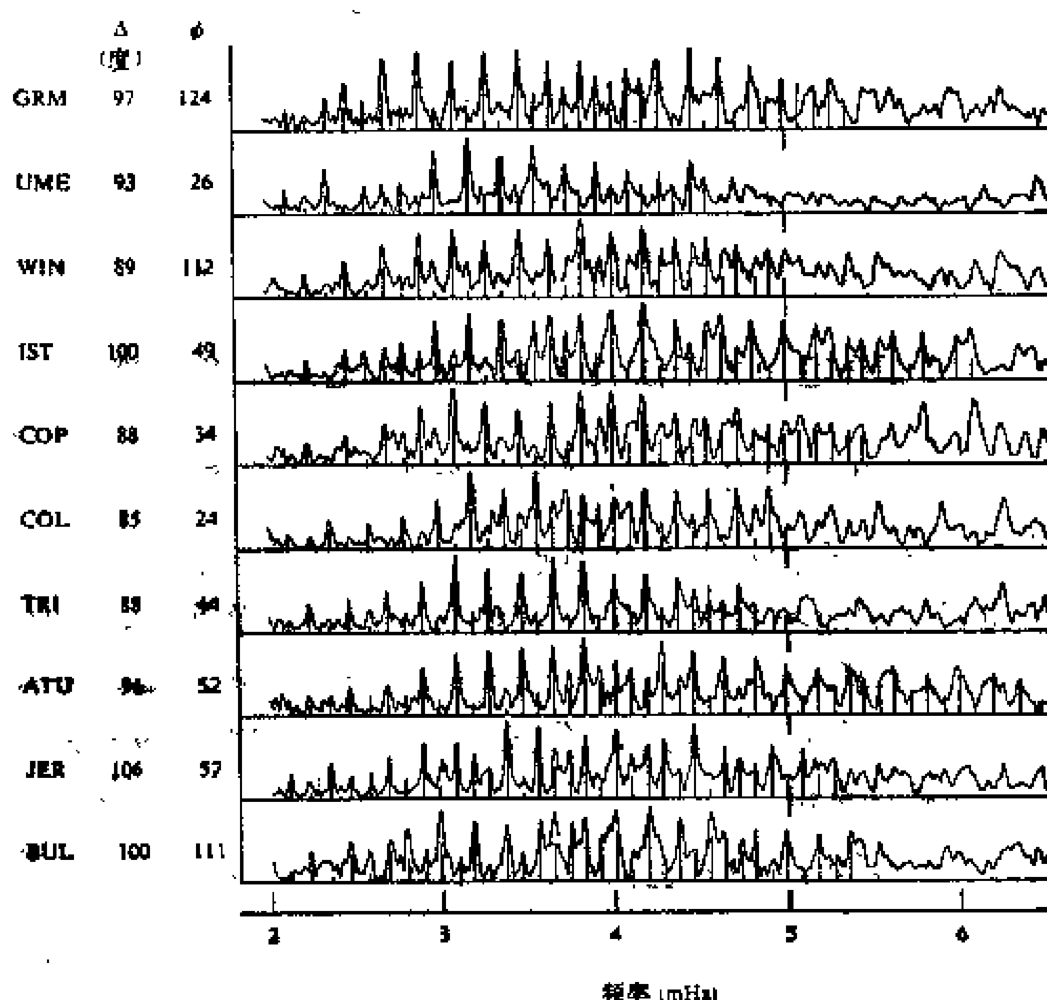


图 8.4

连续曲线表示观测的径向位移谱。竖直线为对基频球型振型的理论谱线。Δ 为震中距，ϕ 为从北开始顺时针的震中方位角（引自 Mendiguren，1973）

的哥伦比亚深震，在几个世界标准台网的台站上观测到的频谱峰和计算的频谱峰之间的对比。连续曲线表示观测的径向位移谱，竖直线表示由 Mendiguren (1973)用斋藤公式并根据观测P波初动图象测定的震源机制而算出的理论的自由振荡幅度。

8.3 球形地球上的面波

在前节中，我们发现，倘若面波的波数k换以自由振荡的$[l(l+1)]^{1/2}/r$，并当r趋于无穷时，自由振荡的系数矩阵(8.32)和(8.33)与面波的相近。这里对大多数实用场合，$[l(l+1)]^{1/2} - l+\frac{1}{2}$，我们可将面波的$k$看成$\left(l+\frac{1}{2}\right)/r$。(事实上，如在补充9.3中所表明的，仿照方程(9)，$k\longleftrightarrow\left(l+\frac{1}{2}\right)/r$ 比 $k\longleftrightarrow[l(l+1)]^{1/2}/r$ 更合适。)由于波长λ为$2\pi/k$，这意味着λ等于$2\pi r/\left(l+\frac{1}{2}\right)$，所以，圆周长并非严格地为波长的整数倍，多余了半波长。换言之，自由振荡相邻节点间的距离不可能处处等于半波长。为更仔细地考察这一点，我们将考虑一简单情况，即由于$M_{rr}=M_{\Delta\Delta}=M_{\phi\phi}=M_0$，而$M_{\Delta\phi}=M_{\phi r}=M_{r\Delta}=0$的爆炸点源产生球型振型的情况。将表 8.1 代入(8.29)，我们得到位移的r分量是球型振型的和

$$u_r(X,\ t)=\sum_n\sum_l {}_nA_l P_l(\cos\Delta)[1-\exp\times(-{}_n\omega_l t/2\,{}_nQ_l)\cos{}_n\omega_l t], \tag{8.38}$$

其中

$${}_nA_l=\frac{2l+1}{4\pi({}_n\omega_l)^2}\left[\frac{d}{dr}{}_nU_l+\frac{2\,{}_nU_l}{r}-\frac{(l(l+1))^{1/2}}{r}{}_nV_l\right]\Bigg|_{r=r_s}\times{}_nU_l(r), \tag{8.39}$$

同时，我们假定了 $M_0(t)$ 为具有幅度为 1 达因·厘米的阶跃。在(8.38)中，我们利用 $X=(r, \Delta, \varphi)$，并将对所有振型 i 的求和写成了对基频的与谐频的 n 以及对阶数 l 的求和。仅当 $m=0$ 才是有意义的。因此，(8.38)表示驻波图象的叠加，称为带谐函数，它是由 $P_l(\cos\Delta)$ 测定的。由于 $P_l(\cos\Delta)$ 在 $0<\Delta<\pi$ 内有正好 l 个节点，所以围绕大圆有 l 周的振荡。另一方面，除近于 $\Delta=0$ 或 $\Delta=\pi$ 以外，对较大的 l，$P_l(\cos\Delta)$ 的渐近展开式是有效的，它是(见补充 8.3 和 9.3)

$$P_l(\cos\Delta)\sim\left(\frac{2}{l\pi\sin\Delta}\right)^{1/2}\cos\left[\left(l+\frac{1}{2}\right)\Delta-\pi/4\right]. \quad (8.40)$$

这又一次表明，除了在 $\Delta=0$ 或 $\Delta=\pi$ 附近以外，波长近似为 $2\pi r/\left(l+\frac{1}{2}\right)$。取该波的 l 周，我们得到了 $2\pi rl/\left(l+\frac{1}{2}\right)$ 而不是 $2\pi r$。这就是说，在 $\Delta=0$ 或 π 附近，相邻节点间的距离比任何别处都大，因此，视相速度在这些特殊区域内是较快的。

在测定面波相速度时，上述效应会造成，每通过极点一次，就有等于 $\pi/2$ 的视相位超前。如果这路径包含有震中或它的对蹠点时必须考虑这一点。[对进入极点及从极点出来，(8.40)中 $\pi/4$ 的相移被加倍。] 这就是现代地震学中被 Brune 等 (1961) 引进的所谓极相移，对在小弧上大弧上以及整个大圆上测定相速度，明显地存在着矛盾的结果，这一点也被 Brune 解决了。

补充 8.2

Poisson 求和公式的一例

给定一函数 $g=g(\nu)$，我们将首先证明

$$\sum_{l=-\infty}^{\infty} g\left(l+\frac{1}{2}\right)=\sum_{s=-\infty}^{\infty}(-1)^s\int_{-\infty}^{\infty} g(\nu)e^{i2\pi s\nu}d\nu. \quad (1)$$

然后，将(1)应用于函数 $f(\nu)$ 中，这里当 $\nu\geqslant 0$ 时，$f=g$；$\nu<0$ 时，$f=0$，由此得到

$$\sum_{l=-\infty}^{\infty} g\left(l+\frac{1}{2}\right)=\sum_{S=-\infty}^{\infty}(-1)^{S}\int_{-\infty}^{\infty} g(\nu)e^{2i\pi S\nu}d\nu. \qquad (2)$$

为证明(1)，用 $S(x)=\sum_{l=-\infty}^{\infty} g\left(l+\frac{1}{2}+x\right)$来定义 $S=S(x)$。因此S是周期性的，其周期为1。$S(x)$的 Fourier 级数的展开式可写成

$$S(x)=\sum_{S=-\infty}^{\infty} S_s e^{-2i\pi Sx}, \quad \text{其中 } S_s=\int_0^1 S(y)e^{2i\pi Sy}dy.$$

取 $x=0$ 并代换 S_s 和 $S(y)$，我们得到

$$S(0)=\sum_{S=-\infty}^{\infty}\int_0^1 \sum_{l=-\infty}^{\infty} g\left(l+\frac{1}{2}+y\right)e^{2i\pi Sy}dy,$$

同时注意 $S(0)$等于(1)式中的左半部。而且

$$e^{2i\pi Sy}=(-1)^{S}e^{2i\pi S(l+\frac{1}{2}+y)},$$

因为s，l 和 sl 是整数。因此

$$\sum_{l=-\infty}^{\infty} g\left(l+\frac{1}{2}\right)=\sum_{S=-\infty}^{\infty}(-1)^{S}\int_0^1\sum_{l=-\infty}^{\infty} g\left(l+\frac{1}{2}+y\right)e^{2i\pi S(l+\frac{1}{2}+y)}dy$$

$$=\sum_{S=-\infty}^{\infty}(-1)^{S}\sum_{l=-\infty}^{\infty}\int_{l+\frac{1}{2}}^{l+\frac{3}{2}} g(\nu)e^{2i\pi S\nu}d\nu,$$

此式等于(1)式的右半部。

为更定量地对比自由振荡和面波，对(8.38)中的每一谐频，我们将利用 Poisson 求和公式。从补充 8.2 中的方程 (2) 我们得到

$$u_r(X,\ t)=\sum_n \int_0^{\infty} d\nu \sum_{S=-\infty}^{\infty}(-1)^{S}({}_nA_{\nu-1/2})P_{\nu-1/2}$$

$$\times(\cos\Delta)C(\nu,\ t)e^{2i\pi s\nu}, \qquad (8.41)$$

其中

$$C(\nu,\ t)=H(t)[1-\cos({}_n\omega_{\nu-1/2}t)\cdot\exp(-{}_n\alpha_{\nu-1/2}t)], \qquad (8.42)$$

通过 $\alpha=\omega/2Q$，使 α 和时间的 Q 相关。

根据 Gilbert (1976)，我们利用第二类 Legendre 函数，将

(8.41)中对 s 的求和改写成以 $Q_l(\cos\Delta)$表示(见补充 8.3)，则

$$u_r(X,\ t)=\sum_n\int_0^\infty d\nu_n A_{\nu-1/2}\sum_{N=1}^\infty R_N(\nu,\Delta)C(\nu,t),\quad(8.43)$$

其中N为奇数时

$$R_N=(-1)^{(N-1)/2}\Big\{P_{\nu-1/2}(\cos\Delta)\cos[(N-1)\pi\nu]$$

$$+\frac{2}{\pi}Q_{\nu-1/2}(\cos\Delta)\sin[(N-1)\pi\nu]\Big\},\qquad(8.44)$$

N为偶数时

$$R_N=(-1)^{N/2}\Big\{P_{\nu-1/2}(\cos\Delta)\cos(N\pi\nu)$$

$$-\Big\{\frac{2}{\pi}Q_{\nu-1/2}(\cos\Delta)\sin(N\pi\nu)\qquad(8.45)$$

从下式可得(8.41)和(8.43)的等价性

$$R_1+R_2+R_3+R_4+\cdots$$

$$=P_{\nu-\frac{1}{2}}(1-\cos 2\pi\nu-\cos 2\pi\nu+\cos 4\pi\nu+\cos 4\pi\nu$$

$$-\cos 6\pi\nu-\cdots)+\frac{2}{\pi}Q_{\nu-\frac{1}{2}}(0+\sin 2\pi\nu-\sin 2\pi\nu$$

$$-\sin 4\pi\nu+\sin 4\pi\nu+\sin 6\pi\nu-\cdots)$$

$$=\sum_{s=-\infty}^{\infty}(-1)^s P_{\nu-\frac{1}{2}}e^{2i\pi\nu s}.$$

补充 8.3

不同的 Legendre 函数及其渐近式

在补充 8.1 中我们研究了 Legendre 多项式 $P_l(\cos\Delta)$。虽然，仅在接近 $\Delta=0$ 和 $\Delta=180°$处有物理上容许的解，但研究 Legendre 方程不同的解，往往是很值得的，因为，在远离 $\Delta=0$ 和 $\Delta=180°$ 时，这些解可能局部地适宜于表示地震运动。

引用 Nussenzveig(1965)的结果，当 $0<\varepsilon\leqslant\Delta\leqslant\pi-\varepsilon$，$|\nu|\gg1$，

且$|\nu|\varepsilon \gg 1$时，有

$$P_{\nu-\frac{1}{2}}(\cos\Delta)=\left(\frac{2}{\pi\nu\sin\Delta}\right)^{1/2}\left[\cos\left(\nu\Delta-\frac{\pi}{4}\right)\right.$$

$$\left.+\frac{\cot\Delta}{8\nu}\sin\left(\nu\Delta-\frac{\pi}{4}\right)+O\left(\frac{1}{\nu^2}\right)\right]. \tag{1}$$

这个解的特性类似于$\left(\sin\Delta\right)^{\frac{1}{2}}\cos\left(\nu\Delta-\frac{1}{4}\pi\right)$,这指出一个线性无关的解可能存在，它的渐近特性很像$(\sin\Delta)^{-\frac{1}{2}}\sin\left(\nu\Delta-\frac{\pi}{4}\right)$。因此，这些解相加及相减都可得到行波。事实上，存在 Legendre 解$Q^{(i)}(i=1, 2)$，它具有如下特性：

$$Q^{(1)(2)}_{\nu-\frac{1}{2}}(\cos\Delta)=\frac{e^{\mp i(\nu\Delta-\pi/4)}}{(2\pi\nu\sin\Delta)^{1/2}}\left[1\pm i\frac{\cot\Delta}{8\nu}+O\left(\frac{1}{\nu^2}\right)\right]. \tag{2}$$

对$0<\varepsilon\leqslant\Delta\leqslant\pi-\varepsilon$，$|\nu|\gg 1$，$|\nu|\varepsilon\gg 1$，同时$\left(\nu-\frac{1}{2}\right)$不在负整数附近时，其$Q^{(i)}_{\nu-\frac{1}{2}}$有极点。在如下和式中这些极点消失：

$$P_l=Q_l^{(1)}+Q_l^{(2)}.$$

$Q_l^{(i)}$的正式定义为

$$Q_l^{(1)(2)}=\frac{1}{2}\left(P_l\pm\frac{2i}{\pi}Q_l\right), \tag{3}$$

其中Q_l是第二类 Legendre 函数，而$Q_l^{(i)}$的主要特性是根据(2)得到的那些特性。

Legendre 方程的另外两个解，由(8.44)和(8.45)的组合给出。利用$Q^{(1)}$和$Q^{(2)}$写出这些解，对奇数N，得到

$$R_N=(-1)^{(N-1)/2}[Q^{(1)}_{\nu-1/2}(\cos\Delta)e^{-i(N-1)\pi\nu}$$

$$+Q^{(2)}_{\nu-1/2}(\cos\Delta)e^{i(N-1)\pi\nu}]$$

$$\sim(-1)^{(N-1)/2}\left(\frac{2}{\pi\nu\sin\Delta}\right)^{1/2}\cos\left\{\nu[(N-1)\pi+\Delta]-\frac{\pi}{4}\right\}, \tag{4}$$

对偶数N，

$$R_N=(-1)^{N/2}[Q^{(2)}_{\nu-1/2}(\cos\Delta)e^{-iN\pi\nu}+Q^{(1)}_{\nu-1/2}(\cos\Delta)e^{iN\pi\nu}]$$

$$\sim(-1)^{N/2}\left(\frac{2}{\pi\nu\sin\Delta}\right)^{1/2}\cos\left\{\nu[N\pi-\Delta]+\frac{\pi}{4}\right\}. \tag{5}$$

从(4)和(5)显见，每一个 R_N 是一个驻波图象。对 $P_{\nu-\frac{1}{2}}$，一个一致的渐近近似式，它甚至在 $\Delta=0$ 附近也可用，是

$$P_{\nu-\frac{1}{2}}(\cos\Delta)=\left(\frac{\Delta}{\sin\Delta}\right)^{1/2}\left[J_0(\nu\Delta)+\frac{1}{8}(\Delta\cot\Delta-1)\times\frac{J_1(\nu\Delta)}{\nu\Delta}+O\left(\frac{1}{\nu^2}\right)\right].$$

在某些表达式中除其它波以外也包括体波和面波，识别体波和面波的工作，主要是一种熟练使用六种 Legendre 函数 P，Q,$Q^{(1)}$,$Q^{(2)}$，R_N(N 为偶数)，R_N(N 为奇数)的练习。这个问题在第九章中将重新提起，在那里我们将选用 Waston 变换法而不用 Poisson 求和法。

所以引进 R_N,因为它们是绕地球的第 N 个轨道的波的合适的水平波函数。轨道的编号如图 8.5 所示。然而，请注意，如(8.44)—(8.45)中所定义的每一个 R_N 仍然是驻波，而不是行波。这在补充 8.3 中已被证明了，这里，我们的问题在于，为了和面波进行对比，对每一个 N，我们预期应有水平的相位函数，并且在正波数的情况下它们是驻波。这是因为在第六章和第七章，对平地球模型，我们通常可得到如下的解：

$$u(X\cdot\omega)=\int_0^\infty f(k,\omega)J_0(kX)dk. \tag{8.46}$$

这里我们引进X作为水平距离(范围)；k 是水平波数，J_0是零阶 Bessel 函数。(8.46)的被积函数是一驻波，为得到行波表达式，我们用 $f(-k,\ \omega)=-f(k,\ \omega)$和

$$u(X,\ \omega)=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}f(k,\ \omega)H_0^{(1)}(kX)dk \tag{8.47}$$

(例如见(6.15))。有趣的是对平地球模型行波函数 $H_0^{(1)}$和 $H_0^{(2)}$，在负的实波数轴上($k<0$)有分支切割；同时对球形地球，类似的波函数 $Q_{\nu-\frac{1}{2}}^{(2)}$和 $Q_{\nu-\frac{1}{2}}^{(1)}$，在负的实波数轴上($\nu<0$)有一些极点。在第九章中，我们将得到几个一串极点的进一步的例子，在很多情况下，其特性很像分支切割。

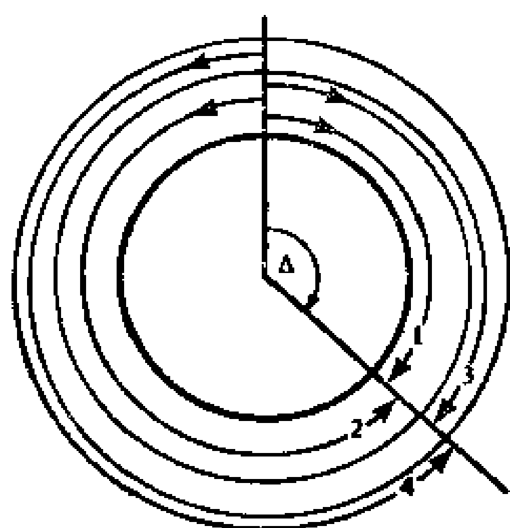


图 8.5

绕地球传播的波之轨道编号。$N=1$ 为小弧，$N=2$ 是大弧；$N\geqslant 3$ 至少包括一个大圆路径

按(8.43)，仅研究第一个到达的波，$N=1$，我们写成 $l+\frac{1}{2}=\nu=kr$，其中 $r=|x|$ 是接收点的径向位置（通常 $r=r_{\oplus}$ 为地球的半径）。于是

$$u_r(x,\ t)=\left(\frac{\Delta}{\sin\Delta}\right)^{1/2}\sum_n\int_0^{\infty}r\,dk\,{}_nA(k)J_0(kX)C(kr,t),\tag{8.48}$$

这里我们使用了

$$R_1(\nu,\ \Delta)=P_{\nu-\frac{1}{2}}(\cos\Delta)\sim\left(\frac{\Delta}{\sin\Delta}\right)^{1/2}J_0(kX).\tag{8.49}$$

X 是水平距离 $r\Delta$，所以 $\nu\Delta=kX$；${}_nA(k)={}_nA_{\nu-\frac{1}{2}}$。

忽略 $C(kr,\ t)$中的静态位移项，我们注意到将(8.48)中的C代入下式：

$$\frac{1}{2}\left[\frac{1}{i[\omega+{}_n\omega(k)]-{}_n\alpha(k)}+\frac{1}{i[\omega-{}_n\omega(k)]-{}_n\omega(k)}\right]$$

而给出 Fourier 变换 $u_r(x,\ \omega)$。(8.48)中 $J_0(kX)$的系数是奇数 k，因此

$$u_r(x,\omega)=\frac{1}{4}\left(\frac{\Delta}{\sin\Delta}\right)^{1/2}\sum_n\int_{-\infty}^{\infty}r\,dk\,{}_nA(k)H_0^{(1)}(kX)$$

$$\times \frac{1}{i[\omega - {}_n\omega(k)] - {}_n\alpha(k)}. \tag{8.50}$$

包含 $\omega + {}_n\omega(k)$ 的另一项已消掉，因为它在复 k 平面的下半部产生一个极点，而我们的目的是在上半平面中完成一个闭合路径。为求出上述被积函数中极点的位置以及计算其留数，我们可以在值 $k_n(\omega)$附近得到 ${}_n\omega(k)$随 k 变化的 Taylor 级数，$k_n(\omega)$是第 n 阶面波振型的本征值。因此

$${}_n\omega(k) = \omega + (k - k_n)U_n(\omega) + \cdots$$

其中 $U_n(\omega) = d\omega/dk$ = 群速度。群速度几乎总是正的，所以 (8.50) 的极点位于复 k 平面的第一象限中，并在 $k = k_n(\omega) + i\alpha_n/U_n(\omega)$ 上。这里 α_n 是基于时间的 Q，所以，如果我们改变成基于空间的 Q 来描述衰减，则必须以 $\omega/2\,Q_n^{空} c_n = k_n/2\,Q_n^{空}$ 代替 $\alpha_n/U_n = \omega/2\,Q_n^{时} U_n$[见(7.92)]。用图 8.6 中表示的积分路径，并用对 $H_0^{(1)}$ 的远场近似，我们可从第一象限中的诸极点计算其留数(对每一个 n 有一个极点；$n = 0, 1, 2, \cdots$)。

$$u_r(x, \omega) = i\frac{\pi}{2}\left(\frac{\Delta}{\sin\Delta}\right)^{1/2} \sum_n \frac{rA(k_n)}{U_n}\left(\frac{2}{\pi k_n X}\right)^{1/2}$$

$$\times \exp\left[i\left(k_n X + \frac{\pi}{4}\right)\right] \exp(-k_n X/2\,Q_n). \tag{8.51}$$

对在 $k = k_n(\omega)$处求得的 ${}_nA(k)$，这里我们写成 $A(k_n)$，并且我们曾假定除对相位函数 e^{ikX} 以外，(8.50)中的诸因子在每一极点附近都是 k 的缓慢变化函数。方程(8.51)给出了面波的表达式，此面波是在球状地球上，具有单位阶梯函数的爆炸源所产生的。

对平面成层介质中的 Rayleigh 波，为比较 (8.51) 和相应的公式 (7.151)，我们必须考虑到径向本征函数和垂直向本征函数归一化中的差别。事实上，$r_n U_1(r)$ 相应于 $r_2(z)/\sqrt{2I_1}$；$rd({}_nU_1(r))/dr$ 相应于 $-(dr_2(z)/dz))/\sqrt{2I_1}$；以及 $r_n U_1(r)$相应于 $r_1(z)/\sqrt{2I_1}$。因此，(8.51) 中的 $rA(k_n)$ 的一级近似以下式代替

$$-\frac{k_n}{2\pi\omega^2}\left[\frac{dr_2}{dz}+k_n r_1\right]\bigg|_{\text{源的水平}}\frac{r_2(z)}{2I_1}.$$

注意到(8.51)是对向上的运动，而(7.151)是对向下的分量，由此可得，两个公式实质上是一样的。仅有的差别是空间的衰减因子和因子$(\Delta/\sin\Delta)^{1/2}$，前者已明确地包含在(8.51)中，后者说明了在球面上的方位性几何扩散和平面上的扩散是不同的。

综上，地球的球形效应可以用比例于$(\sin\Delta)^{-1/2}$的几何扩散因子加以考虑，也可在球形地球模型中对运动应力向量通过解方程(8.32)或(8.33)面得到的本征函数加以考虑。

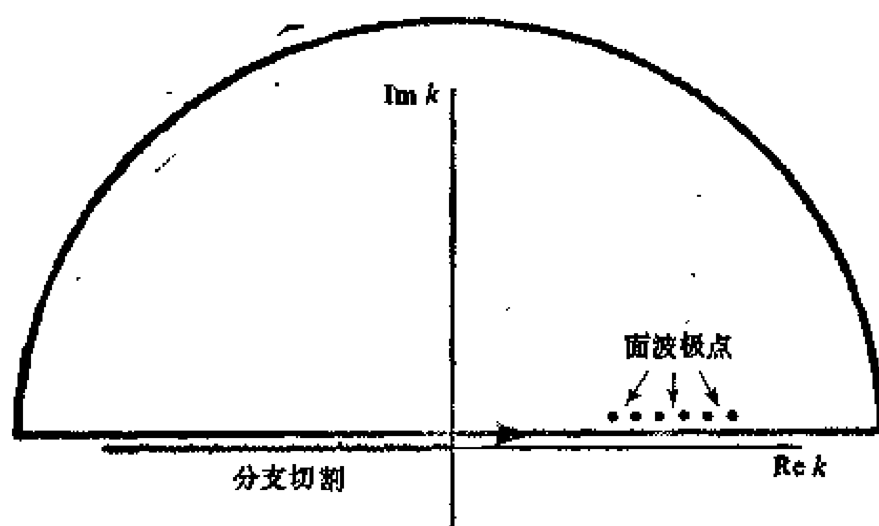


图 8.6

复波数平面的特性，用于计算以方程(8.50)表示的面波

8.4 自重地球的自由振荡

重力不能影响扭动振型的自由振荡，因为这些振型中没有位移的径向分量，且无发散，所以密度分布是不变的。但是密度扰动的确发生在球型的运动中。由于重力是一有效的体力，它随时间的变化将影响整个运动。对周期长于500秒的球型振型，自重是不能忽略不计的，在给出必要的理论之前，先看一看历史背景是有意义的。

按照 Lamb 于 1882 年发表的均匀弹性固体球的自由振荡理论，显而易见，具有最大周期的振型是 ${}_0S_2$。Bromwich(1898) 曾从数值上研究了周期方程，并包括了不可压缩介质情况下自重的影响。他证明对一不可压缩的球，其大小和质量与地球相同，其刚性和钢一样，由于计入了自重，${}_0S_2$ 的周期从 65 分钟左右减至约 55 分钟。Love(1911) 甚至能在可压缩介质中考虑自重。他取 Poisson 比等于 $\frac{1}{4}$ 而其它方面则和 Bromwich 的地球相同，他发现 ${}_0S_2$ 的周期几乎严格地为一小时。显然，如果这个振型可能观测到，则仪器必须在周期大大超过日常记录的地震运动的周期处有较高的灵敏度。

在四十年代和五十年代期间，观测到的地震面波的性质，在很大程度上可用叠置的紧密焊接的均匀平板中的面波理论来理解。对该类介质的理论已进行了广泛研究(Haskell, 1953; Ewing *et al.*, 1957)，特别是对此类弹性介质的频散也进行了计算。显然，设计适于超长周期的仪器是必要的，因观测到了面波频散即可用来推断地幔内较深部的地球结构。加利福尼亚理工学院的 Hogo Benioff 是仪器设计的带头人，他的石英应变地震仪曾记录到 1952 年 11 月 4 日堪察加地震，如图 8.7 所示。根据 Benioff 等人的报告 (1954)，57 分钟的振荡"可能代表地球作为一个整体的自由振荡"。很多人受到此结果的鼓舞去发展适于超长周期的、更好的地震仪，同时也进行理论和数值上的研究以预测真实地球模型的自由振荡。Alterman 等人 (1959) 发表了不同地球模型的 ${}_0S_2$ 周期的理论值，这些模型是 Bullen 和 Bullard 早年提出的。在这些模型中，无论是否包括固体内核，但所得到的周期值总是在 53.5—53.7 分钟左右。当时的仪器已经作了改进，但要从观测上证实，还必须等待一个足够大的地震。1960 年 5 月 22 日在智利发生了当代最大的地震之一 (震级大于 8，这个地震大到使常规的震级标度达到了饱和，见 Kanamori, 1977)。以极

其激奋之情，三个不同的研究小组于 1960 年夏在赫尔辛基举行的IASPEI(国际地震学和地球内部物理学协会)会议上作了报告，他们观测到了整个地球的大范围的简正振型 (Benioff *et al.*, 1961; Ness *et al.*, 1961; Alsop *et al.*, 1961 a)。显然，地震学中开创了一个全新的领域。

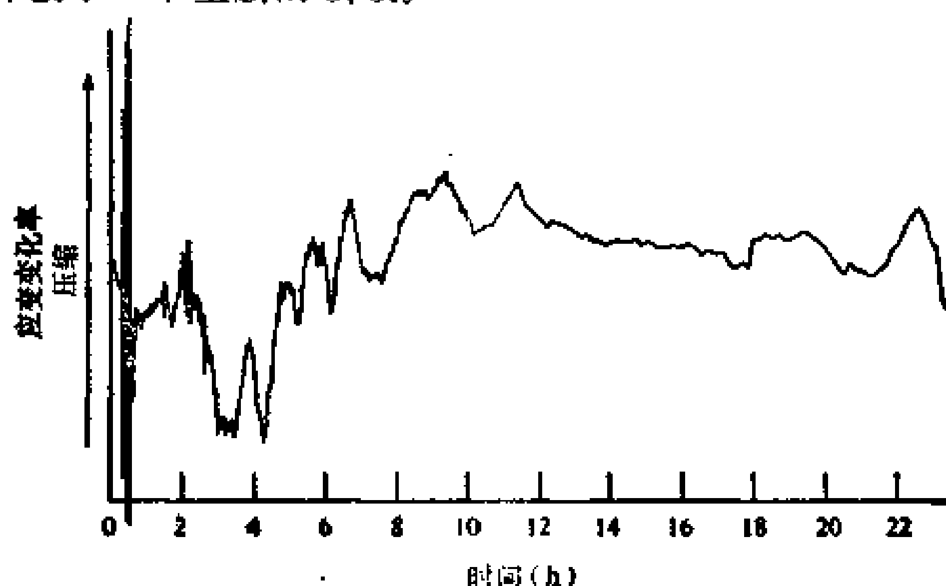


图 8.7

在加利福尼亚的帕萨迪那设置的 Benioff 应变地震仪所记录的 1952 年 11 月 4 日堪察加地震的地震图。在发震后近于 $3\frac{1}{2}$ 小时开始，出现有一个 4 圈的振荡或波列，原来报告的为具有 57 分的周期(引自 Benioff, 1958)

本节中我们给出一种地球模型中球型振型的理论，此模型是球对称的、非自转的、自重的、弹性的，并具有各向同性的应力-应变关系和各向同性的初始应力。

我们在第二章中讨论的弹性运动方程，大部分建立在 Lagrange 公式的基础上，在此公式中，在时间 t_0 的质点 x，假定在时间 t 移动到 $x+u=X$，并且我们将 u 作为函数 $u=u(x,t)$进行研究。很遗憾，Lagrange 公式不容易处理密度的变化以及伴随的浮动重力场的影响，所以这里我们将采用 Euler 的方法：x, X 和 u 如前所定义，但我们是把 u 和 ρ 作为(X,t)的函数来研究这些量的。

补充 8.4

是侥幸事件还是真实地面运动的唯一记录?

虽然图 8.7 给出的地震记录对简正振型的研究是个很大的促进，但六十年代初已很明显，在帕萨迪那记录到该地震的长周期自由振荡相当异常：(i) 报告的 57 分周期比对 $_0S_2$ 流行的估计值($\sim$54分)要长。(ii) 部分记录中，57 分的周期占很大优势，但很难想像，其它自由振荡为什么却如此之弱。(iii) 57 分的周期仅有 4 圈左右，很难知道它们为什么会停止。因此，多年来人们认为是一些仪器的故障产生的这几圈长周期波。然而，金森(Kanamori，1976)却认为(i)周期不是 57 分，而是 54 分左右(仔细地进行 Fourier 分析后)。他还推测(ii)可能是堪察加震源区发生的某些地震之后的慢形变，其时间尺度如此之长以致 $_0S_2$ 可被顺利地激发；(iii) 4圈之后的停止是由于 $_0S_2^m(-2\leq m\leq 2)$ 的不同成分的相消干涉而引起的，因为地球的自转 $_0S_2^m$ 的成分显然是不同的，或者确实是由于仪器故障在约七个小时后开始影响记录。

让我们来考虑一球形地球模型，在自重之下，它处于流体静平衡状态。平衡状态用其密度 $\rho_0(r)$，压力 $p_0(r)$和重力位 $V_0(r)$ 来描述，所有这些量都仅仅是 r 的函数。因为 V_0 是由于密度分布 ρ_0 而引起的，我们可应用 Poisson 方程

$$\nabla^2 V_0 = -4\pi\gamma\rho_0, \tag{8.52}$$

其中 γ 是重力常数($\sim 6.670\times 10^{-8}$ 达因·厘米^2/克^2) 平衡方程是由体力和压力梯度相等而给出的，即

$$-\rho_0 g_0 \hat{r} = \rho\cdot\nabla V_0 = \nabla p_0, \tag{8.53}$$

其中 $g_0 = g_0(r)$为正。它是无扰动时单位体积中的重力量值。

叠加到这个初始状态上，我们考虑一小的位移扰动 $u(X)\times\exp(-i\omega t)$。我们将采用 Euler 法，分别用$\rho(X,t)$和 $V_0 + k(X)\times\exp(-i\omega t)$来描述扰动状态中的密度和重力位。

根据质量守恒，一体积 V 中(空间固定) 质量的增加等于通过包围 V 的表面 S 的质量流入量，所以

$$\int_V \rho dV = \int_V \rho_0 dV - \int_S \rho_0 u \exp(-i\omega t) \cdot n dS, \qquad (8.54)$$

其中 n 是面元 dS 上向外的单位法线。(方程(8.54)是一近似式，穿过 S 的物质密度随时间而改变。对于一级近似，我们取其为 ρ_0 是合适的，因为 u 是很小的。)用 Gauss 定理，变面积分为体积分，我们得到

$$\rho(X,t) = \rho_0 - \nabla \cdot (\rho_0 u \exp(-i\omega t)).$$

由于 ρ_0 仅是 r 的函数，我们可将上述方程改写为

$$\rho = \rho_0 - \left(u r \frac{d\rho_0}{dr} + \rho_0 \nabla \cdot u \right) \exp(i\omega t). \qquad (8.55)$$

扰动状态下的重力位满足 Poisson 方程

$$\nabla^2 (V_0 + K \exp(-i\omega t)) = -4\pi\gamma\rho,$$

此式和 (8.52) 及 (8.55) 可用于导出

$$\nabla^2 K = 4\pi\gamma \left(u_r \frac{d\rho_0}{dr} + \rho_0 \cdot \nabla u \right). \qquad (8.56)$$

为得到运动方程，我们利用笛卡尔坐标 (X_1, X_2, X_3) 并从动量矩变化率、体力（重力）和应力梯度入手：

$$-\rho\omega^2 u_i \exp(-i\omega t) = \rho[V_0 + K \exp(-i\omega t)]_i + \sigma_{ij,j}. \qquad (8.57)$$

[精确而言，这里左半部应包含物质的加速度 $D^2 u \exp(-i\omega t)/Dt^2$。但 u 和质点速度均很小，所以对于一级近似，这加速度是 $-\omega^2 u \exp(-i\omega t)$]在扰动状态下计算了应用 $\sigma_{ij}(X,t)$。由于在时间 t 时 X 处的质点原来是在 $X = X - u \exp(-i\omega t)$ 处，X 处的应力为 $X - u \exp(-i\omega t)$ 处的初始应力加上由于在 X 质点附近区域的畸变而产生的附加效应，亦即和 u 相关的应变所产生的附加效应。对一具有 Lamé 常数 λ 和 μ 的各向同性体，我们得到

$$\sigma_{ij}(X, t) = -P_0 \sigma_{ij} \big|_{X - u\exp(-i\omega t)} + u \text{ 产生的应力}$$

$$= -P_0(r)\delta_{ij} + \left[u_r \frac{dP_0}{dr} \delta_{ij} + \lambda \nabla \cdot u \delta_{ij} + \mu (u_{i,j} + u_{j,i}) \right] \times \exp(-i\omega t). \qquad (8.58)$$

将上述形式代入(8.57)并保留一级项，则得

$$-\rho_0\omega^2\boldsymbol{u}=\left(u_r\frac{d\rho_0}{dr}+\rho_0\nabla\cdot\boldsymbol{u}\right)g_0\hat{\boldsymbol{r}}+\rho_0\nabla K-\nabla(\rho_0u_rg_0)$$
$$+\left[(\lambda+2\mu)\nabla\nabla\cdot\boldsymbol{u}-\mu\nabla\times(\nabla\times\boldsymbol{u})+\frac{d\lambda}{dr}(\nabla\cdot\boldsymbol{u})\hat{\boldsymbol{r}}+2\frac{d\mu}{dr}\frac{\partial\boldsymbol{u}}{\partial r}\right.$$
$$\left.+\frac{d\mu}{dr}\hat{\boldsymbol{r}}\times(\nabla\times\boldsymbol{u})\right]. \qquad (8.59)$$

其中括号 [] 中的项，仅是一个向量，它的第 i 个笛卡尔分量由 $\{\nabla\lambda\cdot\boldsymbol{u}\delta_{ij}+\mu(u_{i,j}+u_{j,i})\}_{,j}$给出，并假定 λ 和 μ 仅和半径 r 有关。(8.59) 右半部余下的项定量地表示自重的效应。当 $\rho_0(r)$，$\lambda(r)$，和 $\mu(r)$为已知时，可能得到 $g_0(r)$，然后在适当的初条件及边界条件下可解出 (8.56) 和 (8.59) 中的K和 $\boldsymbol{u}$。注意到对环型振型，(8.59) 仍是正确的，尽管该方程中的大多数项都为零。

我们以前已发现，若将运动方程转换成 $d\boldsymbol{f}/dr=\boldsymbol{A}\boldsymbol{f}$，$\boldsymbol{f}$ 在通过系数矩阵 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}(r,\ \omega)$ 的间断点仍是连续的，则运动方程就很便于处理。这个结果促进了以下的讨论。

在某半径 r_d 处，当它们的介质性质（即 ρ_0，λ 或 μ）有不连续的突变时，而位移和牵引力分量通过 r_d 又是连续的，则重力位的扰动K通过 r_d 也是连续的。但是，如有一密度跃变，则 dk/dr 是不连续的。因此，我们试图寻找一个和 dk/dr 有关的连续的量。

将 (8.56) 改写成 $\nabla\cdot(\nabla K-4\pi\gamma\rho_0\boldsymbol{u})=0$，对任意具有表面 S 的体积 V，我们应用 Gauss 定理得到 $\int_s(\nabla K-4\pi\gamma\rho_0\boldsymbol{u})\cdot\boldsymbol{n}ds=0$。选取$V$为一薄的圆盘，它的一个平面刚好在内界面 r_d 的上面，而另一个表面刚好在 r_d 的下面，则得到 $dk/dr-4\pi\gamma\rho_0u_r$ 在内界面的任一侧必须相同。因而，我们可选择这连续量 $dk/dr-4\pi\gamma\rho_0u_r$ 作为一个因变量。

对一球型振型，我们已看到，在振型 (l，m，n) 中的位移和牵引力由下式给出：

$$u_r = {}_nU_l(r)Y_l^m(\Delta,\phi), \quad u_\Delta = \frac{{}_nV_l(r)}{[l(l+1)]^{1/2}}\frac{\partial Y_l^m}{\partial\Delta},$$

$$u_\phi = \frac{{}_nV_l(r)}{[l(l+1)]^{1/2}}\frac{1}{\sin\Delta}\frac{\partial Y_l^m}{\partial\phi},$$

$$\tau_{rr} = {}_nR_l(r)Y_l^m, \quad \tau_{r\Delta} = \frac{{}_nS_l(r)}{[l(l+1)]^{1/2}}\frac{\partial Y_l^m}{\partial\Delta},$$

$$\tau_{r\phi} = \frac{{}_nS_l(r)}{[l(l+1)]^{1/2}}\frac{1}{\sin\Delta}\frac{\partial Y_l^m}{\partial\phi}, \tag{8.60}$$

其中（τ_{rr}，$\tau_{r\Delta}$，$\tau_{r\phi}$）是从 u 得到的牵引力。重力位也可分离成

$$K = {}_nK_l(r)Y_l^m(\Delta,\ \phi), \tag{8.61}$$

仿照竹内和斋藤（Takeuchi and Saito，1972），我们引入

$${}_nG_l(r) = \frac{d\,{}_nK_l}{dr} - 4\pi\gamma\rho_0({}_nU_l) + \frac{l+1}{r}{}_nK_l. \tag{8.62}$$

我们已指出，在密度突变点两侧（$dK/dr - 4\pi\gamma\rho_0u_r$）和$K$是连续的，所以${}_nG_l$也是连续的。${}_nG_l$的另一性质是${}_nG_l(r_\oplus)=0$（即在地表面)，这是从在 $r>r_\oplus$ 处K满足 Laplace 方程而得到的一个结果，因此，在地球的外面${}_nK_l(r)={}_nK_l(r_\oplus)(r_\oplus/r)^{l+1}$。

将（8.60)—(8.62）代入（8.56）和（8.59），对径向函数我们得到由六个一次线性微分方程组成的方程组：

$$\frac{dU}{dr} = \frac{1}{\lambda+2\mu}\left\{R - \frac{\lambda}{r}[2U - (l(l+1))^{1/2}V)]\right\},$$

$$\frac{dR}{dr} = -\omega^2\rho_0U + \frac{2}{r}\left(\lambda\frac{dU}{dr} - R\right) + \frac{1}{r}\left[\frac{2(\lambda+\mu)}{r} - \rho_0g_0\right]$$

$$\times[2U - (l(l+1))^{1/2}V] + \frac{(l(l+1))^{1/2}}{r}S$$

$$-\rho_0\left(G - \frac{l+1}{r}K + \frac{2g_0}{r}U\right),$$

$$\frac{dV}{dr} = \frac{1}{\mu}S + \frac{1}{r}[V - (l(l+1))^{1/2}U], \tag{8.63}$$

$$\frac{dS}{dr} = -\omega^2\rho_0V - \frac{\lambda}{r}(l(l+1))^{1/2}\frac{dU}{dr} - \frac{\lambda+2\mu}{r^2}$$

$$\times[2(l(l+1))^{1/2}U-l(l+1)V]+2\frac{\mu}{r^2}[(l(l+1))^{1/2}U$$

$$-V]-\frac{3}{r}S-\frac{\rho_0}{r}(l(l+1))^{1/2}(K-g_0U),$$

$$\frac{dK}{dr}=G+4\pi\gamma\rho_0U-\frac{l+1}{r}K,$$

$$\frac{dG}{dr}=\frac{l-1}{r}(G+4\pi\gamma\rho_0U)+\frac{4\pi\gamma\rho_0}{r}[2U-(l(l+1))^{1/2}V],$$

这里我们去掉了脚标 n 和l。方程(8.63) 可以写成 $d\boldsymbol{f}/dr=\boldsymbol{A}\boldsymbol{f}$，且$\boldsymbol{f}$是连续的，$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}(r, \omega)$。$\boldsymbol{f}$解的存在并且在 $r=0$ 处是正规的，而且 ${}_nR_l(r_\oplus)$，${}_nS_l(r_\oplus)$和 ${}_nG_l(r_\oplus)$为零，这就要求 ω 为一本征值。因为对本征值 ${}_n\omega_l$ 和本征向量$\boldsymbol{f}=({}_nV_l, {}_nU_l, {}_nS_l, {}_nR_l, {}_nK_l, {}_nG_l)^T$，从数值上求解(8.63)的方法和 7.2 节中对面波所提到的方法是十分类似的，我们就不再给出进一步的详细结果。对环型振型，(8.59)给出了耦合系统(8.33)，因为重力没有直接影响。

当然，7.3 节中的变分法，也适用于简正振型，只需改变某些符号。相速度的扰动（由于结构的微小变化）以本征频率的扰动来代替。例如，对一环型振型［见(8.33)和(8.35)］，

$$\left(\frac{\delta\omega}{\omega}\right)_l=\int_0^{r_\oplus}\left[\frac{\rho}{\omega}\left(\frac{\partial\omega}{\partial\rho}\right)_{l,\beta}\frac{\delta\rho}{\rho}+\frac{\beta}{\omega}\left(\frac{\partial\omega}{\partial\beta}\right)_{l,\rho}\frac{\delta\beta}{\beta}\right]dr, \quad (8.64)$$

其中

$$\left(\frac{\rho}{\omega}\frac{\partial\omega}{\partial\rho}\right)_{l,\beta}=\frac{1}{2\omega^2l}\left[-\omega^2\rho r^2W^2+\frac{r^2T^2}{\mu}+(l-1)(l+2)\mu W^2\right]$$

$$\left(\frac{\beta}{\omega}\frac{\partial\omega}{\partial\beta}\right)_{l,\rho}=\frac{1}{\omega^2l}\left[\frac{r^2T^2}{\mu}+(l-1)(l+2)\mu W^2\right]. \quad (8.65)$$

在一横向上各向同性的地球模型中，环型振型和球型振型的偏微分已由竹内和斋藤(Takeuchi and Saito, 1972)给出，Woodhouse(1976)曾说明了内边界的扰动如何影响本征频率。

现在，在一球对称的、非自转的地球模型中，我们给出了关于简正振型理论的一个十分完整的叙述。1960 年在智利地震之后，大约识别出了 40 个不同的本征频率，各研究者最初的企图很简单，只是为正确地辨别这些振荡的振型。由本征频率给出的资料与体波走时资料明显地有不同特性，由于如何建立具有给定走时曲线的地球模型是已知的，但是，如不用尝试法，如何用简正振型的本征频率来推测地球结构则是不清楚的。这个问题的重要意义在于对发展反演地球物理资料的新方法是个促进，作为一个实例，Backus 和 Gilbert（1967，1968，1970）利用简正振型资料已完成了反演理论的工作。

用现代仪器，即使对震级（M_S）为 6.5 那样较低的地震，去观测和识别简正振型都是可能的（Block *et al.*，1970）。为了确定一个给定的地震对哪一种简正振型的激发最为有利，从（8.37）可知，关键的量是在震源处计算的振型中的应变。因此，浅震对激发基频振型（不同 l 的 ${}_0S_l$ 和 ${}_0T_l$）是有利的，而深震对观测谐频振型可能是最好的。利用两个深震的 211 个世界标准台网的台站记录图的谱，Gilbert 和 Dziewonski（1975）能够得出 812 个本征频率，其中大多数是谐频。对很多振型，计算误差低至 0.05%，一般而言小于 0.1%。对具有大于 80 秒周期的约 2000 个振型，现已观测到 1500 个并可从地震图中识别出来。对环型振型，对 n 从 0 到 13，l 从 1 到 80，图 8.8 给出了 ${}_n\omega_l<0.09$ 弧度/秒的各个值。根据关系式 $l+\frac{1}{2}=k r$，我们可求出一给定振型的视速度，在地球表面被测定为 $\omega r_{\oplus}\Big/\left(l+\frac{1}{2}\right)$（公里/秒）。已知地震体波 ScS（从核-幔边界向上反射的 S 波）具有大于某一极小值的视速度，此极小值是由刚好掠过核幔边界的 ScS 波的视速度所确定的。这个 $\omega\Big/\left(l+\frac{1}{2}\right)$ 的极小斜率值，在图 8.8 中用直的虚线表示。这里的想法是，这些简正振型为理解地球中所有可能的地

震运动提供了一个完整的基础。因此，ScS 资料（偏振为 SH）中所包含的关于地球的信息，可以预期它类似于和 ScS 具有同样的水平相速度值的环型振型中包含的信息，即在 ScS 线的左边。右边的振型具有较低的视速度，且相应于地幔中的 SH 波，它不能十分陡峭地传播以达到地核。对球型振型，图 8.9 就更加复杂，因为它等效于包括 Rayleigh 波和 Stoneley 波在内的 P-SV 现象。

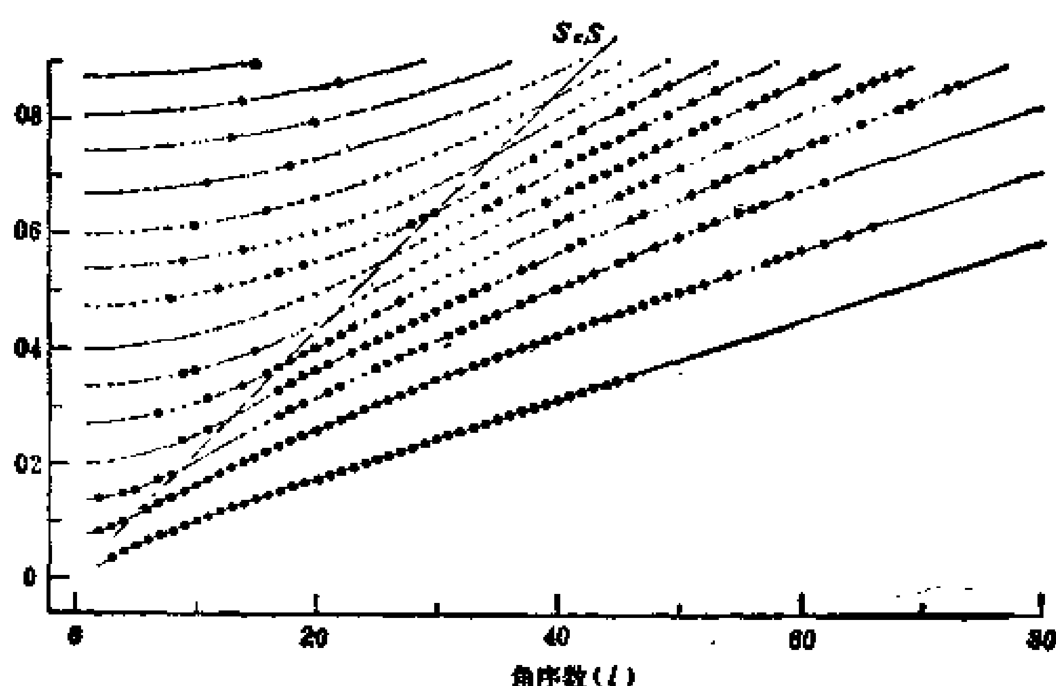


图 8.8

对 $0 \leqslant n \leqslant 13$ 的不同分支的环型振型 $_n\omega_l$。圆点代表观测的振型，Gilbert 和 Dziewonski 反演了这些振型以得到地球结构（引自 Gilbert and Dziewonski, 1975）

对于周期大于80秒的简正振型，有这样多能正确地识别出来，利用一个地震的某些特殊的模型（即其矩变化率张量）来看看合成的理论地震图是否和实际观测的相一致，即在时间域作对比而不是在频率域对比，则按（8.37）将所有振型求和的可能性就提高了。佐藤等（Sato *et al*, 1962）首先将一些简正振型相加计算了地震图。Landisman 等（1970），给出了此领域早期工作的概述，他还

将简正振型求和法（即一个特殊体波的振幅）的不同特征和地震资料中的一些相应的特征作了对比。在时间域中最初的对比工作——由简正振型求和所得的整个波列（包括体波）与观测的地震图对比——是 Luh 和 Dziewonski(1975) 对1970年哥伦比亚的深震所作的。对这个地震，用先前测定的应变化率张量和一特殊的地球模型，这些作者在 100—1000 秒周期范围之间通过叠加一千多个振型计算了75个地震图。他们的结果如图8.10中所示。穿过记录剖面图的各直线表示 Rayleigh 波R_1，R_2等。在这些周期上，即使对如此的深震(深度测定为 651 公里)这类波也是显著的。体波各震相也是显著的，其中通过地幔的P波和S波具有多次相，例如$PSPSPS$，它是在地球表面反射时发生的P和S之间的转换。我们刚才给出的例子标成PS_3，图上还标出了几个PS_n。由理

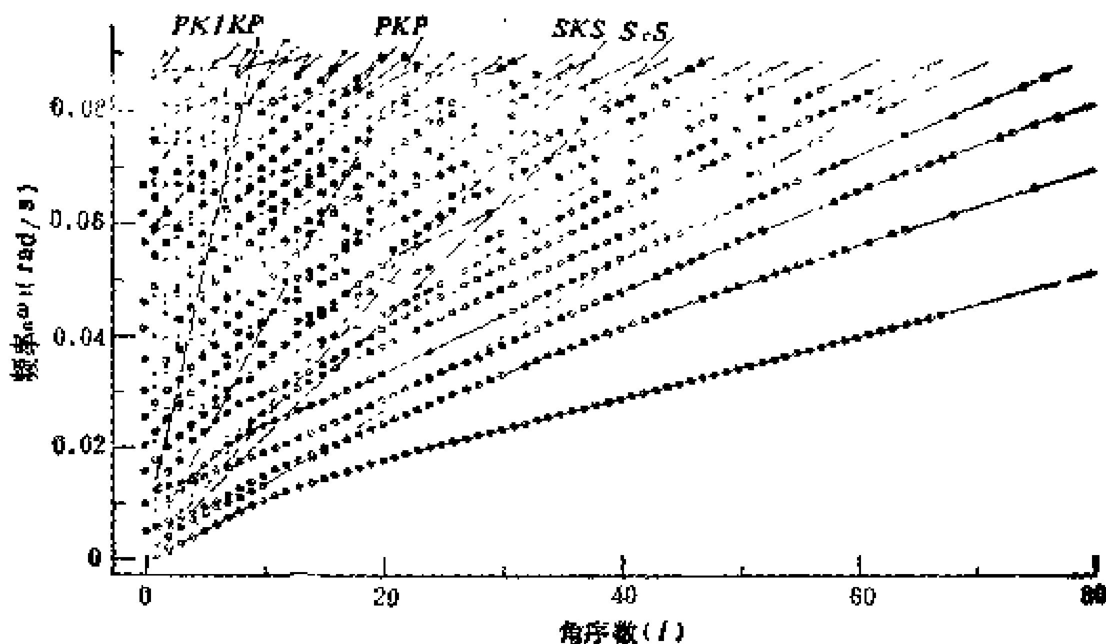
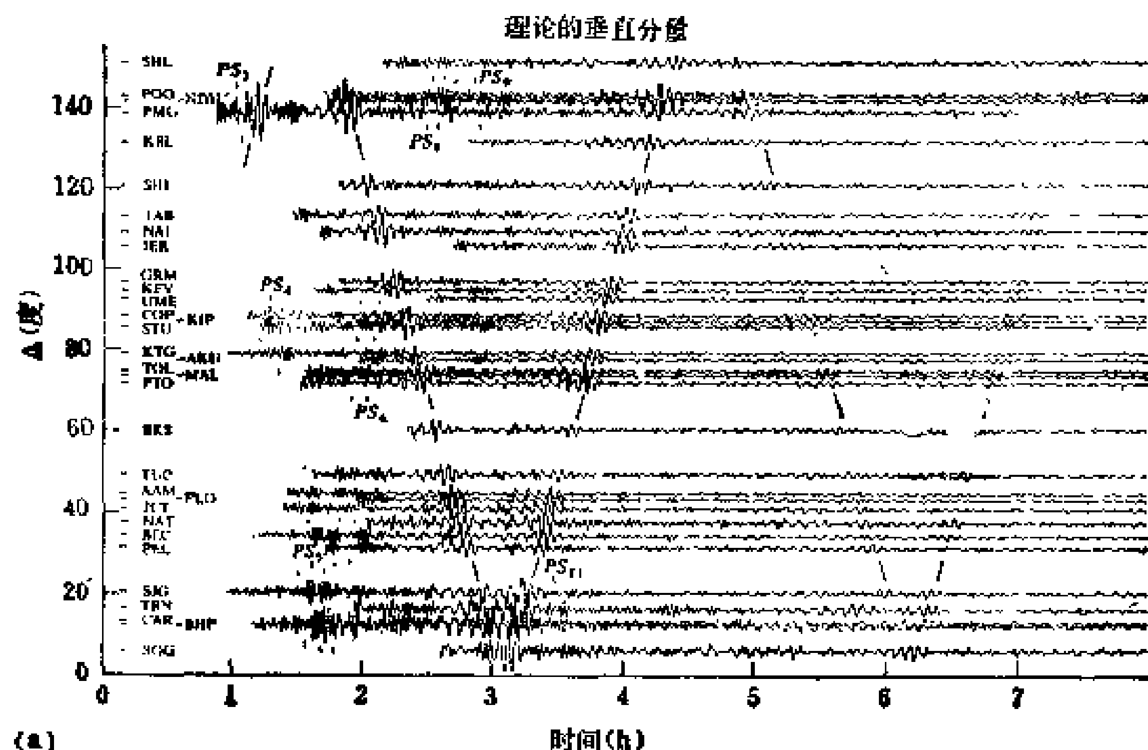


图 8.9

不同分支 n 的球型振型$_n\omega_l$对 l 作图。只有当它们位于相应的相速度线的左边时，这些振型才对应于标出的体波震相。小圆点代表其能量小于压缩波能量的二分之一的振型。大圆点代表观测的振型，Gilbert 和 Dziewonski 反演了这个振型，以求得地球结构(引自 Gilbert and Dziewonski, 1975)



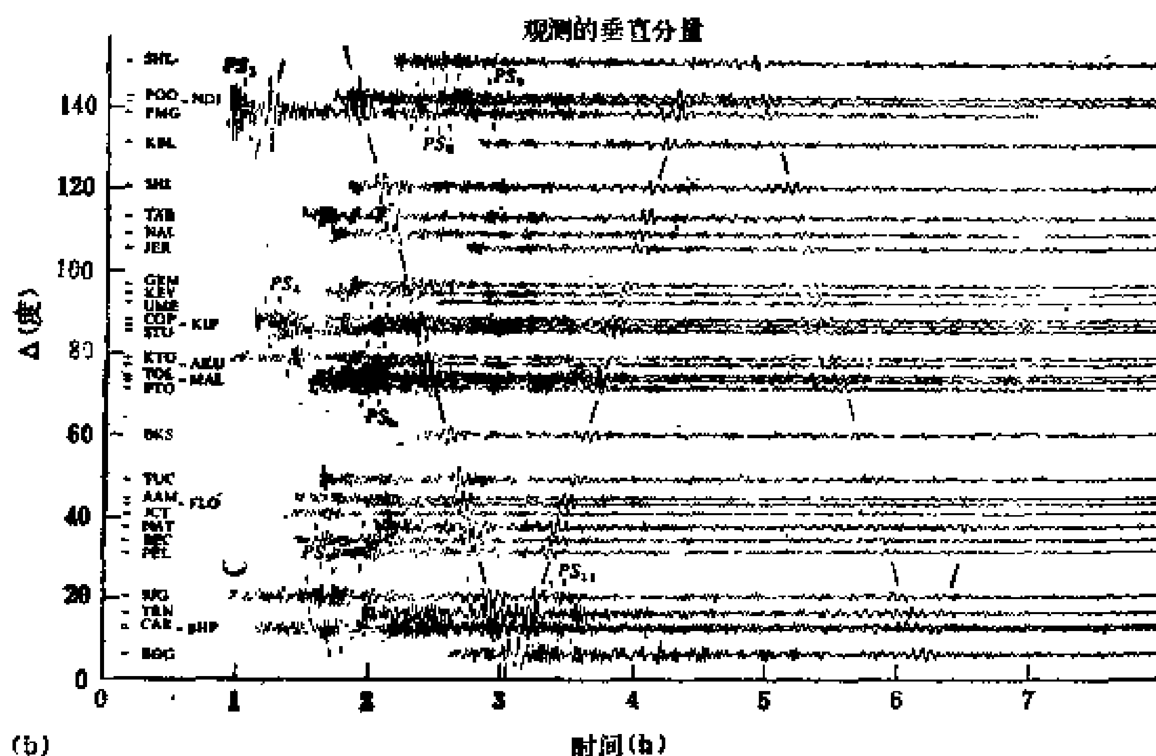


图 8.10

1970 年 7 月31日哥伦比亚深震的垂直分量。(a) 34 个世界标准台网台站的理论曲线，每一地震图都画在其准确的震中距 △处(此显示法称为记录剖面图)。通过(8.37)并用周期范围为100—1000 秒的诸振型及 Gilbert 与 Dziewouski(1975)的震源模型和 1066 A 地球模型进行了计算。(b)对和(a) 同样的台站及同样的地震所观测到的垂直地面运动(这些地震图已进行了仪器响应校正，并对计算 (a) 所用的同样的频率范围进行了滤波)(引自 Luh and Dziewonski, 1975)

论曲线剖面图模拟了观测资料的一般特征，但有些地方不一致。Luh 和 Dziewonski 提出，这一不协调是由于假定了矩变化率张量和(或者) Q 模型所造成的。显然，解释地震图的这种方法具有很大的潜力。在实践时，主要的困难是充分地计算和储存大量短周期简正振型(周期低至 5 秒左右)，这些短周期的简正振型是观测到的，但在"长周期"的世界标准台网的地震记录上不能各别地识别出来。对环型振型，已知一种变换(补充9.9)，可从地球的球面几何问题变换成平面-成层问题。在此情况下，已编写了高效率的程序，使对低至 1 秒左右周期的各种振型进行计算成为可能(Nakanishi *et al.*, 1977; Mantovani *et al.*, 1977)。对各种球型振型，已使用了 Rayleigh-Ritz 方法，它使对低至45秒左右的周期的所有振型进行计算成为可能(Buland and Gilbert, 1976, 1980)。甚至在更短的周期时，对每一振型已发展了精确的渐近理论(Woodhouse, 1978)。因此，(8.37)可用来做出一些类似于图 8.10 a，b 所表示的那样的对比，但资料未经彻底的滤波处理。

补充8.5

初始应力的考虑

地球内部的应力可达到兆巴的量级。由于 Hooke 定律中的弹性常数也是这个量级，因而，在地球中可能出现量级为 1 的应变，甚至在应力和应变均为零这一参考状态的简单情况下，使得现在的地球的情况可从这一状态出发用线性应力-应变理论而求得。事实上，我们没有理由去假定存在这样一个参考状态；即便是有，对研究地震波来说，它也并非是一个合适的参考，因为对于有限的应变，波的传播理论是非线性的。可是，用作参考的初始状态，其中应力可能很大但应变为零，我们来研究一微小应力增量的理论。

在地震学中，将刚好在地震之前的地球状态取为初始状态，这是很自然的。因为初始应力显然为各向同性的(对作用在沉积物质上的重力场，在任意给定的深度上都是适当的)，其结果是，迄今为止我

们已得到的所有公式实际上并未引进复杂性，其中全部忽略了初始应力场。对具有高初始应力的地球模型，必须检验基于经典弹性理论的各公式是否需要修正，这一工作主要由 Dahlen(1972, 1973, 1976a, 1977)完成。

研究一般初始应力的某些复杂性在于如下事实，在一物质质点上的应力增量由两部分组成，一部分取决于局部应变，从第二章给出的理论我们是熟悉的；另一部分取决于局部旋转，其作用是转动了初始应力场。因此，一般情况下总应力依赖于 $e_{ij}=\frac{1}{2}(u_{i,j}+u_{j,i})$ 和 $\omega_{ij}=\frac{1}{2}(u_{i,j}-u_{j,i})$。为描述应力场和应变场，Dahlen(1973) 主张用 Lagrange 方法。此外，为了把这些边界条件（诸如断层形成的描述）符合初始情况，第二章中使用的 Cauchy 应力张量是不适宜的。按 Cauchy 应力的定义，牵引力所作用的一些面积单元(在大小和取向上)是处于变形状态。Dahlen(1972, 1973)建议用初始状态下的各面元来描述其随后的牵引力。假定在初始状态下，以 x 为中心的一物质面元，其大小为 $dS(x)$，其取向为 $n(x)$。其后的某时间 t，原来在 x 处的质点移至 $X=x+u$ 且物质面元的大小为 $dS(X,t)$、取向为 $n(X,t)$。Cauchy 应力张量 σ^c 具有笛卡尔坐标分量，所以作用于物质单元的牵引力的第 j 个分量为 $n_i(X,t)\sigma^c_{ij}(X,t)dS(X,t)$。用等于 $n_i(x)\sigma^{PK}_{ij}(x,t)dS(x)$ 的牵引力来定义 Piola-Kirchhoff 应力张量的笛卡尔分量。这个张量可定量表示变形表面中每单位原来面积上的牵引力和时间的关系。初始应力 σ^0，Piola-kirchhoff 应力张量的增量 $\tilde{\tau}$ 和 Cauchy 应力张量的增量 τ 由下式给出：

$$\sigma^{PK}=\sigma^0+\tilde{\tau} \qquad \sigma^C=\sigma^0+\tau. \tag{1}$$

Dahlen (1972) 和 Malvern(1969)指出，Piola-kirchhoff 应力张量是不对称的。这些应力张量增量之间的关系为(对初始应力及其后应变的一级近似)

$$\tilde{\tau}_{ij}=\tau_{ij}+\sigma^0_{ij}\frac{\partial u_k}{\partial x_k}-\sigma^0_{ik}\frac{\partial u_j}{\partial x_k},$$

对一各向同性的初始应力 $\sigma^0_{ij}=-P_0\delta_{ij}$，上式可简化为

$$\tilde{\tau}_{ij}=\tau_{ij}-P_0\delta_{ij}\frac{\partial u_k}{\partial x_k}+P_0\frac{\partial u_j}{\partial x_i}.$$

对一自转的、自重的、弹性的地球模型，且对处于各向同性的初始受力状态下的应力和应变，Dahlen (1972) 认为，等效于一剪切位错（我们曾在第二章和第三章中得到）的体力仍是一个双力偶分布，如果初始状态也有剪切应力，则等效于剪应力的体力由双力偶加上附加项构成，其量级为[（初始剪应力）÷（原地弹性常数）]。这些附加项很小，因为岩石一般地支持不住大于一千巴或二千巴的剪应力。对 x_3 平面中的剪切断层运动，Dahlen(1976a) 还得到了 Cauchy 应力张量增量的连续性 $[\tau_{31}]=[\tau_{32}]=[\tau_{33}]=0$，并且由于穿过 Σ 的断层运动，通过介质的应变能的变化仍有如下公式(见补充3.4)：

$$\Delta E=-\frac{1}{2}\int_{\Sigma}[u_i(x,\ \infty)](\sigma_{ij}^0+\sigma_{ij}^1)\nu_j dS. \tag{2}$$

对于在 Σ 上摩擦作的功和形成新断层面所需作的功的公式，由于各向同性的初始应力的存在，这些公式也是不变的。即使日长和重力场都可发生变化，Dahlen(1977)指出，公式(2) 仍表示预先受力的地球模型中断层运动的能量（即为自转能、重力能及内部剪切应变能变化之和，尽管此和式中各单项在大小上比(2) 式右半部可大四个量级）。

8.5 地球自转引起简正振型的分裂

我们在 8.4 节讨论过的地球模型，其最不好的特点是它们并不转动而且是球对称的。这里我们考虑自转的影响，直至第十三章以前暂缓讨论横向的不均匀性。

地球的周日自转可预期会对简正振型产生定量的影响，它大体可用无量纲的比（简正振型周期）/（24小时）来表示。显然，对低阶的基频振型，这影响可达百分之几，并且是可观测到的。1960年智利地震的观测资料确实表明了像 ${}_0S_2$ 这样的振型的确没有一个单个的频谱峰，而至少是由54.7和53.1分钟周期的两条线组成的(Benioff *et al.*, 1966)。这影响被认为在数学上和Zeeman效应（氢原子在磁场中简并能级的分裂）相似。以前我们发现，对

每一l存在$2l+1$个振型，即$-l\leqslant m\leqslant l$，这些振型具有相同的本征频率和径向本征函数。但自转消除了这种简并，我们将单个的本征频率${}_n\omega_l$，代之以多重谱线${}_n\omega_l^m(-l\leqslant m\leqslant l)$，每一条都有一个不同的径向本征函数。在给出有关理论之前，注意到地球自转影响简正振型观测的某些实际问题是有益的。

首先，存在测定一给定振型的时间Q的问题。在一时间序列中，测量一给定频率成分的衰减率，其标准方法是计算频谱并在其半功率点上测量频谱峰的宽度。因此，对一时间函数$f(t)=H(t)[e^{-\omega_0 t/2Q}\cos\omega_0 t]$，接近$\omega_0$的振幅谱为

$$|f'(\omega)|\sim\frac{1}{2}\left[(\omega-\omega_0)^2+\left(\frac{\omega_0}{2Q}\right)^2\right]^{-1/2}. \qquad (8.66)$$

当$\omega=\omega_0\pm\omega_0/2Q$时，振幅从其峰值按因子$1/\sqrt{2}$下降，相应的功率谱$|f(\omega)|^2$以因子1/2下降。在其半功率点测量峰的宽度$\Delta\omega$，从而得出$Q^{-1}=\Delta\omega/\omega_0$。显然，如果频谱峰在给定的多重谱线重叠部分之内，则求Q的标准方法将不能用。因此，不能分解出单个的振型，而且(8.66)在ω_0附近是一不充分的频谱模型。Alsop等（1961 b）找到的另一种测量Q值的一般方法仍然可用。他们的方法是解释这些频谱的相对振幅，这些频谱是沿原来地震图仔细选择时间窗(相等的长度)来确定的，每一个窗求出一个频谱。

由于自转而使多重谱线分离，与此相关的第二个问题是它将由于地球偏离球对称而引起多重谱线的分离变得模糊不清。Dahlen(1968，1969)提出，如果用对简正振型的分离效应研究地球的横向不均匀性，则对一级近似和二级近似两种情况其自转效应必须消除。

根据这些初步的陈述，现在我们给出自转分离的一级扰动理论。

考虑一振荡的环型振型，它得自(8.59)，并满足

$$\rho_0 \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = [\mu(u_{i,j} + u_{j,i})]_{,j}. \tag{8.67}$$

此式描述了离开非自转平衡状态的一微小运动。在此状态下可标出一固定的惯性坐标系。但地球有周日自转，所以必须修正(8.67)，使 $\boldsymbol{u}$ 描述偏离自转平衡态的一些微小运动。为作到这一点，我们用一个以恒定角速度 $\boldsymbol{\Omega}=\Omega\hat{\boldsymbol{z}}$ 转动的坐标系，其中 Ω 每24小时(实际上是每恒星日）为 2π，$\hat{\boldsymbol{z}}$ 为沿地球自转轴方向的单位向量。在这个非惯性系统中，质点的速度为 $\partial \boldsymbol{u}/\partial t+\boldsymbol{\Omega}\times\boldsymbol{u}$，质点的加速度为 $\partial^2\boldsymbol{u}/\partial t^2+2\boldsymbol{\Omega}\times\partial\boldsymbol{u}/\partial t+\boldsymbol{\Omega}\times(\boldsymbol{\Omega}\times\boldsymbol{u})$。由于 Ω 很小（相对于简正振型的频率），我们将忽略量级为 Ω^2 的项，于是(8.67)变成

$$\rho_0 \frac{\partial^2 \boldsymbol{u}}{\partial t^2} + 2\rho_0 \boldsymbol{\Omega} \times \frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t} = \boldsymbol{X}, \tag{8.68}$$

其中 $X_i=[\mu(u_{i,j}+u_{j,i})]_{,j}$.

我们将假定，没有 Coriolis 加速度 $2\boldsymbol{\Omega}\times\partial\boldsymbol{u}/\partial t$ 的(8.68)式有一简并本征值

$$\omega_0 = {}_n\omega_l. \tag{8.69}$$

我们要研究的(8.68)式的解 $\boldsymbol{u}$ 具有受 ${}_nW_l(r)T_l^m(\Delta,\phi)$ 支配的空间函数关系和从(8.69)的轻微扰动得到的本征频率 $\omega={}_n\omega_l^m$。可证明（Backus 和 Gilbert，1961），当 Ω 很小时，$\boldsymbol{u}$ 是 Ω 的解析函数，所以我们可用如下的幂级数形式表示：

$$\begin{aligned} \frac{\omega}{\omega_0} &= 1 + \sigma_1\left(\frac{\Omega}{\omega_0}\right) + \sigma_2\left(\frac{\Omega}{\omega_0}\right)^2 + \cdots, \\ \boldsymbol{u} &= \boldsymbol{u}_0 + \boldsymbol{u}_1\left(\frac{\Omega}{\omega_0}\right) + \cdots, \\ \boldsymbol{X} &= \boldsymbol{X}_0 + \boldsymbol{X}_1\left(\frac{\Omega}{\omega_0}\right) + \cdots, \end{aligned} \tag{8.70}$$

其中 ω 是(8.68)的本征值（即 $\boldsymbol{u}\propto\exp(-i\omega t)$）。将 $\boldsymbol{\Omega}=\Omega\hat{\boldsymbol{z}}$ 和(8.70)代入(8.68)并使 (Ω/ω_0) 的幂次相等，我们得到

$$-\rho_0\omega_0^2\boldsymbol{u}_0=\boldsymbol{X}_0 \tag{8.71}$$

$$-\rho_0\omega_0^2\boldsymbol{u}_1-2\rho_0\omega_0^2[\sigma_1\boldsymbol{u}_0+i\hat{\boldsymbol{z}}\times\boldsymbol{u}_0]=\boldsymbol{X}_1. \tag{8.72}$$

现在我们的目的是求得一级扰动σ_1。显然，$\boldsymbol{u}_1$和$\boldsymbol{u}_0$一定是线性无关的，因此如有必要重新定义$\boldsymbol{u}_0$，我们可假定$\boldsymbol{u}_1$和$\boldsymbol{u}_0$是正交的。Pekeris 等(1961)也证明$\boldsymbol{X}_1$和$\boldsymbol{u}_0$是正交的，因此，从(8.72)得到

$$\int\rho_0[\sigma_1\boldsymbol{u}_0^*\cdot\boldsymbol{u}_0+i\boldsymbol{u}_0^*\cdot(\hat{\boldsymbol{z}}\times\boldsymbol{u}_0)]dV=0.$$

这是一个σ_1的方程，可以改写成[用(8.35)]

$$\sigma_1=-i\hat{\boldsymbol{z}}\int\rho_0\boldsymbol{u}_0\times\boldsymbol{u}_0^*dV. \tag{8.73}$$

由于$\boldsymbol{u}_0={}_0W_l(r)T_l^m(\Delta,\varphi)\exp(-i{}_n\omega_l t)$，(8.73)中的积分给出

$$\sigma_1=\frac{-m}{l(l+1)} \tag{8.74}$$

从地球物理学的观点，这一结果有些令人失望，因为它告诉我们环型振型的一级分离和地球结构是无关的。从方程(8.70)得到，扰动的本征频率为

$${}_n\omega_l^m={}_n\omega_l-\frac{m}{l(l+1)}\Omega\quad 当-l\leqslant m\leqslant l时， \tag{8.75}$$

简并已去掉。

值得注意的是，对球型振型，方程(8.73)仍然是成立的，其中$\boldsymbol{u}_0=[{}_nU_l\boldsymbol{R}_l^m+{}_nV_l\boldsymbol{S}_l^m]\exp(-i{}_n\omega_l t)$，并已对(8.34)进行了归一化。$\sigma_1$可以求出，这就得到

$${}_n\omega_l^m={}_n\omega_l-m\Omega{}_n\beta_l, \tag{8.76}$$

其中

$${}_n\beta_l=\int_0^{r_\oplus}\frac{\rho_0({}_nV_l)^2}{l(l+1)}r^2dV+2\int_0^{r_\oplus}\frac{\rho_0({}_nU_l)({}_nV_l)}{[l(l+1)]^{1/2}}r^2dV.$$

${}_n\beta_l(\Omega/{}_n\omega_l)$的值已由 Dahlen (1968) 算出，并且对振型${}_1S_1$和${}_0S_2$其值为最大，约达到 0.015。

也许自转分离理论的主要用处在于依据分离多重谱线中相近的空间分量来模拟一部分所观测到的频谱峰，因而能设计一资料

分析方法来估算 Q。Stein 和 Geller(1978)提倡在时间域中地面运动的合成法——即在和给定的(n,l)有关的多重谱线$-l\leqslant m\leqslant l$之内，求得每一振型的激发。他们将多重谱线中各种振型相加，并将这合成地震图与实际资料进行了对比（合成地震图和实际资料两者都通过窄带滤波以分出有意义的多重谱线。）图 8.11 给出了一个实例，这是 1960 年智利大地震之后观测的 ${}_0S_2$，150 小时的记录长度表明在多重谱线内不同振型间的干涉。

在这一段中我们仅概述了自转分裂的最简单的情况。Dahlen 和 Smith(1975)已给出了一种推广的处理方法，表明对自转的地球其简正振型不再是正交的。当地球模型的一部分是流体时（例如外核），这就开辟了理论问题的一个崭新领域，甚至没有自转的复杂性，这是因为具有很长周期的一组简正振型是可能存在的。它们可以有好几小时的周期，称作低调(Pekeris and Accad, 1972)。

有很多影响作用在地球上，其时间尺度比 ${}_0S_2$ 的周期还长。可希望能给出形变的准静态分析，但很遗憾，由于流体地核的存在，这一点并不简单。Longman(1963)曾指出，方程(8.63)在 $\mu\to 0$ 和 $\omega\to 0$ 的极限情况下变得相互不一致，而且很多作者都曾提出解决此佯谬的办法（Crossloy 和 Gubbins, 1975)。在简正振型和地球自转的情况下，Chandler 晃动的理论由于 Longman 佯谬而复杂化了。Smith(1977) 曾避开了准静态分析，并指出了对一自转的地球（具有流体地核但无海洋）其动态方程为什么如一简正振型一样确有 Chandler 晃动。对一具有稳定成层液核的地球模型，他算出的周期为 405.19 恒星日，观测的周期是 434.14±1.02 恒星日 (Currie, 1974)。但 Dahlen 指出，对于 Smith 那样的地球模型，全世界海洋的作用将使 Chandler 晃动周期增加，并使观测的和预测的 Chandler 周期之间具有良好的一致性。

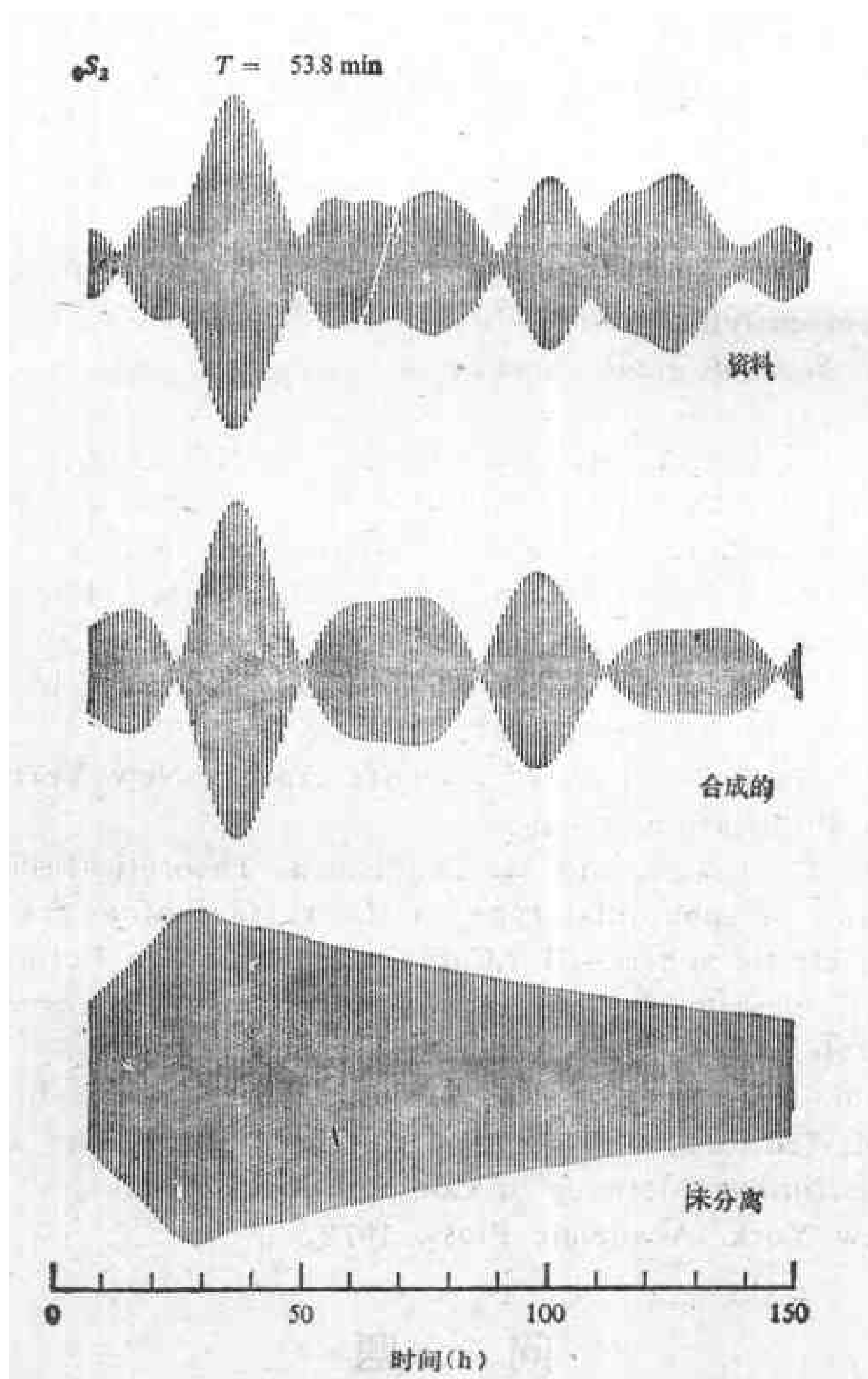


图 8.11

在时间域中 $_0S_2$ 的观测曲线和该记录的合成曲线的对比，合成曲线是用考虑到自转分离效应和不考虑自转分离效应两种方法合成的(引自Stein and Gilbert, 1977)

建议进一步阅读的文献

Biot, M. A. *Mechanics of Incremental Deformations*, New York: Wiley, 1965.

Brune, J. N., and F. Gilbert. Torsional overtone dispersion from correlations of S waves to SS waves. *Bulletin of the Seismological Society of America*. **64**, 313 320, 1974.

Gilbert, F., and A. M. Dziewonski. An application of normal mode theory to the retrieval of structural parameters and source mechanisms from seismic spectra. *Philosophical Transactions of the Royal Society* (Lond.), A **278**, 187-269, 1975.

Love, A. E. H. *Some Problems of Geodynamics*. New York: Dover Publications, 1967.

Rayleigh, Baron. *Theory of Sound*(Chap. 5). New York: Dover Publications, 1945.

Satô, Y., T. Usami, and M. Landisman. Theoretical seismograms of spheroidal type on the surface of a gravitating elastic sphere—II. Case of Gutenberg-Bullen A′ earth models. *Bulletin of the Earthquake Research Institute, Tokyo Univ.*, **45**, 601-624, 1967.

Takeuchi, H., and M. Saito. Seismic surface waves. In B.A. Bolt (editor), *Seismology: Surface Waves and Earth Oscillations*(Methods in Computational Physics, Vol.11). New York: Academic Press, 1972.

问　　题

8.1 对一均匀的弹性固体球的扭动振荡，给出简正振型理论并且求出两个最大周期。对由一单个的水平力激发的${}_0T_2$，一般来说，最适宜的深度是什么？由垂直轴上有矩力偶激发

的情况又如何呢？

8.2 证明扭动振型的时间的 Q 是和半径 r 处体波的 $Q_\beta(r)$ 有关

$$Q^{-1}=\int_0^{r_\oplus}\frac{\beta}{\omega}\left[\frac{\partial\omega}{\partial\beta}\right]Q_\beta^{-1}(r)dr,$$

这里的偏微分由(8.65)给出。

8.3 如下的论点错误在那里？地球的周日自转不是由外力微发的，因而是地球的一个自由振荡。它必然是相应于 $l=1$ 的扭动振荡。对一球对称的地球可得出，自转可能对任何其它振型（环型的和球型的）没有影响，因为在这样模型中的各振型毫无相互作用。

8.4 一大地震之后，在给定的台站上，设有相继到达的 G 波，G_1，$G_2,\cdots,G_n$（见附录1）。考虑到极相移，由 G_n 和 G_m 的 Fourier 变换，推导在大圆上测定相速度的公式。

如果 n 和 m 相差一个偶数，这个公式不包括震源效应所造成的初始相位。不然的话，就需要知道在相反的辐射方位上初始相位之间的差。对一点源(7.148)，关于相反方位上的初始相位，有什么简单的办法能使后一情况下的公式得以简化？

利用（7.149），对地幔中的 Rayleigh 波可考虑同样的问题。

第九章　在性质与深度有关的介质中的体波

利用地震波研究地球内部结构，历史上唯一最成功的方法是应用射线理论公式（4.4节）去解释短周期体波。事实上，对不同的接收位置 x 和不同的震源位置 ξ，恰是根据走时函数 $T(x, \xi)$ 的观测，Beno Gutenberg于1913年准确地估算出了核-幔边界的深度为2900公里。地壳厚度的准确估算是 Mohorovičić 于1909年开始的，而1936年 Inge Lehmann 才辨明内核的存在。1939年前，Gutenberg和Harold Jeffreys在运用射线理论方面分别地进行了努力，都曾导出了整个地球的速度模型，其相互的差别仅为百分之几。在800—2800公里深度范围内，Gutenberg和 Jeffreys 的模型中，其P波速度之差小于1％，在 Jeffreys 模型和Gilbert与 Dziewonski (1975) 的近代模型1066 B之间的差也小于1％。然而，Gutenberg 和 Jeffreys 用射线理论所得到的这些早期结果，对解决地球内很大深度处物质的组成及状态等很多问题是不够用的。例如，在上地幔中有两个深度范围（约为400公里和650公里），其中的速度梯度（$d\alpha/dz$）异常地大。这原因似乎可能是组成成分的变化，也可能是同一矿物不同相之间的转变（或可能为两者），并且一般而言，这一困难的任何满意的解答将在很大程度上取决于地震学家能否准确估算 $d\alpha/dz$ 和 $d\beta/dz$ 随深度的变化。类似地，为了了解在地球液核中的发电机的能源问题，重要的是要知道是否有一些速度梯度值，能够阻止对流或加速对流。

结果是，地震学最经典的方面之一仍是一个活跃的研究领域：即推断地球内部结构，但现在强调的是比较细的结构，诸如对限

定的深度范围内的速度梯度变化和计算穿过像Moho界面那样的已知间断面时其性质的突变。

这里，体波起一种重要的作用，由于它们相当短的周期和在地震图上从时间上把它们与其它波分离开的可能性，使它们有可能用于研究地球内部的局部区域。人们早已认识到这个事实，但问题主要是要找到一个方法，以对处理走时资料的经典方法给予明显的改进。在第十一章中，我们叙述用地震台阵直接测量慢度（即在台阵之内当x变化时，测$T(x, \xi)$的梯度）的能力，在第十二章中，我们指出为什么这是一个重要的改进，因为在反演计算中正是这个慢度才是所需要的。此外，由于T通常是多值函数，根据测量它们的不同慢度，台阵可以帮助辨认后至波。然而，大部分改进仍是基于测定到时和研究4.4节中的射线理论。

Julian和Anderson(1968)，Wesson(1970)，Shimshoni和Ben-Menahem(1970)及Chapman(1971)总结了将射线理论用于体波初至振幅的各种尝试。这些文章表明，几何扩散函数(在第四章中标记为$\mathscr{R}(x,\xi)$)可能是速度梯度的一个极为敏感的函数，对反演地球结构来说这是所希望的特性。然而，正是在该阶段才能清楚地认识应用经典射线理论去解释资料时的局限性。问题是理论本身此时不能成立，因为在体波资料中可以看到各种各样和频率有关的效应不能用射线理论来定量表示。在"影区"见到了体波(按Snell定律不能穿入此区)；由于频率和振幅有关，在焦散面的附近也见到有体波[此为一弱聚焦面，在其上$\mathscr{R}(x,\xi)=0$]，当然，用几何扩散函数不可能预测出这种奇异性；还看到在震源和接收点之间很多种射线都有相似的到时，所以观测到了复杂的干涉效应；在这个情况下，仍见到体波。为弄清楚这些观测资料所需要的波动理论基本上是在第六章中为解决Lamb问题所用方法的推广，再加上在第七章中为处理成层介质中的波曾叙述过的系统方法。事实上，为有效地研究体波我们将区分成三种颇为不同

的理论方法。目前，虽然计算的方法本质上是不同的，但现在每一理论却都用了同样的途径——即在一些具有给定震源的一定的地球模型中去计算合成地震图，然后在理论和观测之间作比较。因为利用资料中的整个波形来判断地球和震源的特定模型是否成功，比起仅利用射线理论的走时曲线和初动方向，合成地震图是一较为重要的进展。

我们将叙述的第一种理论方法是 Cagniard 方法（6.5 节）的推广，实践中常常用来处理由很多（可能有几百）均匀平面层组成的介质。如 Helmberger (1968)指出的，这里的关键是在复射线参量平面中求 Cagniard 路径的数值方法［而不是犹如（6.91）给出的简单的双曲线计算］。第二种理论方法是 Fuchs (1968, 1970, 1971)首创的，通常称为"反射率法"，目的也是在于计算由很多均匀层组成的介质中的波。以 Haskell 在地震学中发展的矩阵法为基础(见第七章)，Fuchs 方法包含了对有限范围内的实射线参量的数值积分，随后是对频率进行 Fourier 反变换以求得这合成地震图。

当然，地球不是由均匀平面层叠置而成的；因而，应用上述两个方法去解释地震图时，必须注意到两个重要的结果。其一是，由 Volterra 给出的法则（见 Gilbert 和 Backus, 1966），对密度和波速在空间上连续变化的介质中，其波系确实可通过求解很多均匀部分组成的不连续介质中的波加以研究。事实上，求不连续介质中（在极限的情况下，可令均匀区的数目趋于无限，用此方法以给出连续介质的密度和波速）的波解，而这个解确实趋向于连续介质中的波解。在实践中，对 ρ,α,β 仅仅和深度有关(即仅和笛卡尔坐标中的 z 有关）的介质，则容许以大量均匀平面层来模拟一个连续剖面。尽管 Chapman (1976 a) 已推广了 Cagniard 方法，使对连续变化的 $\rho(z),\alpha(z),\beta(z)$能直接得到解，但上述方法仍被广泛采用。

将 Cagniard 和 Fuchs 方法应用于地震学中所需要的第二个

结果包含着要考虑地球的球状几何条件（贯穿本章，我们将仅考虑这样的介质，其中 ρ, α, β 在球极坐标系中为 r 的函数或者为深度 z 的函数，z 或属直角坐标系或属具有对称垂直轴的柱坐标系。)于是，问题是如何把球对称介质中（即径向不均匀性）提出的波传播问题转换到平面叠层介质中的问题，对后者，前两个求解方法是直接可用的. 用这种"地球展平变换"，Andrianova 等(1967)及 Biswas 与 Knopoff (1970)曾指出，对 SH 波，从平面介质中的相应解求得球形介质中精确的波动解答是可能的。很遗憾，Chapman(1973) 指出，对 P-SV 问题的精确转换似乎是不可能的，毫无疑问，目前用于 P-SV 问题的"地球展平变换"仅仅是近似的。

我们将叙述的第三种求解方法要求地球模型应由径向不均匀层组成。地震运动（在地球的不同位置，作为时间的函数）被划分成在不同的时间窗内到达的信号，每一信号在本质上相应于某个特定类型的体波射线路径。代替几何射线理论，可对所要讨论的信号用一种更精确的解，这就是对频率和射线参量求积分。在这一般的步骤中，对完成双重积分已提出了几种不同的方法。可先作频率积分或可先作射线参量积分。射线参量积分可对实数求得或者可对复数求得。很多学者推动了这一基础理论的发展。Scholte(1956)曾作了重要贡献，他利用了已经完全确定了的、在球面几何中对部分波的层开求和的方法，并较详细地说明了在频率域中对特定的地震射线如何确定其解。此解包含一个(实际上)以射线参量为变量的在复平面上的积分，Phinney 和 Alexander (1966)，Phinney 和 Cathles(1969) 曾对此作出了重要贡献。他们指出这个积分可以很容易地用数值法得到。采取对射线参量的复数积分的方法，随后对频率求实数积分，我们将给出和地球的固体及液核相互作用的几种地震波的一些实际应用。Chapman (1978 a,b)曾描述了几种可供选择的方法。通常很有效的一种方法首先要求对实频率求积分（在很多情况下，这在解析上而不是

在数值上是可能的)，随后是对射线参量积分的一个相当简单的反演。

因为地球是这样一个复杂的介质（甚至当假定为球对称时），实际上，在我们叙述的不同求解方法中的每一种，都必须取其近似。因此，幸而存在着几种方法，因为似乎任意一种方法的精度(并且更重要的是地球物理的结论可由其应用中得出)仅仅可通过和其它方法的比较而确定。实际上，这些比较仅在最近才开始做，尽管结果并不满意，似乎这些不同的方法在应用上有其独特的但又互相重叠的范围。

9.1 多平面层介质中的 Caniard 方法：广义射线的分析

这一节是 6.5 节的自然推广，在 6.5 节中我们曾指出如何计算来自两个半空间内界面上的广义反射。假定读者较熟悉(6.91)的推导及(6.92)—(6.95) 中详述的步骤。我们按照 Helmberger (1968)的方法，他描述了如何去计算如图 9.1 所示的广义的一次反射。Helmberger 最初用这个方法来解释白令海面以下在 d_1 深度处引爆 TNT 炸药时，由于压力的点源而得到的水下地震检波器的记录。接收点在 d_2 深度处，其主要目的是用 Moho 界面的首波和反射波来解释 r 的范围约为 30—70 公里处的响应。因此，需要推广此理论去处理地壳的可能分层。

取 z_0 为海洋-大气的交界面，层 1 为海洋本身，用层 1 中的入射压力场表示震源：

$$P^{\text{入}}(r,z,t)=\frac{R_S}{[r^2+(z-z_0-d_1)^2]^{1/2}}\times P_0\left(t-\frac{[r^2+(z-z_0-d_1)^2]^{1/2}}{\alpha_1}\right). \tag{9.1}$$

就是说，在离震源的标准(固定的)距离 R_S 处，初始压力脉冲的

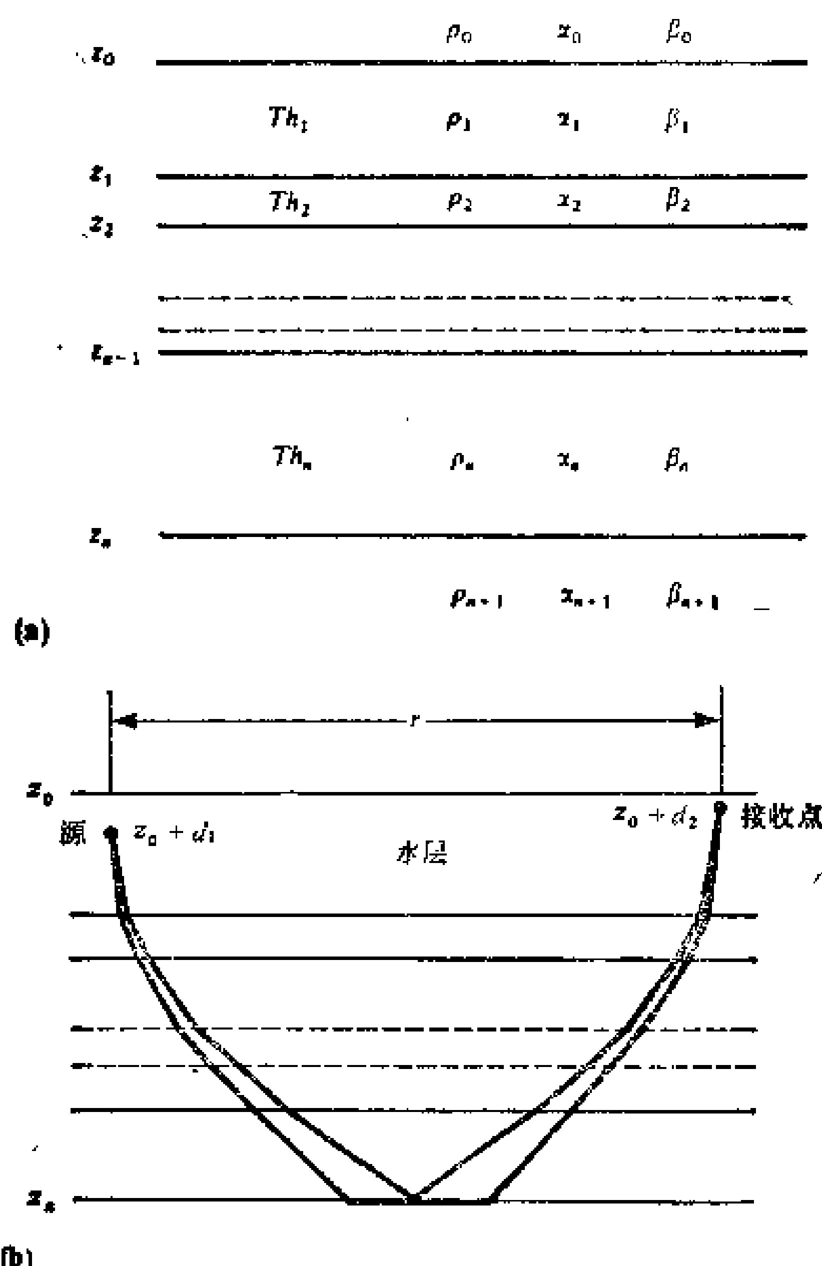


图 9.1

(a) 均匀叠层中密度（ρ）和两个波速（α，β）的符号。层 n 和层 $n+1$ 之间的边界在深度z_n处，第 n 层的厚度为 $Th_n=z_n-z_{n-1}$。(b) 和第 n 层边界相关的两个主要有贡献的广义 P 波反射的射线图解；源和接收点均在层 1 中。我们假定了 $\alpha_{n+1}>\alpha_n$，所以首波(包括在第 $n+1$ 层顶部的水平传播)和广角反射波可能同时存在，如所示。因为广义反射仅和一个内界面有关，故称之为一次反射。图中未表示波型的转换(从P到 SV)。实际上对一P波源往往确实如此，在接收点上总的P波响应，由对每一内界面上的这种一次反射之和完全精确地给出（即忽略多次内反射和从P到 SV 及 SV 回到P 的转换）

形状为 $P_0(t-R_S/\alpha_1)$。按第六章中对压力源的分析，对图 9.1 b 表示的广义 P 波一次反射，我们可立即写出其 Laplace 变换。即有

$$P(r,z,s)=\frac{2s}{\pi}R_S P_0(s)\mathrm{Im}\int_0^{i\infty}\frac{p}{\xi_l}$$
$$\times K_0(spr)[积(p)]\exp\{-s[和(p)]\}dp, \quad (9.2)$$

其中 K_0 是修正的 Bessel 函数，

$$积(p)=(\grave{P}\grave{P})_1\cdot(\grave{P}\grave{P})_2\cdots(\grave{P}\grave{P})_{n-1}\cdot(\grave{P}\acute{P})_n$$
$$\cdot(\acute{P}\acute{P})_{n-1}\cdots(\acute{P}\acute{P})_2\cdot(\acute{P}\acute{P})_1, \quad (9.3)$$

$$和(p)=(Th_1-d_1)\xi_1+Th_2\xi_2+\cdots+Th_n\xi_n$$
$$+Th_n\xi_n+\cdots+Th_2\xi_2+(Th_1-d_2)\xi_1 \quad (9.4)$$

这里，$\xi_i=(\alpha_i^{-2}-p^2)^{1/2}$ 具有按 $\mathrm{Re}\xi_i\geq 0$ 选择的分支切割，同时，$(\grave{P}\grave{P})_{n-1}$(等)是第 $n-1$ 个边界上的透射系数。(9.3)中的乘积包含有平面波的透射系数和反射系数，看一下图 9.1 b，顺着穿过内界面的广义射线，很容易写出它们来。(虽然物理变量是压力，但在此情况下我们使用了位移系数，因为源和接收点在同一层中，并且压力系数将会给出同样的乘积。)类似地，(9.4) 中的和是顺

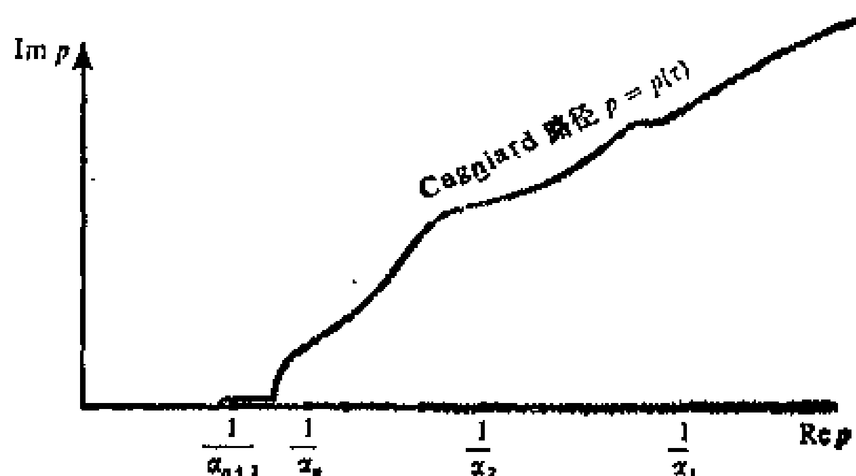


图 9.2

复 p 平面的第一象限，在实轴上示出了很多支点(具有向右延伸的切割)，同时示出了求解 (9.5) 的 Cagniard 路径(即对图 9.1 中的广义射线)。在 $p=1/\alpha_{n+1}$ 附近首波的作用发生，在 Cagniard 路径偏离实 p 轴的附近，反射出现

着广义射线累积的垂直相位延迟。

对(9.2)的反演，其 Cagniard 路径现在是 $p=p(\tau)$，它是下面方程的解：

$$\tau = p(r) + 和(p), \tag{9.5}$$

其中 τ 是正实数。虽然这一步必须从数值上完成，但这个解很容易求得，它有很多如图 6.15 中所描述的广义反射的特性。在如图 9.2 的多层情况下，假定 P 波速度 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \cdots, \alpha_{n+1}$ 随深度而增加，且 r 足够大以致来自 $n+1$ 层中的首波确实存在，则我们可证明这个解。

如果源脉冲 $P_0(t)$ 在距离 R_s 处为单位阶梯函数，则广义一次反射在时间域中的响应准确地为

$$\frac{2}{\pi} R_s \mathrm{Im} \int_0^t \frac{p}{\xi_1} \left(\frac{dp}{d\tau}\right) \frac{积(p)\, d\tau}{(t-\tau)^{1/2}(t-\tau+2pr)^{1/2}} \tag{9.6}$$

[和(6.92)对比]。实际上，以 $(2\,pr)^{1/2}$ 替换这个分母中的 $(t-\tau+2\,pr)^{1/2}$ 是合适的，于是此阶梯函数的响应(9.6)变成

$$\frac{2}{\pi}\psi(t) * \frac{1}{t^{1/2}}, \quad 其中 \psi(t) = R_s \mathrm{Im}\left\{\frac{p^{1/2}}{\xi_1} \frac{dp}{d\tau} \frac{积(p)}{(2r)^{1/2}}\right\}. \tag{9.7}$$

在把这个响应和实际资料对比之前，当然，完成与实际震源脉冲 $P_0(t)$ 和仪器响应 $I(t)$ 的褶积并且对近源及近接收点的反射做一些修正是必要的。这些效应合在一起概括为传递函数 $T(t)$：

$$T(t) = P_0(t) * I(t) * \left[\delta(t) - \delta\left(t - \frac{2d_1}{\alpha_1}\right) - \delta\left(t - \frac{2d_2}{\alpha_1}\right) + \delta\left(t - \frac{2d_1}{\alpha_1} - \frac{2d_2}{\alpha_1}\right)\right]. \tag{9.8}$$

在选定三个附加的 δ 函数以表示在表面上的反射之后，其它一些假设如图 9.3 中所述。图 9.4 表示 Helmberger(1968) 方法，在此法中他用 $T(t)$ 的各分量展开了 $T(t)$。于是得到合成响应为

$$T(t) * \frac{d}{dt}[(9.6)给出的阶梯函数响应]$$

$$=\frac{dT}{dt}*\frac{2}{\pi}\psi(t)*\frac{1}{t^{1/2}}. \tag{9.9}$$

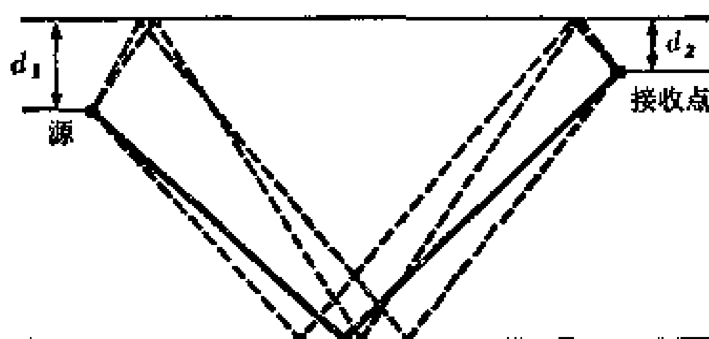


图 9.3

对接近地表的源和接收点，表面反射的效应是在原来射线上再加上三个额外的广义射线，如图 9.1 b 所示。因此，对震源附近的反射，引进了时间延迟 $2d_1/\alpha_1$（海洋声速要比 α_{n+1} 低得多，以致对 Moho 折射，海洋中的射线路径是近于垂直的）。由于 $d_1 \ll Th_1$ 和 $d_1 \ll r$，这个时间延迟是仅有的重要效应（除了反射时符号变化以外），此射线的余下部分实质上和原来的广义射线一样

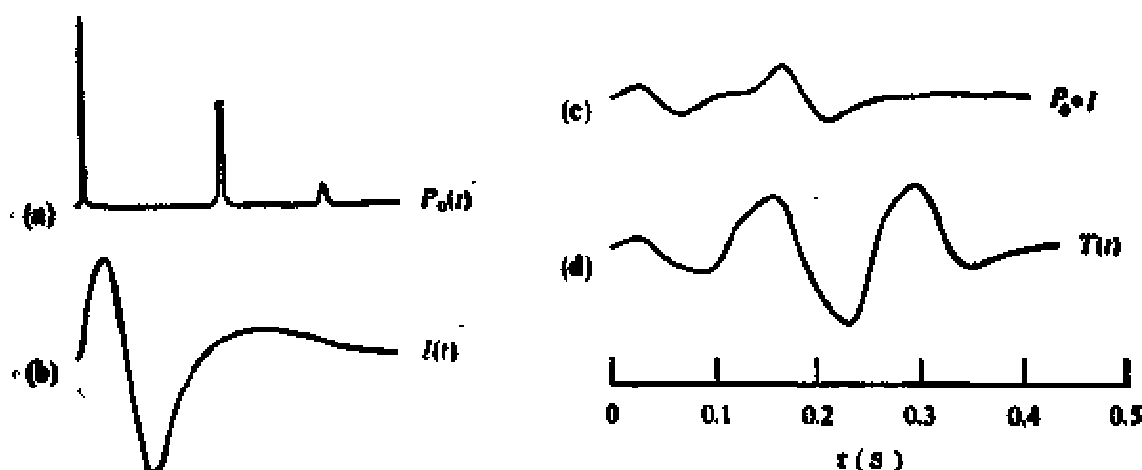


图 9.4 传递函数的结构

(a) 在 160 英尺深度处引爆 TNT 炸药时，其典型的源函数 $P_0(t)$。一振荡的气泡是造成后一个脉冲的原因。(b) 这仪器（水中地震检波器加上记录系统）的函数是一 δ 函数的压力波通过接收点时记录的响应。(c) 为(a)和(b)的褶积。(d) 对描述在震源附近和接收点附近的反射作典型褶积之后，其传递函数本身[引自 Helmberger (1968)的图 6]

记住这里已考虑过的在 z_n 处内界面上仅有广义的 P 波一次反

射。对图 9.5 所示的海洋地壳模型有几个一次反射，我们认为这是由于在 19 公里的Moho界面以上的另外四个内界面造成的。然而，这些很容易地可用(9.7)中定义的适当的 ψ 函数的求和算得，每一个都有不同的 Cagniard 路径。然后再进行 (9.9) 中所示的两次褶积。结果如图 9.6 所示，对白令海阿达克 (Adak) 北约 500 公里处进行的折射实验，Helmberger (1968)比较了合成的和观测的波形。此图确实表明了在合成的和观测的脉冲形状之间有相当好的一致性，虽然在相对振幅上仍然有些不一致，这可能是由于震源校正的误差造成的。Cagniard 路径的细节以及对首波和反射波的波形展开式，已在问题 9.1 和 9.2 中叙述。

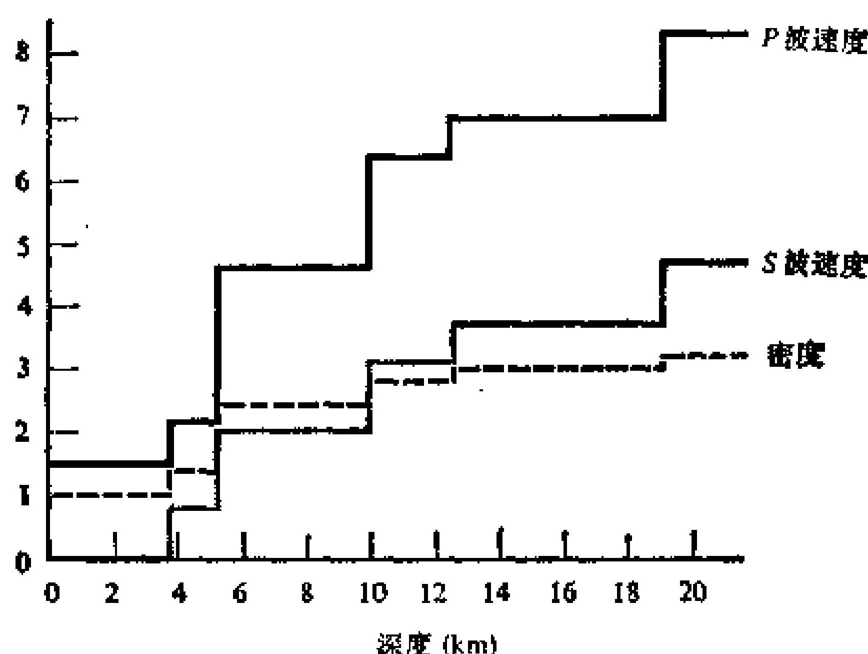


图 9.5

在北阿留申盆地之下的海洋地壳模型。Moho 界面在 19 公里深处，水层 3.75 公里[引自 Helmberger(1968)的图 10]

既然每一个广义射线的贡献可以算出，这就使得几百个广义射线贡献之和也可以算出。因而，大量有意义的地球物理问题可以在这样推广 Cagniard 理论的基础上进行分析。Mellman 和 Helmberger (1974) 曾证明薄的高速层如何引起高频波的衰减；

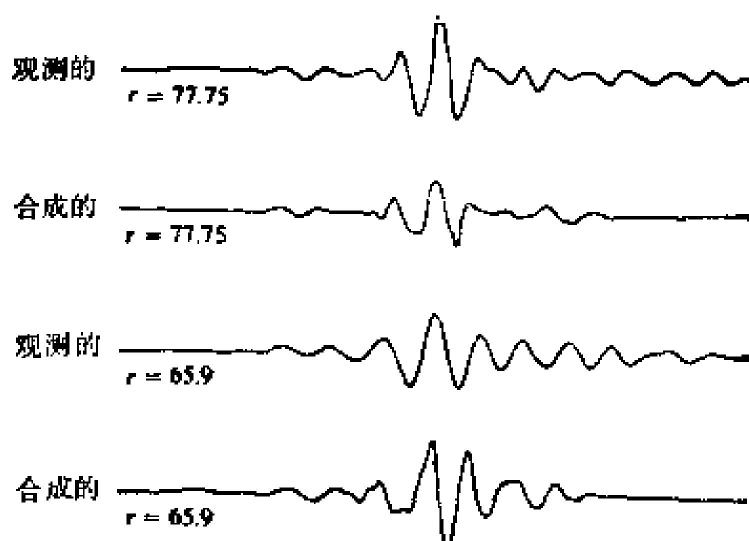


图 9.6

从北阿留申盆地之下的 Moho 界面得到的首波和广角反射波的观测的和合成的水声检波器记录的对比。反射相当强。合成记录是由图 9.5 中的模型按广义 P 波一次反射算出的。观测值以因子$10^{\frac{1}{2}}$衰减，而合成的波形以因子 2 减小[引自 Helmberger(1968)的图 11]

Vered和Ben-Menahem(1974)及Langston 和 Helmberger(1975)曾说明如何分析剪切位错源；Helmberger 和 Malone(1975)对比了合成的 SH 波和观测的 SH 波，以表明地壳分层如何可使地方震的波形发生严重失真；Spudich和Helmberger(1979)曾考察了所预期的海底沉积结构，发现了漏能模式的实际效应很像我们在第六章中对半空间所描述的$\overline{P}$波。

当然，通常我们必须考虑的广义射线的数目是相当大的。这将发生于结构具有较大的速度梯度时，以及合成图需要很长的时间计算时。由于这些问题的重要性，现在我们转向另一计算方法，此法中保留了所有的多次反射。

9.2 多平面层介质的反射率法

在第六章和第七章中，我们曾说明了如何得到两次变换的解作为(k,z,ω)的函数，其中 k 是水平波数。为计算反变换以给出

其解为(r,z,ω)的函数，这几章中着重于在复 k 平面内（或 p 平面，$k=\omega p$)的计算。Fuchs 方法是通过数值计算求此反变换的，他先对实 k 值积分，然后再对实 ω 值求积分，以得到所需要的为(r,z,t)函数的解。例如，在描述 Love 波的激发中(7.4 节)，我们得到了一个多次变换求解公式。这可用已知的在均匀叠层中 SH 波传播的形式来算得。在一系列不同频率上完成对实数 k 的积分，然后，用$\left(\frac{1}{\pi}\right)\mathrm{Re}\int_0^{s} s(r,z,\omega)\exp(-i\omega t)d\omega$ 的离散形式以求得合成地震图。

实现上述程序的困难是由于相应于面波振型的多次变换解中的极点所引起的。这些极点落在实 k 轴上，因而也是在积分路径上。似乎这个困难可以通过将每一层的速度加上一个小的复数部分而消除，考虑到非弹性(见(5.88))，它将使这些面波的极点从正实 k 轴上移到 k 平面的第一象限中。然而，Fuchs 方法主要是用于体波的研究中，以得到其中有点源激发的均匀平面叠层在自由表面上的响应。如果我们的兴趣限于体波，那么对 k 的积分可以局限于没有面波极点的实 k 轴的一部分上。现在我们讨论这一数值方法的一个特例，它叫做反射率法。

参照图 9.7，假定深度 h 处一点源所产生的波在接收点看来表现为从深度 z_m 和 z_n 之间某些构造反射的。例如，在地球内，这可能是一个高的速度梯度区，它可用很多薄均匀层来模拟。

用运动-应力向量法，我们已看到震源在 $z=h$处是以$\boldsymbol{f}(k,z,\omega)$ 的不连续性来处理的，这里$\boldsymbol{f}$ 的分量是位移和牵引力的多次变换的分量。如果源与方位(ϕ)有关系，我们就可看到从 ϕ 到 m 的变换是必要的，每一m的分量可解出，且$\boldsymbol{f}(k,\varphi,z,\omega)$ 包含着对m的求和。然而，在实际中仅有几项是必要的（对双力偶源，$-2\leqslant m\leqslant 2$)。对一般取向的剪切位错，$\boldsymbol{f}$ 的不连续性已由Hudson (1969)叙述过。

如果震源是位于一无限均匀的并和层 s 具有同样弹性参量的

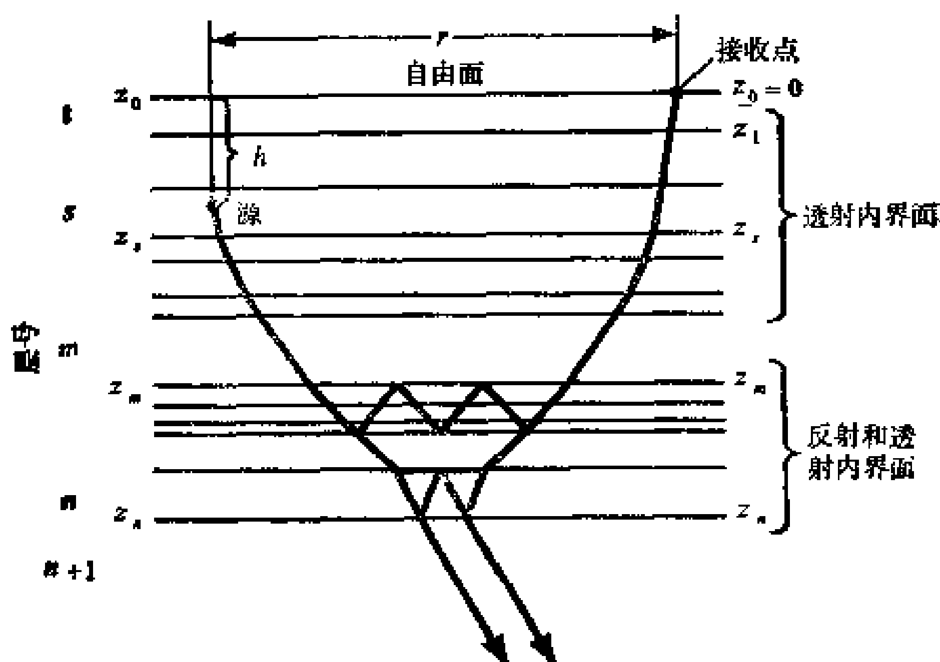


图 9.7

反射率法。深度 h 处一点源位于层 s 中。对深度在 z_m 和 z_n 间的介质，体波和构造相互作用，求在自由表面上 r 范围内合成体波的位移。由于在这两个深度之间利用了传播矩阵，保留了感兴趣的构造中产生的所有的多次反射，例如，在层 n 中示出的 P 首波和 S 波。正文中只描述了这些波，即离源向下为 P 波并向上至接收点仍为 P 波，源以上构造的影响在概念上很容易包括进去

整个空间中，则对源以下求得下行波的运动-应力向量将是不难的。由于我们的兴趣在于反射构造以上区域中传播的 P 波振型，我们将仅仅考虑 P-SV 问题。前面有 $\boldsymbol{f}=\boldsymbol{F}\boldsymbol{w}$，其中 $\boldsymbol{F}=\boldsymbol{F}(z)$ 是对每一层中定义的层矩阵[见(5.65)]，$\boldsymbol{w}$ 是对 $\boldsymbol{F}$ 的列加权的向量。一般情况下在每一层中 $\boldsymbol{w}$ 的四个分量是常数，并分别给出层中下行的 P、下行的 SV、上行的 P、上行的 SV 各波的振幅。有源的层不同于所有其它的层，其它层中 $\boldsymbol{w}_s$ 取两个值，一个值适合于 $z<h$（有附加的离开源的上行波），另一个值适合于 $z>h$（有附加的下行波）。从(5.65)得到，对离源下行的 P 波，其运动-应力向量仅仅由矩阵 $\boldsymbol{E}$ 的第一列乘以相位因子 $\exp[i\omega\xi_s(z-h)]$，再乘以和 h 处 $\boldsymbol{f}$ 的不连续性有关的标量 $P^{\wedge}$ 给出。我们需从问题

的传播部分入手的正是这个向量 $\boldsymbol{f}^{\lambda P}$，

$$\boldsymbol{f}^{\lambda P}=\boldsymbol{f}^{\lambda P}(k,m,z,\omega)=P^{\lambda}\begin{pmatrix} \alpha_s P \\ \alpha_s\xi_s \\ 2\,i\omega\rho_s\alpha_s\beta_s^2 p\xi_s \\ i\omega\rho_s\alpha_s(1-2\,\beta_s^2 p^2) \end{pmatrix}$$

$$\times\exp[i\omega\xi_s(z-h)]. \tag{9.10}$$

标量 P^{λ} 包括了震源谱和任意的方位效应。因为我们的主要兴趣是位移，我们将不继续写出运动-应力向量的最后两个分量。

将这个波附加到层 m 底部的下行 P 波上，我们将这下行波乘以透射系数和垂直相位因子，对我们感兴趣的在 z_m 和 z_n 之间叠层上入射的运动，得到

$$\begin{pmatrix} \alpha_m p \\ \alpha_m\xi_m \end{pmatrix}\left(\prod_{i=s}^{m-1}\grave{P}\grave{P}_i\right)\exp\left[i\omega\left(\sum_{j=s+1}^{m}\xi_j Th_j\right)\right]$$

$$\times P^{\lambda}\exp[i\omega\xi_s(z_s-h)].$$

对这个叠层，令 P-P 反射系数以 $\{\grave{P}\acute{P}\}_n^m$ 表示，并对转换的 $(P\to S)$ 和透射的震相给以类似的符号。为求得这个系数，我们来研究对均匀层中已知的(见补充 9.1) 传播矩阵 $\boldsymbol{P}(z_m,z_n)$。记住如下性质：

$$\boldsymbol{f}(z_m)=\boldsymbol{P}(z_m,z_n)\boldsymbol{f}(z_n), \tag{9.11}$$

我们以下式代换：

$$\boldsymbol{f}(z_m)=\boldsymbol{E}_m\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \{\grave{P}\acute{P}\}_n^m \\ \{\grave{P}\acute{S}\}_n^m \end{pmatrix}\quad\text{和}\quad\boldsymbol{f}(z_n)=\boldsymbol{E}_{n+1}\begin{pmatrix} \{\grave{P}\grave{P}\}_n^m \\ \{\grave{P}\grave{S}\}_n^m \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{9.12}$$

相位的参考值，在这里对反射系数取为 z_m，对透射系数取为 z_n，这就是(9.12)中出现的矩阵 $\boldsymbol{E}$ [因为 $\boldsymbol{E}_m=\boldsymbol{F}_m(z_m)$ 以及 $\boldsymbol{E}_{n+1}=\boldsymbol{F}_{n+1}(z_n)$，得自(5.65)]。(9.12) 中第一个方程包含了我们的假设，即仅在叠层上入射的波是下行的 P 波，同时(9.12)的第二个

方程表明在 z_n 以下的半空间中没有上行波。由于将运动-应力向量的这些形式代进(9.11)，就给出了含四个未知数的四个标量方程，我们即可解出有意义的特定的未知数，如$\{\grave{P}\acute{P}\}_n^m$。Červený (1974)和Kind(1976)已给出了详细的讨论(也见补充 9.6)。在层 m 底部的上行 P 波为

$$\begin{pmatrix} \alpha_m p \\ -\alpha_m \xi_m \end{pmatrix}\left(\prod_{j=s}^{m-1} \grave{P}\grave{P}_j\right)\exp\left[i\omega\left(\sum_{j=s+1}^{m} \xi_j T h_j\right)\right]$$

$$\times P^{\lambda}\{\grave{P}\acute{P}\}_n^m \exp[i\omega\xi_s(z_s-h)].$$

随后，将这个运动作为 P 波附加到自由表面上，得到

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 p \\ -\alpha_1 \xi_1 \end{pmatrix}(\text{积})\times\exp[i\omega(\text{和})]\{\grave{P}\acute{P}\}_n^m P^{\lambda}, \tag{9.13}$$

其中

$$\begin{aligned} \text{积} &= \left(\prod_{j=s}^{m-1}\grave{P}\grave{P}_j\right)\times\left(\prod_{j=1}^{m-1}\acute{P}\acute{P}_j\right), \\ \text{和} &= \left(\sum_{j=s+1}^{m}\xi_j T h_j\right)+\left(\sum_{j=1}^{m}\xi_j T h_j\right)+\xi_s(z_s-h). \end{aligned} \tag{9.14}$$

必须修正自由表面对位移(9.13)的影响，这个修正是将$z=0$处向下反射的P波和S波与上来的P波相加。在问题 5.6 中给出了这个修正，最后，我们可阐明在接收点处运动应力向量的位移分量。它们是

$$\begin{pmatrix} u_r(k,m,0,\omega) \\ u_z(k,m,0,\omega) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4\alpha_1\beta_1^2 p\xi_1\eta_1 \\ -2\alpha_1\xi_1(1-2\beta_1^2p^2) \end{pmatrix}$$

$$\times\frac{\text{积}\times\exp[i\omega\,\text{和}]\times\{\grave{P}\acute{P}\}_n^m\times P^{\lambda}}{(1-2\beta_1^2p^2)^2+4\beta_1^4p^2\xi_1\eta_1}. \tag{9.15}$$

补充 9.1

SH 和 *P-SV* 问题的传播矩阵

我们在Love 波和Rayleigh 波的章节中引入了传播矩阵(7.2 节)。我们注意到，质点运动随深度而衰减，因而，处理 $e^{\pm\gamma z}$ 和 $e^{\pm\nu z}$ 是方便的，其中（对大部分）γ 和 ν 是实数。此外，对 P-SV，在位移和牵引力的垂直分量和水平分量之间可清楚地辨认出 $\pi/2$ 的相移（见(7.25)-(7.27))，所以，r_1，r_2，r_3，r_4 是实数。虽然对体波这最后的方程也是正确的，但符号 γ，ν 是不便的，这是因为 γ 和 ν 变成了负的虚数。还要注意（对均匀波），在位移分量之间或在牵引力分量之间没有相移，所以 r_1，r_2，r_3，r_4 不可能都是实数。简而言之，最好是处理 5.4 节导出的（对平面波）运动应力向量以及处理慢度 p，ξ，η，而不是处理水平波数 k 和衰减常数 γ 与 ν。

对远场的 SH 波，在柱坐标（r，φ，z）中我们用下式

$$\boldsymbol{f}=\boldsymbol{f}(k,m,z,\omega)=\boldsymbol{f}(\omega p,m,z,\omega)=\begin{pmatrix}u_\phi(\omega p,m,z,\omega)\\ \tau_{\phi z}(\omega p,m,z,\omega)\end{pmatrix}. \quad (1a)$$

基本的水平波函数是 $e^{im\varphi}d[J_m(kr)]/dr$。因为它忽略了垂直于 φ 方向运动的水平分量，所以这个表示式是近似式。一精确的方法是建立在位移 $\boldsymbol{u}=U(k,m,z,\omega)\ \boldsymbol{T}_k^m(r,\varphi)$ 和牵引力$=T(k,m,z,\omega)\ \boldsymbol{T}_k^m(r,\varphi)$ 的基础上的，其中 $\boldsymbol{T}_k^m$ 是（7.117）中定义的面谐向量。对近场和长时间都有效的精确表达式，我们取

$$\boldsymbol{f}=\begin{pmatrix}U(\omega p,m,z,\omega)\\ T(\omega p,m,z,\omega)\end{pmatrix}. \quad (1b)$$

在(1a)或(1b)中，有关的方程 $\boldsymbol{f}=\boldsymbol{F}\boldsymbol{w}$、$\boldsymbol{F}=\boldsymbol{E}\boldsymbol{\Lambda}$ 已在 5.4 节中叙述过，层矩阵 $\boldsymbol{F}$ 及其逆矩阵已在(5.63)—(5.64)中明确给出。若 z 和 z_0 是在同一(均匀的)层中，传播因子为

$$\boldsymbol{P}(z,z_0)=\boldsymbol{F}(z)\boldsymbol{F}^{-1}(z_0)=$$

$$\begin{pmatrix}\cos[\omega\eta(z-z_0)] & -\dfrac{1}{\omega\mu\eta}\sin[\omega\eta(z-z_0)]\\ \omega\mu\eta\sin[\omega\eta(z-z_0)] & \cos[\omega\eta(z-z_0)]\end{pmatrix}, \quad (2)$$

如果这些深度是在由均匀紧密连接层组成的结构内的不同层中，则可

用(7.44)。

对远场的 P-SV，我们用 u_r，u_z，u_{rz}，u_{zz} 作为 $\boldsymbol{f}$ 的分量。因而 $\boldsymbol{F}$ 可由(5.65)求得，其逆矩阵可由(5.67)求得。于是，传播因子（当 z 和 z_0 在同一均匀层内时）为

$$\boldsymbol{P}(z,z_0)=$$

$$\begin{pmatrix} 2\beta^2p^2C_\xi+(1-2\beta^2p^2)C_\eta & \frac{ip}{\xi}(1-2\beta^2p^2)S_\xi-2i\beta^2p\eta S_\eta \\ 2i\beta^2p\xi S_\xi-\frac{ip}{\eta}(1-2\beta^2p^2)S_\eta & (1-2\beta^2p^2)C_\xi+2\beta^2p^2C_\eta \\ -4\omega\rho\beta^4p^2\xi S_\xi-\frac{\omega\rho}{\eta}(1-2\beta^2p^2)^2S_\eta & 2i\omega\rho\beta^2p(1-2\beta^2p^2)[C_\xi-C_\eta] \\ 2i\omega\rho\beta^2p(1-2\beta^2p^2)[C_\xi-C_\eta] & -\frac{\omega\rho}{\xi}(1-2\beta^2p^2)^2S_\xi-4\omega\rho\beta^4p^2\eta S_\eta \end{pmatrix.$$

$$\left.\begin{matrix} \frac{p^2}{\omega\rho\xi}S_\xi+\frac{\eta}{\omega\rho}S_\eta & -\frac{ip}{\omega\rho}[C_\xi-C_\eta] \\ -\frac{ip}{\omega\rho}[C_\xi-C_\eta] & \frac{\xi}{\omega\rho}S_\xi+\frac{p^2}{\omega\rho\eta}S_\eta \\ 2\beta^2p^2C_\xi+(1-2\beta^2p^2)C_\eta & 2i\beta^2p\xi S_\xi-\frac{ip}{\eta}(1-2\beta^2p^2)S_\eta \\ \frac{ip}{\xi}(1-2\beta^2p^2)S_\xi-2i\beta^2p\eta S_\eta & (1-2\beta^2p^2)C_\xi+2\beta^2p^2C_\eta \end{matrix}\right), \tag{3}$$

这里将1列和2列写在3列和4列的上面。$C_\xi=\cos[\omega\xi(z-z_0)]$，$C_\eta=\cos[\omega\eta(z-z_0)]$，$S_\xi=\sin[\omega\xi(z-z_0)]$，$S_\eta=\sin[\omega\eta(z-z_0)]$。

注意，这里(3)中的实数和虚数项有纵横交错的排列形式。这些矩阵之积有同样的形式，所以，如果 p 是实数，只要用实变量就很容易设计出传播因子〔如(7.44)〕所需要的计算程序。列在(2)和(3)内的某些项为 $O(\omega)$，而另一些项为 $O(\omega^{-1})$。这个频率的依赖关系可通过对质点速度和牵引力的处理而消除（而不是质点位移和牵引力）。

这就是多次变换的解，它是对 m（一般而言 P^λ 和 m 有关）的求和以及对 k 和 ω 求积分。因此，从(7.131)的计算，我们得到在频率域中的解为

$$u(r,\phi,0,\omega)=\frac{1}{2\pi}\sum_{m=-\infty}^{\infty}\int_0^{\infty}k[u_r(k,m,0,\omega)S_k^m$$

$$-iu_z(k,m,0,\omega)R_k^m]dk.$$

对体波的 k 值，由于源和接收点之间具有一定的水平距离，所以 S_k^m 的 $\hat{\phi}$ 分量(见(7.117))是可忽略的，因此，(9.15)可通过下式求积分：

$$u(r,\phi,0,\omega)=\frac{1}{2\pi}\sum_{m=-\infty}^{\infty}\int_0^{\infty}\omega^2 p\left[u_r\frac{d}{d(\omega pr)}J_m(\omega pr)\hat{r}\right.$$

$$\left.+iu_zJ_m(\omega pr)\hat{z}\right]e^{im\phi}dp, \qquad (9.16)$$

随后对 ω 求积分再还原为 $u(r,\phi,0,t)$。

实际上，在 (9.16) 中仅用了有限范围的 p 值，Fuchs 和 Müller (1971) 建议取 $0\leqslant p\leqslant 1/\alpha_{max}$，其中 α_{max} 是反射区以上的层内最快的 P 波速度。由此得到，和总是正的，这就避免了反射区上部的非均匀波。

反射范围本身仅以 $\{\grave{P}\acute{P}\}_n^m$ 出现在计算中，我们将立刻看到一个简单例子，以说明在 z_m 到 z_n 的范围内所有的多次反射的射线都自然而然地被考虑了。当然，首先我们展示一段合成地震图，这是对一特定的地壳结构，其表面有爆破源，通过反射率法而得到的。其结构如图 9.8 a 所示，Fuchs 和Müller(1971)已得到了如图 9.8 c 所示的合成图，用以反映低速通道的下边界和这个通道以下的各层。这个解释由图 9.8 b 的折合走时曲线给出。(如果 t 相对 r 作图而不是相对折合时间 $t-r/6$作图，则垂直刻度将分布于大约 26 秒，而不是如所示的 6 秒，并且可能失掉到时之间的细节。)因为由走时曲线可得到射线参量，即优势波将以此射线参量到这接收点，所以这个曲线也导出积分(9.16)所需要的 p 值范围。事实上，它是走时曲线的斜率 [见问题 9.2(i)]。由于这个斜率范围大约从 1/8.15 到 1/6，因此在图 9.8 c 积分中用的 p 值

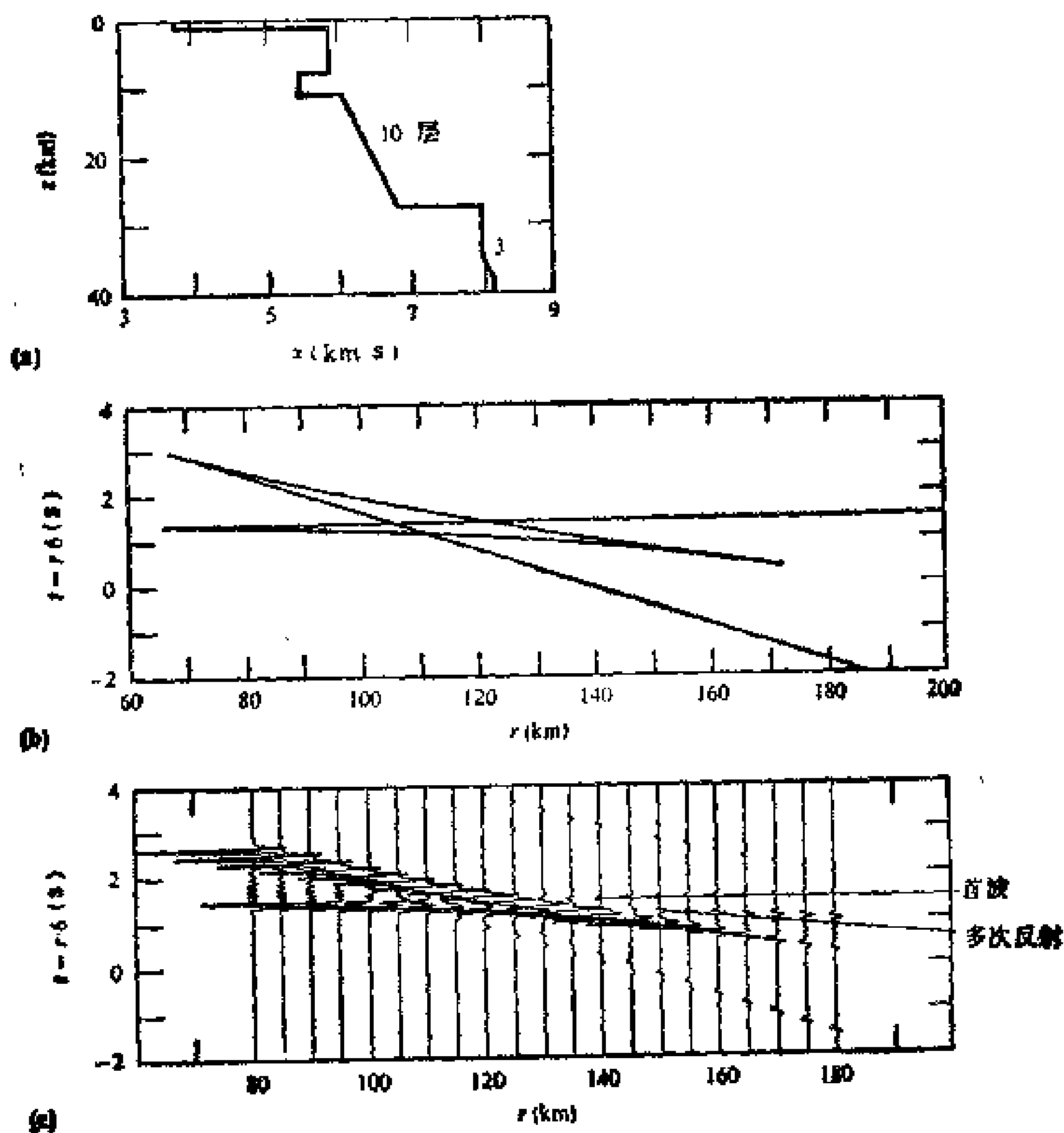


图 9.8

反射率法的应用。(a) 地壳结构的一个模型。仅给出了P波速度。下地壳中（下至深度为27公里的Moho界面）的线性增加，事实上是以10个均匀层模拟的，Moho界面以下一个薄的线性区是以3个层模拟的。(b) 对 (a) 中P波的折合走时曲线，其慢度小于1/6秒/公里。(c) 相应于 (b) 的合成地震图（位移的垂直分量），它是通过反射率法得到的。最优势的波是在最下部地壳中在速度梯度范围内改变了一次方向的波以及在Moho界面上广角反射的波。P_n是很小的，但在120公里以外它最早到达，如果地壳结构是准确的，在地球中将易于识别它。在150—180公里的范围内，在折合走时1秒之内，可看到明显的多重性，可识别为这些波在最下部地壳中改变了两次方向，并从低速带下面反射一次。恰好来自低速带下边界以下的“首波”，在超过大约140公里时是很弱的，因为有正的速度梯度。所有波中到达最晚的是慢度为1/8.15（像主要的首波，P_n）的一个震相。这是将 (9.16) 中的积分截成对p的有限区间的结果
[引自 Fuchs and Müller(1971)中的图7]

范围是 $1/8.15 \leqslant p \leqslant 1/6$。计算中最费时间的部分是对不同的 p 值和 ω 值计算其 $\{\grave{P}\acute{P}\}_n^m$。然而，这个步骤仅需作一次，因为此项与 r 无关。Kind(1976)已给出了一个最快程序。

用一不同的时间尺度，在图 9.9 中较细地表示出了脉冲的形状。还给出了反射率法和在 9.1 节中所描述的 Cagniard 方法的对比，其中某些不一致性是明显的。大概对随后的 Cagniard 反演，如果有足够多的广义射线可供选择，这些不一致性可能消除。Fuchs 和 Müller (1971) 发现，对图中(a)，(b)，(c) 的各个部分，其计算时间之比为 20 比 5 比 1，所以，反射法比仅保留和叠层中每一边界一次相互作用的方法要长得多。

为结束关于反射率法的叙述，让我们证实这样一个事实，像 $\{\grave{P}\acute{P}\}_n^m$ 这样的项包含了在 z_m 和 z_n 之间所有的多次反射。尽管一般情况下这证明将十分冗长，但主要思路可从 SH 波的一个简单例子看出。

在图 9.10 中，我们给出了在两个半空间之间的一单层。SH 的运动应力向量为(见补充 9.1)

$$\boldsymbol{f}=\begin{pmatrix} u_\phi(k,z,\omega) \\ \tau_{\phi z}(k,z,\omega) \end{pmatrix},$$

对这个 SH 问题，相应于(9.12)的方程为

$$\boldsymbol{f}(z_1)=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i\omega\mu_1\eta_1 & -i\omega\mu_1\eta_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ \{\grave{S}\acute{S}\}_2^1 \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{f}(z_2)=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i\omega\mu_3\eta_3 & -i\omega\mu_3\eta_3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \{\grave{S}\grave{S}\}_2^1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

将这些代入 $\boldsymbol{f}(z_1)=\boldsymbol{P}(z_1,z_2)\boldsymbol{f}(z_2)$ 并利用 SH 的传播矩阵（补充 9.1，方程(2)），我们得到对于 $\{\grave{S}\acute{S}\}_2^1$ 和 $\{\grave{S}\grave{S}\}_2^1$ 两个未知数的两个方程。反射解为

$$\{\grave{S}\acute{S}\}_2^1=\frac{\left(C-\dfrac{i\mu_3\eta_3 S}{\mu_2\eta_2}\right)-\left(\dfrac{\mu_3\eta_3}{\mu_1\eta_1}C-\dfrac{i\mu_2\eta_2 S}{\mu_1\eta_1}\right)}{\left(C-\dfrac{i\mu_3\eta_3 S}{\mu_2\eta_2}\right)+\left(\dfrac{\mu_3\eta_3}{\mu_1\eta_1}C-\dfrac{i\mu_2\eta_2 S}{\mu_1\eta_1}\right)}, \tag{9.17}$$

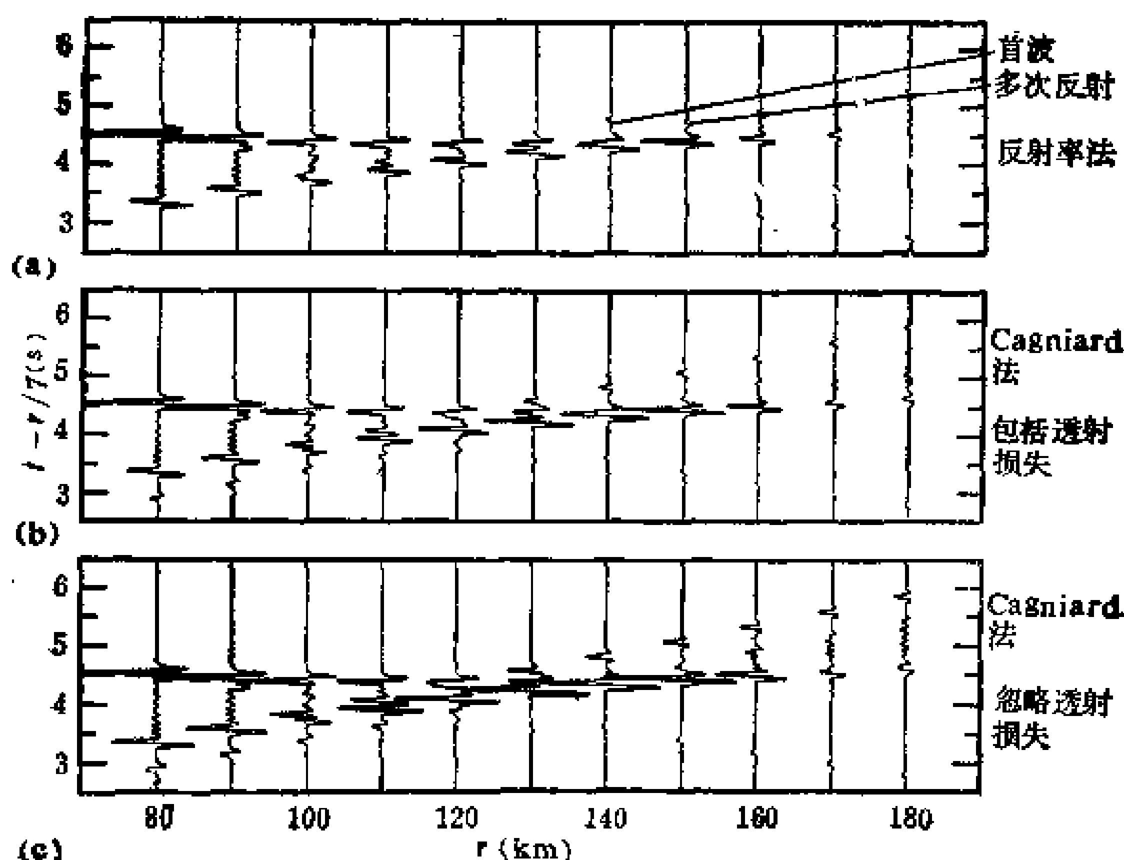


图 9.9

对9.8a中给定的地壳结构，反射法和 Cagniard 方法之间的对比。(a) 从图9.8c选出的地震图以详细地表示出由反射率法得到的脉冲形状。这里的折合走时用 1/7 秒/公里的慢度。(b) 在叠层中对每个一次作用都利用(9.9)式，并重复 (a) 的计算。(c) 重复 (b) 中的计算，并使所有（向下至每一个反射的内界面和由此界面向上）的透射因子等于1。即(9.2)和(9.3)中的乘积项仅以 $\grave{P}\acute{P}$。来近似。在 (b) 和 (c) 中的计算还包括上部地壳的反射，它在 (a) 中被忽略了，用这个可解释 120 公里以外较早时间的脉冲形状的某些差别。在 (a) 和 (b) 间其它的一些差别也是明显的，特别是在 100 公里和110 公里处、在折合时间 4 秒附近。地震图的这一部分主要是受恰在低速带以下的地壳结构所控制。在这个区域中速度随深度增加引起了多次反射，这在 (b) 中曾被忽略，但在 (a) 中自然而然地保留着。在大距离处，如 140—180 公里，在 (a) 中标出的首波和多次反射波和 (b) 中计算所得的振幅是十分不同的（也见图9.8c）〔引自 Fuchs and Müller(1971)中的图 8〕

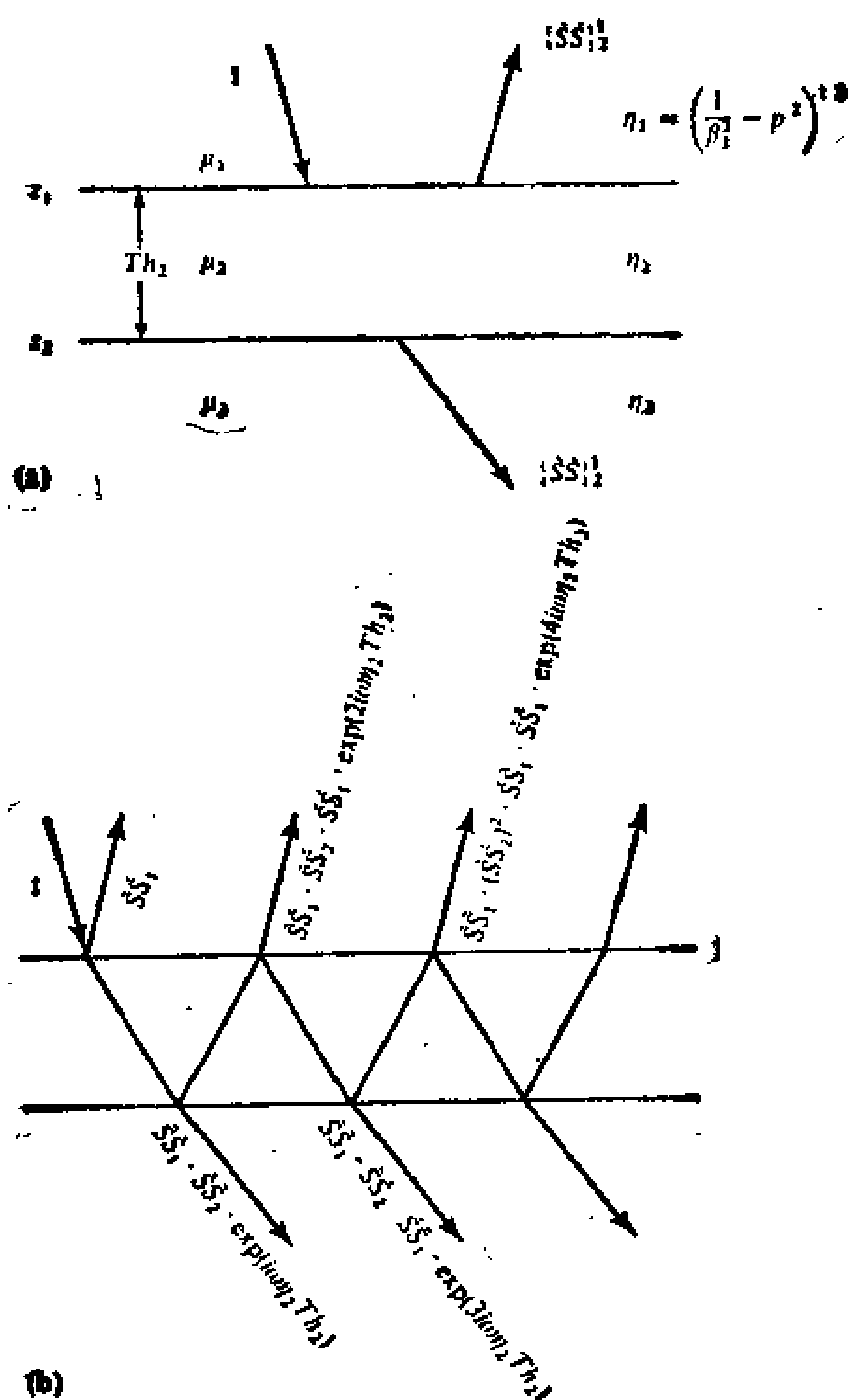


图 9.10

广义 SH 射线的无限族，它相当于通过传播矩阵对两个边界之间的一个单层所得到的反射和(或)透射。(a) 该层的参量。全反射包含于$\{\acute{S}\acute{S}\}_1^1$之内。(b) 广义射线族，在正文中表明相当于(a)。

其中 $C=\cos(\omega\eta_2Th_2)$， $S=\sin(\omega\eta_2Th_2)$。

图 9.10 b 所示的是多次反射系， 这 可能从对问题的因果关系来预测。即，从层的顶部可预计有一反射 $\grave{S}\acute{S}_1$，随后是从层的底部产生波的一次反射 $\grave{S}\grave{S}_1\cdot\grave{S}\acute{S}_2\cdot\acute{S}\acute{S}_1e^{2i\omega\eta_2Th_2}$， 等等。考 虑 到垂直传播的相位因子，整个的反射将给出如下：

$$\{\grave{S}\acute{S}\}_2^1=\grave{S}\acute{S}_1+\grave{S}\grave{S}_1\left[\sum_{i=1}^{\infty}(\grave{S}\acute{S}_2e^{2i\omega\eta_2Th_2})^i(\acute{S}\grave{S}_1)^{i-1}\right]\acute{S}\acute{S}_1 \tag{9.18}$$

$$=\grave{S}\acute{S}_1+\frac{\grave{S}\grave{S}_1\cdot\grave{S}\acute{S}_2\cdot\acute{S}\acute{S}_1\cdot e^{2i\omega\eta_2Th_2}}{1-\grave{S}\acute{S}_2\cdot\acute{S}\grave{S}_1\cdot e^{2i\omega\eta_2Th_2}}. \tag{9.19}$$

这是关键的一步，一无限几何级数已由一个简单而精确的和表达式所代替。(9.18) 中的每一项相应于一特定的射线， 并且多次反射的整个无限族显然包括在(9.19)中。为计算(9.19)，对每个反射和(或)透射我们可用(5.32)，求得

$$\{\grave{S}\acute{S}\}_2^1=\left(\frac{\mu_1\eta_1-\mu_2\eta_2}{\mu_1\eta_1+\mu_2\eta_2}\right)$$

$$+\frac{\dfrac{2\mu_1\eta_1}{\mu_1\eta_1+\mu_2\eta_2}\quad\dfrac{\mu_2\eta_2-\mu_3\eta_3}{\mu_2\eta_2+\mu_3\eta_3}\quad\dfrac{2\mu_2\eta_2}{\mu_1\eta_1+\mu_2\eta_2}\quad e^{2i\omega\eta_2Th_2}}{1-\dfrac{\mu_2\eta_2-\mu_3\eta_3}{\mu_2\eta_2+\mu_3\eta_3}\quad\dfrac{\mu_2\eta_2-\mu_1\eta_1}{\mu_1\eta_1+\mu_2\eta_2}\quad e^{2i\omega\eta_2Th_2}},$$

此式可精确地简化成(9.17) （进行一些代数运算之后）。这样，我们就证明，对双内界面由传播因子导出的反射可写成无穷广义射线的族。

如果存在两个以上的内界面， 由于 P 和 SV 之间转换 的复杂性，很清楚，包括无数射线的广义射线系在传播因子导出的反射中可能是存在的，例如在$\{\grave{P}\acute{P}\}_n^m$中。Spencer (1960, 1965)指出了研究广义射线的主要优点，即无穷级数中的每一项和频率或 Laplace 变换的变量 s 有一非常简单的关系。例如，在 (9.18)中我们注意到 $\omega\eta_2=\omega(1/\beta_2^2-p^2)^{1/2}=is(1/\beta_2^2-p^2)^{1/2}$， 并且 s 仅

仅通过指数函数写进每一个广义射线中。因此，Cagniard 方法可以用来求得每一个广义射线的贡献（在时间域中）。(9.15) 和 (9.17) 中和 ω 的关系是更加复杂的。Cagniard 方法不能直接用于整个多次反射系的求和中。而 Hron（1971，1972）指出了如何才能求得广义射线的亚族，以使其所有的射线均可用同样的 Cagniard 路径，并且为算出包含在精确（即导出的传播因子）解之内的广义射线，Cisternas 等（1973）给出了系统的方法。

Fuchs 和他的同事们在地壳研究中发展了反射率法。Orcutt 等(1976)应用这个方法研究了东太平洋隆起的结构。利用一个和球形地球模型（9.6 节）具有同样走时的展平地球模型，Müller (1973)曾用反射率法去解释穿过地核的长周期体波，并且 Müller 和 Kind(1976)已分析了全球的长周期体波的地震图。

在一均匀叠层中，关于波传播的描述，至此已为我们引入了两个不同的计算步骤。然而，不管采用的是 Cagniard 方法（对很多广义射线）还是 Fuchs 方法（用其双重积分），对深入认识在结构中传播的波，有一个技巧，一次又一次地被证明是有效的，即判明在弹性介质中特定的波与复射线参量平面中一定的波函数性质的关系的能力。例如，我们已考察了鞍点、分支切割和 p 平面中的极点并且已得到它们和射线路径、首波及面波的关系。对一均匀叠层，在 p 平面中分析特定的广义射线是相当简单的。这主要是因为一特定射线可传播的水平距离，往往总是射线参量的恒增函数（见问题 9.2）。然而，在本章的余下部分，我们将考察如下介质中的一些波，在此介质中每一层内，其地震波速和密度可以是连续变化的。首先，可导致这样一个现象，射线在一给定的层内完全转向。图 9.11 中给出了一个例子。其次，我们将发现，一特定射线（在非均匀叠层中传播）可达到的水平距离更经常地是射线参量的恒减函数。这距离也可随 p 而增加，并且(对一给定的距离 Δ)可存在两种类型的射线(即，$d\Delta/dp$ 小于零和大于零)。

在 9.4 节中，这些复杂性使我们要求几种至今在分析均匀层中的波时并不需要的数学方法。然而，在复射线参量平面中波函数的性质仍是最重要的。为这部分材料作准备，我们复习一些基本的射线理论。

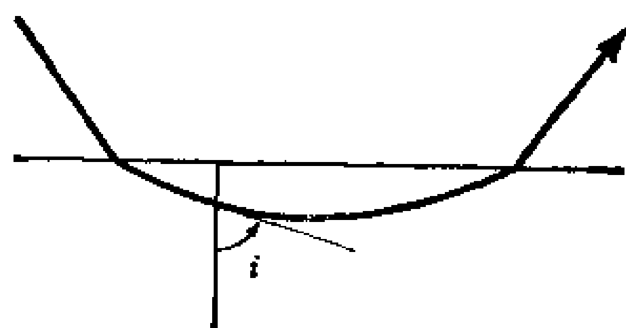


图 9.11

所示的射线在非均匀层内转向。在某一点若射线水平行走，则此点即为所说的转折点。沿射线应用Snell定律$\sin i/\alpha=p$（常数）。对一转折点，由于$i=90°$，如果z是转折点的深度，则将能满足方程$1/v(z)=p$

至此，我们强调的是平面成层介质，其中射线参量 p 是 $\sin i/\alpha$（i 和速度 α 两者均和深度有关）。通常要求将走时和距离表示成p的函数(见问题 9.2)。对 p 波其结果为

$$时间(p)=\int\frac{dz}{\alpha(z)\cos i(z)}=\int(1-p^2\alpha^2)^{-1/2}\frac{dz}{\alpha}=\int\frac{dz}{\alpha^2\xi}, \tag{9.20}$$

$$距离(p)=\int\tan i\ dz=\int\frac{p}{\xi}dz,$$

其中

$$\xi=\xi(p,z)=\left(\frac{1}{\alpha^2(z)}-p^2\right)^{1/2}=\frac{\cos i}{\alpha}$$

并且在射线穿过的深度范围上进行积分。下一节将主要叙述球形成层介质，其中射线参量 p 是 $(r\sin i)/\alpha$，对这样的介质，地震学中的射线理论应用得最为广泛。

9.3 地震学中经典的射线理论

从一点源辐射到远场的高频波，在第四章中我们已得到了其位移的射线理论解。沿射线路径的几何扩散和走时等重要概念，Christian Huygens 和 Pierrer de Fermat 大约在三百年前就已很好地弄清楚了。我们的兴趣是在横向均匀的介质中，当接收点位置变化时射线的特殊性质。例如，对一观测到的特定的体波，如果画出走时 T 随距离的变化，我们怎样才能说波是从地球中某个内部不连续面上反射来的？或者我们如何才能找到有一低速带的证据？

从图 9.12 开始，我们来看看在一上地幔模型中，由于表面震源而出现的 S 波射线。显然，在一给定的接收点可到达好几条射线，并且对一定的距离范围此走时函数（图 9.12c）是多值的。然而，沿走时曲线的每一点其斜率是单值的，其值从 A 到 B，B 到 C 等都递减。这就提出了一个有用的独立变量。从图 5.2 得到，这个斜率 $dT/d\Delta$ 是斜向传播波的水平慢度，它也就是射线参量 p。（水平距离的无量纲单位是 Δ 而以长度为单位时是 $r\Delta$。）

现在要考虑距离函数如何依赖于 p。从图 9.12c 清楚地看出，对分支 BC，距离和斜率同时减小，但沿 AB 和 CD，当斜率减小时距离却是增加的。这在图 9.13 中明显地表示出了，并且点 B 和 C 附有一些特殊意义。注意，在这些点上 $d\Delta/dp$ 的符号改变了，而 $d\Delta/dp$ 却仍可能保持连续，以使在 C 点或在 B 和 C 点 $d\Delta/dp=0$。由于几何扩散函数 $\mathscr{R}^{-1}$ 比例于 $(d\Delta/dp)^{-\frac{1}{2}}$（见问题 4.3），所以射线理论可预测位移的奇异幅度。这是一个焦散现象，并且图 9.12 中给出了 14° 距离处的一个实例。此焦散线是射线系的包络，对如图 9.12 的震源和地球模型，三维包络是一曲面，它与地表相交为一圆。当然此处射线理论的预测是

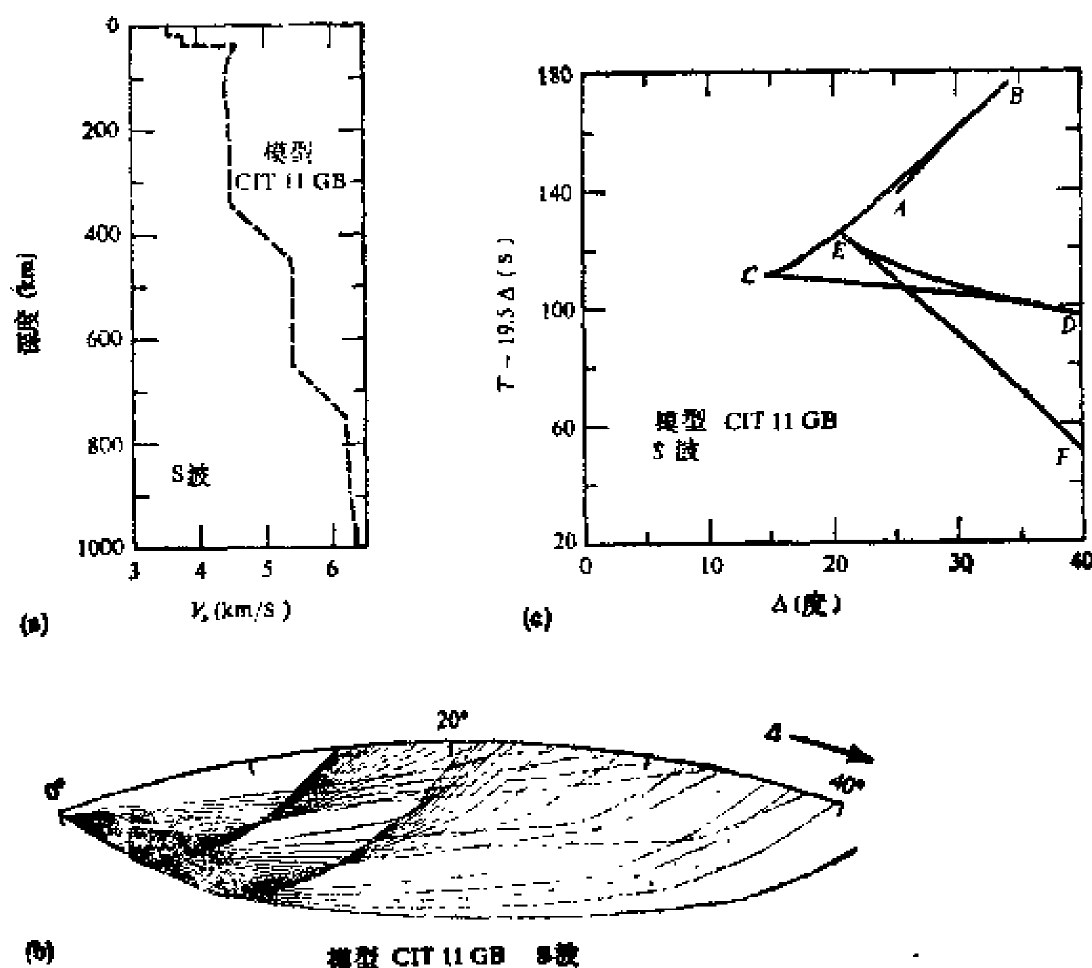


图 9.12

(a) 取自模型 CIT11GB 的上地幔S波速度。(b) 对表面上一点源，离源角从 28°起以0.5°增量增至 50° 时所算得的 S 波射线。注意，地球内源和接收点之间的距离是以地心对着的角来量度的。(c) 相应的折合走时曲线。点 C 是在(b) 中当 Δ近于 14° 时射线的强烈聚焦，而且振幅将是很大的。线AB, BC 和 CD一起构成一个三重量，两个三重量中的每一个都在地球模型中附有一个较大的速度增加(随深度)。(引自 Julian and Anderson, 1968)

不正确的，在焦散线附近其幅度可能很大（如图 9.12b 中射线的聚焦所示），而在有限频率时不具奇异性。

事实上，振幅对量 $d\Delta/dp$ 的灵敏性（用射线理论计算）造成计算上的一些困难。现在的问题是地球模型一般地是由给定的在

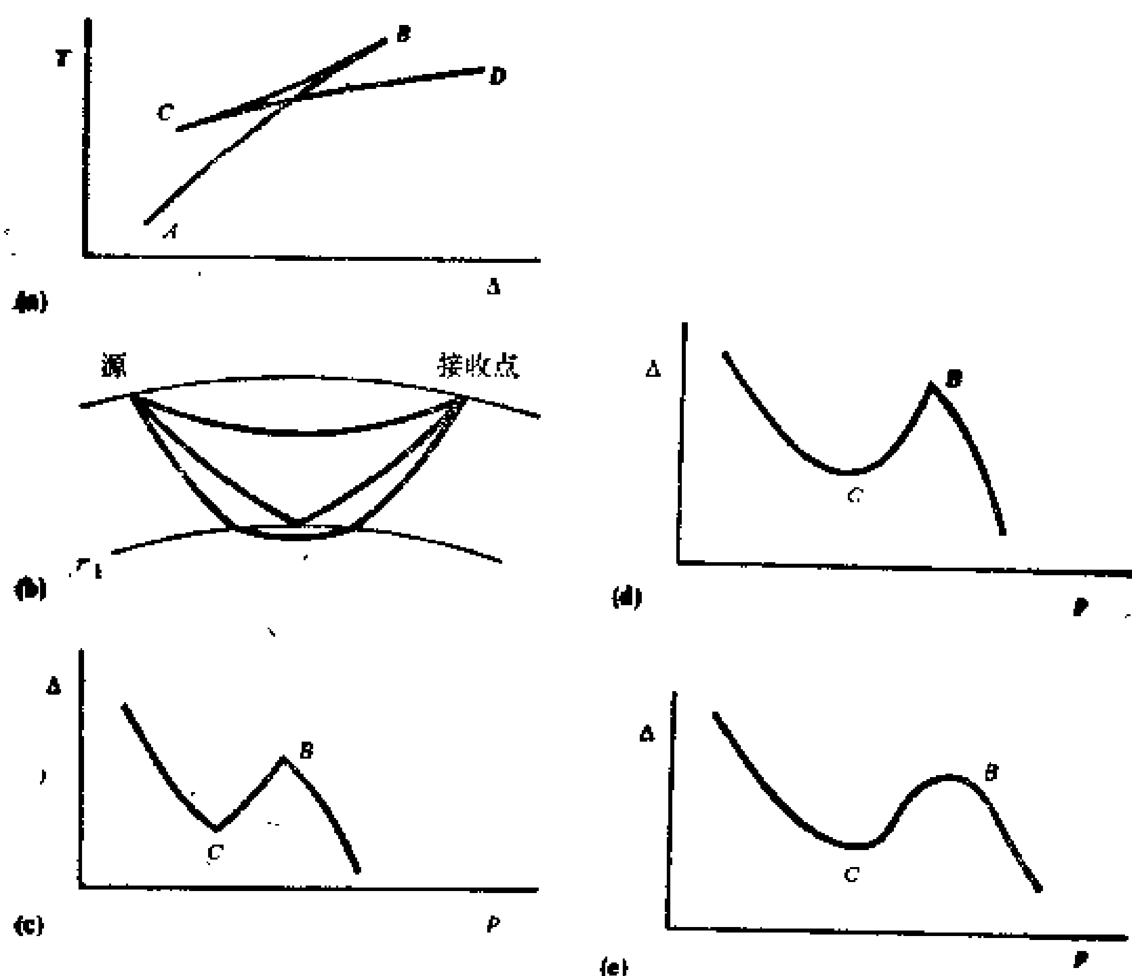


图 9.13

当速度随深度增加时，T，Δ 和 p 的特性。(a) 典型三重叠的符号。(b) 示出了三条射线，它们都有同样的 Δ。速度是假定随深度增加的，并在 r_1 处速度随深度还发生了异常的增加。这里最上面的射线可称为直达射线 (分支 AB)；然后是类似反射的射线 (分支 BC)；最后是类似首波的射线(分支 CD)。穿过 r_1 时速度剖面连续性的程度决定了当它们到达 r_1 时射线实际上改变了方向或是有较高的曲率。(c) 对穿过 r_1 速度不连续增加时的 $\Delta(p)$。注意，在 B 和 C 处 $d\Delta/dp$ 是不连续的，并且可能都不小。(由射线理论，量 $(d\Delta/dp)^{-1/2}$ 是波的幅度的一个控制因子。) (d) 对一连续的速度剖面，其中穿过 r_1 速度梯度不连续时的 $\Delta(p)$。在 C 处有 $d\Delta/dp=0$，这给出一焦散点。(e) 当速度和速度梯度两者均为连续时的 $\Delta(p)$。B 和 C 两者均为焦散点

几个不同半径处的密度 ρ 及 P 波和 S 波的速度(α和β)所规定的。而对这些不连续值之间不同的内插方法往往可导致完全不同的几何扩散值。Chapman(1971)对速度内插提出了一个三次样条函数方法，由于速度对深度的二次求导随深度是连续的，如果 $(d\Delta/dp)$是连续的，则这个连续性的程度正是所需要的。对速度随深度增加的不同类型而言，Bullen(1960) 给出了 $d\Delta/dp$ 的特性如何改变的一些实例，如图 9.13 所示。焦散效应在地震波中被广泛地观测到，在 9.4 节中叙述了波动理论的计算方法。

如果我们知道射线的长度元 ds 和半径的变化 dr 的关系为 $\cos i ds = dr$，其中 i 是该处的垂线和射线方向之间的夹角，我们就很容易导出走时 T 和距离 Δ 作为 p 的函数的公式。因此，当 P 波速度 $\alpha=\alpha(r)$时，

$$T(p)=\int\frac{ds}{\alpha}=\int\frac{dr}{\alpha(r)\cos i(r)}=\int\left(1-\frac{p^2\alpha^2}{r^2}\right)^{-1/2}\frac{dr}{\alpha}=\int\frac{dr}{\alpha^2\xi}, \tag{9.21}$$

$$\Delta(p)=\int\sin i\frac{ds}{r}=\int\frac{p\alpha}{r^2}\left(1-\frac{p^2\alpha^2}{r^2}\right)^{-1/2}dr=\int\frac{pdr}{r^2\xi},$$

这里，对垂向的慢度，我们已用了 $p=(r\sin i)/\alpha$(得自(4.45b))，和 $\xi=\xi(r)=(1/\alpha^2-p^2/r^2)^{1/2}=\cos i/\alpha$。积分是在射线通过的区域内那部分半径上进行的，因而往往发生这样的情况，即转折点作为积分限之一而出现。用 r_p 作为相应于射线参量 p 的转折点半径，可得到 $p=r_p/\alpha(r_p)$，因此(9.21)中的被积函数可具有奇异性。

由 T 和 Δ 所建立的一个量 τ，它在转折点上无奇异的被积函数，

$$\tau=\tau(p)\equiv T-p\Delta=\int\frac{\cos i}{\alpha}dr=\int\xi dr. \tag{9.22}$$

我们将发现 $\tau(p)$具有极大的用途。它出现在反演理论 (Johnson and Gilbert 1972；Bessonova et al., 1976)和波传播理论中。甚

至在射线理论中，由于关系

$$\frac{d\tau}{dp}=-\Delta(p), \tag{9.23}$$

$\tau(p)$ 也有很值得注意的性质（通过对 $\int \xi dr$ 的微分运算以及和(9.21)中的Δ进行对比可证明上式）。由此得出 τ 是 p 的单调减函数，它不像 $\Delta(p)$，所以对阐明走时曲线的三重性，它甚至是一个比 $\Delta(p)$ 更好的函数。[前面，在明确地写成褶积 $f*g=\int_0^t f(\tau) \times g(t-\tau)d\tau$ 中，我们常常用符号 τ 表示其求和的时间。因此，对一具有点源的问题，很自然要求出 Cagniard 路径作为 $\tau=pr+$ 和 (p) 的解 $p=p(\tau)$ [见(9.5)]。然而，这里的和 (p) 实际上是刚刚在(9.22)中定义过的那个新变量 $\tau(p)$。这个事实是问题9.2(b)的推论。为避免混乱，用不同的符号来表示沿 Cagniard 路径的时间是必要的，在一些问题中 τ 是专供对垂向慢度求积分之用的。]

在图 9.12 和图 9.13 中我们已看到，三重性是和随深度而增加的速度有关的。如果速度随深度迅速地减低(即 $d\alpha/dr$ 是正的并足够大)，则走时曲线表现出另外一些特有的性质。这就是图 9.14 表明的影区现象。在低速带内有一深度范围，在此范围内无转折点存在。如果在射线的底部出现转折点，那是由于沿射线当半径减小时角 i（在射线和竖直线之间)是一递增函数造成的。由于随着 r 的减小 i 决不可能增加到转折点的值(90°)，因而当低速带内的速度梯度达到使 $di/dr>0$ 的任何时候，即产生影区。由于$(r\sin i)/\alpha$ 是常数，我们得到

$$r\frac{di}{dr}=-[1-\zeta(r)]\tan i, \tag{9.24}$$

这里 ζ 是归一化的速度梯度$(r/\alpha)(d\alpha/dr)$。$di/dr>0$ 是产生影区的条件，进而可转化成 $\zeta(r)>1$，或者 $d\alpha/dr>\alpha/r$。对比图 9.14c 和图 9.14d，注意，相应于一给定的 p 值，Δ 值有两个或

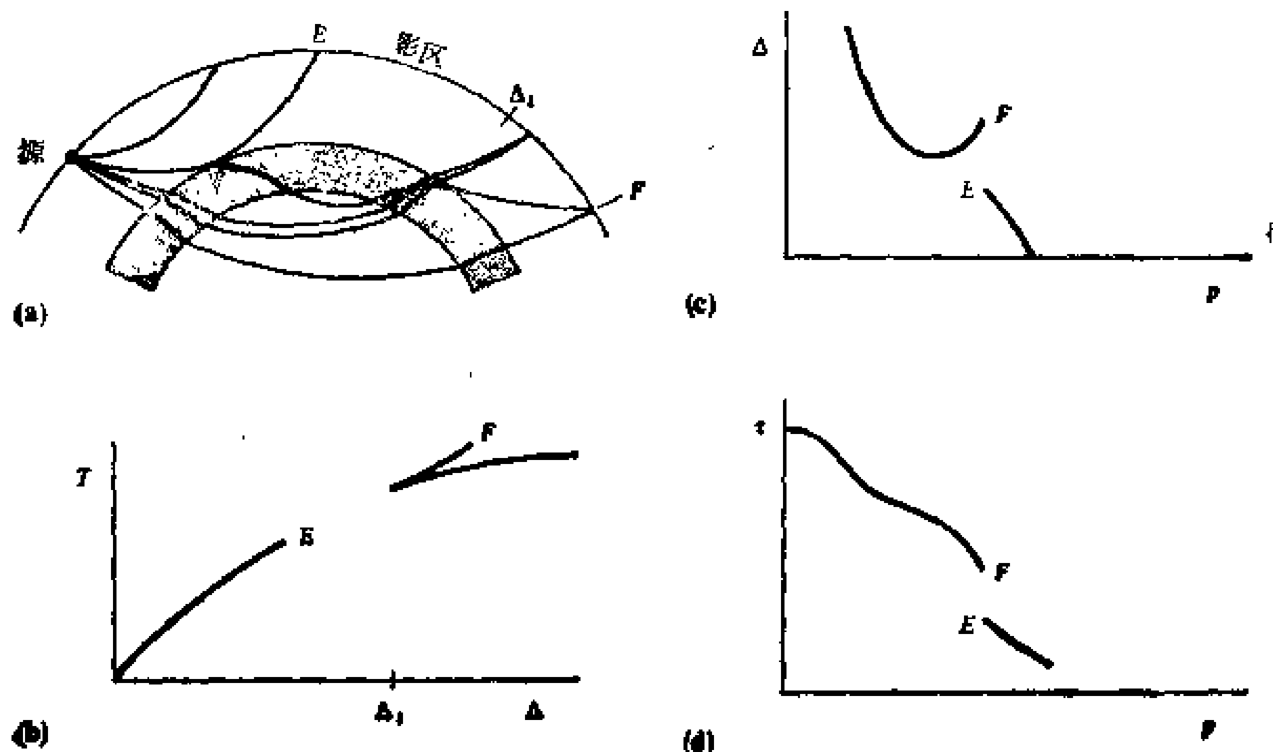


图 9.14

当速度随深度而减低时，T，Δ 和 p 的性质。(a) 一低速带（其中 $d\alpha/dr > \alpha/r$ 且无转折点）以阴影表示，在地表观测到一影区，在此影区内接收不到射线。(b) 走时曲线。对出射在 E 点的射线，低速带的上边界即为其转折点。点 F 与 E 有同样的射线参量，但却位于穿过低速带的射线上。当射线参量由其在点 F 的值稍稍减小时，距离 Δ 也减小，直到在 Δ_1 处达到焦散为止。(c) $\Delta = \Delta(p)$ 的值。这些表明此影区的另一边界实际是焦散的。(d) 对射线参量只有极微小差别的射线，低速带的上边界和下边界是转折点。因而，转折点的半径是 p 的不连续函数。若在 $\tau(p) = T - p\Delta$ 和梯度 $d\tau/dp = -\Delta(p)$ 时，也是不连续的

一个或没有，而 $T-p\Delta$ 则几乎在任何地方都刚好只有一个值。

在结束射线理论的简要评述时，需有几点说明以扩充我们第四章中有关脉冲形状的公式。回顾我们曾得到[如(4.57)]对 ξ 处的点源其 $\mathbf{x}$ 处的振幅受因子 $1/\mathscr{R}(\mathbf{x},\boldsymbol{\xi})$ 所控制。然而，沿射线从 $\boldsymbol{\xi}$ 到 $\mathbf{x}$ 传播的过程中，有几个效应可导致在远场接收到的波其频率和相位超前无关。这可引起脉冲形状的失真，这在地震资料中经常能够见到。一个实例是波以相当大的入射角入射到地球内的

一个间断面上，从面激发了一个非均匀波。如第五章所提到的，合成的相移导致入射的脉冲形状的变化，这可通过 Hilbert 变换算出。另一实例是，ξ 和 x 间的射线虽然是稳定的，但不是极小时间路径。在地震学中最重要的射线为：直达的 P 波和 S 波，它们离源向下，并当 $d^2T/d\Delta^2>0$ 时在走时曲线的一支上被接收到；PP 和 SS；以及 $SKKS$。因而 SS 有一极小极大时间路径（见图 9.15），这是因为相对于和震源及接收点处于同一平面内地表

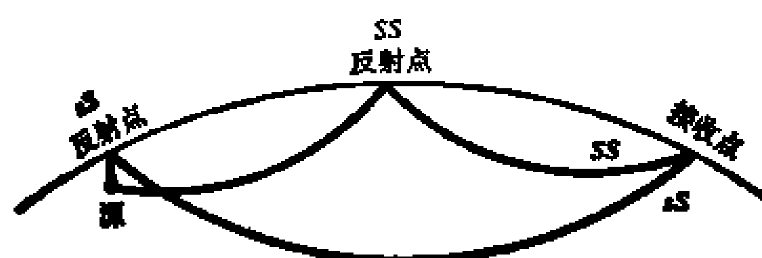


图 9.15

S 波离源向下，在源和接收点之间的地球表面上的一次反射称为 SS，而 sS 是离源向上并且在震源附近反射

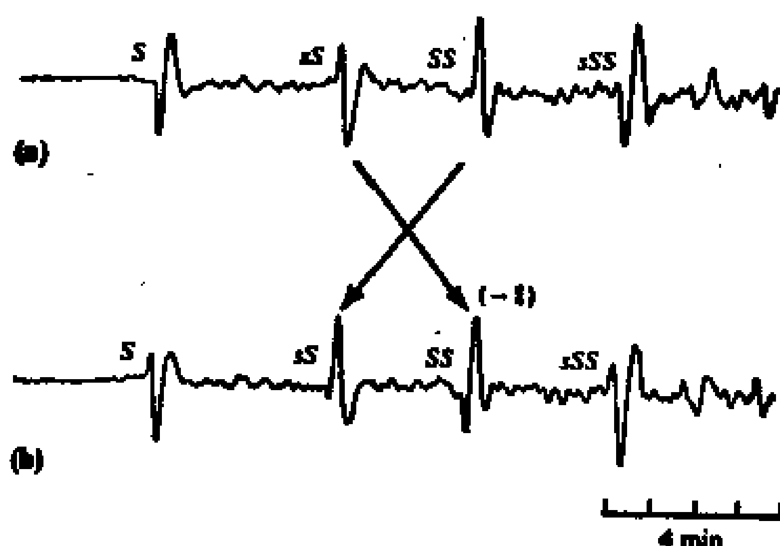


图 9.16

(a) 1960 年 10 月 8 日日本海下面一深震(608 公里)的东西向原始记录图（取向是对 SH 波）。在 PAL 台上的记录，$\Delta=96.3°$。(b) 是(a)的 Hilbert 变换。为方便，四个主要震相仍以原来的名字标记。一个箭头指示 (a)中的 SS 和 (b) 中所示的 sS 的 Hilbert 变换有同样的形状。第二个箭头指示 (a)中的 sS（极性反向以后）和 (b) 中所示的 SS 的 Hilbert 变换有同样的形状（引自 Choy and Richards, 1975）

的一些点，“回跳点”的扰动实际上都将减小走时，而垂直于此方向的扰动将增加走时。另一方面，sS 是一真正的极小时间路径，同时 Choy 和 Richards(1975)给出了 SS 的观测资料，它实际上完全是 sS 的Hilbert 变换(见图 9.16)。

在如上的评述中，虽然我们曾强调了球对称介质，但所有的概念和公式与平面成层介质是相似的。当改进地球展平的近似式以应用 Cagniard 方法和 Fuchs 方法研究地球中的远震波时，我们要求的正是这一点。

9.4 有转折点且其速度剖面随深度平稳变化的介质中波的传播

当一射线从地球内的某点源离源向下时，仅在从某内间断面向上反射回来以后，或仅仅在穿过转折点使“下行”逐渐改变成“上行”之后，才可能在地表的接收点上再一次观测到这个射线。在前一节中，在射线理论的内容中，我们已讲到了转折点，但我们现在的目的是对非均匀介质、在与频率有关的波动理论中来理解转折点。重要的是要避免用大量的层数来人为地去模拟非均匀性。

在均匀介质中，弹性波理论的关键组成部分包括 Lamé 原理、平面波分析、Sommerfeld 积分、和通过在复射线参量平面中的计算来求这些积分的方法。这些组成部分中的每一部分在本节中均被推广了，并且我们将发现 WKBJ 理论具有很大的实用性(补充 9.3 中已评述过)。事实上，在 WKBJ 近似式是准确的情况下，我们对体波的计算将把用于解 Lamb 问题的方法和经典射线理论结合在一起。但在这些近似是不准确的情况下（此情况是，如果一转折点所在的深度接近于地球内某一间断面时）则明显地出现了一个新的组成部分。

在均匀弹性介质的研究中，我们发现，将势函数的研究转移

到以运动-应力向量为基础的方法是合适的。在非均匀介质中，类似的修改也是方便的，这是因为势函数所展示的标量波解的性质其形式上最简单，可是，运动-应力向量方法能够更易于作到必要的物理量分类记录。由势函数出发，我们在补充 9.2 中得到球对称介质中的位移 $\boldsymbol{u}$ 可写成三个向量项之和：

$$\boldsymbol{u}=\rho^{-1/2}[\nabla P+\nabla\times\nabla\times(rV,0,0)]+\mu^{-1/2}\nabla\times(rH,0,0). \tag{9.25 a}$$

这里，右边的三个向量分别为位移的 P 分量、SV 分量和 SH 分量，具有标量势函数 P, V, H 且满足（在频率域中）解耦波动方程

$$\begin{aligned}&\nabla^2P+\frac{\omega^2}{\alpha^2}P=0,\\&\nabla^2V+\frac{\omega^2}{\beta^2}V=0,\\&\nabla^2H+\frac{\omega^2}{\beta^2}H=0.\end{aligned} \tag{9.25 b}$$

在(9.25 a)和(9.25 b)中的 ρ, μ, α 和 β，在球极坐标系(γ,Δ,ϕ)中仅为半径 r 的函数。因此，每一个波动方程都具有 Helmholtz 方程的形式，且具有径向变化的波数。

补充 9.2

球对称介质中 P，SV 和 SH 波的标量势

现在我们利用球坐标$(r,\ \Delta,\ \phi)$，其中 $r=0$ 是介质的对称中心，方向 $\Delta=0$ 被取为位于某点源上。位移 $\boldsymbol{u}=(u_r,\ u_\Delta,\ u_\phi)$ 的二次波动方程可从加速度和应力 (2.47)、应力和应变 (2.50) 以及应变和位移(2.45)等关系式中得到。这方程为

$$\begin{aligned}\rho\omega^2\boldsymbol{u}=&-(\lambda+2\mu)\nabla\nabla\cdot\boldsymbol{u}+\mu\nabla\times\nabla\times\boldsymbol{u}-\lambda'(\nabla\cdot\boldsymbol{u},0,0)\\&-2\mu'\frac{\partial\boldsymbol{u}}{\partial r}+\mu'(0,\mathrm{curl}_\phi\boldsymbol{u},\ -\mathrm{curl}_\Delta\boldsymbol{u})-\boldsymbol{f}.\end{aligned} \tag{1}$$

这里及以后，一撇代表径向微分，$\mathrm{curl}_a\,\boldsymbol{u}$ 为 $\nabla\times\boldsymbol{u}(a=r,\ \Delta,\ \phi)$的$a$ 坐标。这里我们将考虑自由解，即取体力 $\boldsymbol{f}$ 等于 0。

推导 u 的势函数是按照 4.1 节中所用过的大体相同的方法。[对此问题更详细的说明已由 Richards(1974)给出。]因此，通过给定的势函数专门公式，我们试图将(1)直接转为所需要的表达式。

专门公式为

$$P=\frac{-(\lambda+2\mu)}{\rho^{1/2}\omega^2}\left[\nabla\cdot u+\frac{\mu}{\lambda+\mu}\left(\frac{2\mu'}{\mu}-\frac{\rho'}{\rho}\right)u_r\right],$$

$$S=\frac{\mu}{\rho^{1/2}\omega^2}\left[\nabla\times u+\frac{\lambda+2\mu}{\lambda+\mu}\left(\frac{\rho'}{\rho}-\frac{2\mu'}{\lambda+2\mu}\right)(0,-u_\phi,u_\Delta)\right]. \quad (2)$$

在以 $\rho\omega^2$ 去除(1)之后，这运动方程可写成如下形式：

$$u=\rho^{-1/2}(\nabla P+\nabla\times S)+\text{量级为}|u|/\omega\text{ 的项}. \quad (3)$$

对我们所要研究的体波，最后一项是可以忽略的。它们典型地具有 $(\beta'/\omega)|u|$ 的量级，在具有相当高的剪切速度梯度(每公里为 0.005 公里/秒)地球模型的上地幔中，对 20 秒的波，$(\beta'/\omega)|u|$ 约为 $|u|$ 的 2%。

现在将定义(2)引入波动方程，代替(3)中的 u。用此法可求得

$$\nabla^2 P+\frac{\rho\omega^2}{\lambda+2\mu}P=\text{量级为}\frac{|u|}{\omega}\text{的项},$$

$$\nabla^2 S+\frac{\rho\omega^2}{\mu}S=\text{量级为}\frac{|u|}{\omega}\text{的项}. \quad (4)$$

但在(4)中左边的每项均为 $\omega|u|$ 的量级，所以对大多数目的来说，右边的项可忽略，就频率而言它们小两个量级。

剩下的只需要分别对 SV 和 SH 求标量势函数。这必须作 Beltrami 算子 B 的反演，其中

$$Bf=\frac{1}{\sin\Delta}\frac{\partial}{\partial\Delta}\left(\sin\Delta\frac{\partial f}{\partial\Delta}\right)+\frac{1}{\sin^2\Delta}\frac{\partial^2 f}{\partial\phi^2}.$$

注意，B 包含了存在于 Laplace 算子中的水平微商，所以，对任意的面谐函数 Y_l^m，$BY_l^m=-l(l+1)Y_l^m$。Backus(1958) 讨论了 B 的逆 B^{-1}，如果 $g=g(r,\Delta,\phi)$ 可表示成和 $g=\sum_{l=1}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l}g_l^m(r)Y_l^m$，进而由 $Bf=g$ 得到 $f=B^{-1}g=-\sum_{l=1}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l}[l(l+1)]^{-1}g_l^m Y_l^m$.

SV 势函数

对球形运动，$\text{curl}_r u=0$，则从(2)得到两个式子 $S_r=0$ 和 $\nabla\cdot S=$

0。因此，$\partial(\sin\Delta S_\Delta)/\partial\Delta+\partial S_\phi/\partial\phi=0$，它是函数$V$存在的条件，$S_\Delta=(1/\sin\Delta)\partial V/\partial\phi$，$S_\phi=-\partial V/\partial\Delta$。由此，对$SV$波有

$$S=\nabla\times(rV,0,0). \tag{5}$$

为构成V，我们建立$\mathrm{curl}|_r S$并注意$-r\,\mathrm{curl}|_r S=BV$，我们已求得了如何去反演的算子。Richards 给出

$$\nabla^2 V+\frac{\rho\omega^2}{\mu}V=\text{量级为}\frac{|u|}{\omega^2}\text{的项}。\tag{6}$$

SH 势函数

对圆环运动，$u_r=0$ 并 $\nabla\cdot u=0$。因而，我们可按上述对 S 所讨论的同样步骤，通过 $H_1=-B^{-1}(r\,\mathrm{curl}|_r u)$导出势函数 H_1。为得到 SH 势函数的波动方程的典型形式，考虑 $H=\mu^{1/2}H_1$是方便的。由此，对SH波有

$$u=\mu^{-1/2}\nabla\times(rH,0,0),$$

和

$$\nabla^2 H+\frac{\rho\omega^2}{\mu}H=\text{量级为}\frac{|u|}{\omega}\text{的项}。\tag{7}$$

忽略(3)—(7)中较小的项，得到方程(9.25 a)和(9.25 b)。(在非均匀介质中所有的这些项均为零。)

其次，假定将点源引入介质中。首先我们得到该点源的表达式，其作用类似于均匀介质中波的 Sommerfeld 积分。所考虑的最简单的源是对 $P(\mathbf{r},\ \omega)$的波动方程中引入的 δ 函数：

$$\nabla^2 P+\frac{\omega^2}{\alpha^2(r)}P=K_s\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}_s), \tag{9.26}$$

这里源位于 $\mathbf{r}_s$处且 K_s是一常数(下标 s 始终指被源确定的常数)。

在一无限均匀介质中，(9.26)的解为

$$P(\mathbf{r},\ \omega)=-\frac{K_s\exp(i\omega|\mathbf{r}-\mathbf{r}_s|/\alpha_s)}{4\pi|\mathbf{r}-\mathbf{r}_s|}, \tag{9.27}$$

用 Hankel 球函数和 Legendre 多项式，由上式可得到一个熟悉的部分波展开式(对 $r>r_s$)：

$$P(\boldsymbol{r},\omega)=-\frac{iK_s\omega}{4\pi\alpha_s}\sum_{l=0}^{\infty}\left(l+\frac{1}{2}\right)h_l^{(1)}(\omega r/\alpha_s)[h_l^{(1)}(\omega r_s/\alpha_s)$$

$$+h_l^{(2)}(\omega r_s/\alpha_s)]P_l(\cos\Delta), \qquad (9.28)$$

这里 α_s 是(常数)整个过程的 P 波速度。

在非均匀介质的研究中，如果我们要求得进展，最后的展开式必须推广。幸而，分离变量法表明，水平波函数仍是 Legendre 多项式，同时所有的困难均限于垂直的（现在是径向的）波函数中。因此，我们将试验用如下形式的离散解的和来求解(9.26)：

$$P(\boldsymbol{r},\omega)=\sum_{l=0}^{\infty}a(r,\ l)P_l(\cos\Delta). \qquad (9.29)$$

其次，$a(r,\ l)=\left(l+\frac{1}{2}\right)\int_0^{\pi}P(r,\omega)P_l(\cos\Delta)\sin\Delta d\Delta$，同时将(9.29)代入波动方程，就得到

$$\frac{d^2}{dr^2}[ra(r,l)]+\left[\frac{\omega^2}{\alpha^2(r)}-\frac{l(l+1)}{r^2}\right]ra(r,l)$$

$$=K_s\delta(r-r_s)\frac{(2l+1)}{4\pi r}. \qquad (9.30)$$

按照 Seckler 和 Keller(1959)及 Friedman(1951)的文章，我们导出了和(9.30)有关的齐次方程的三个特解。令 $f_l(r)$ 为 $a(r,l)$ 的解，这解在中心点 $r=0$ 处是规则的。当 r 值很大时，波动方程大致变为 $d^2a/dr^2=-\omega^2a/\alpha^2$。当 α 为常数时，从解 $e^{\pm i\omega r/\alpha}$ 类推，我们预期波动方程有两个独立的解可供选择，一个的相位随 r 增加，另一个的相位随 r 减小。分别将这些解标记为 $g_l^{(1)}(r)$ 和 $g_l^{(2)}(r)$。联系到因子 $\exp(-i\omega t)$，$g^{(1)}$ 是向外去的波，而 $g^{(2)}$ 是向内去的波，不考虑归一化，可完全定义这三个解，我们采用

$$a(r,l)=\begin{cases}c_1g_l^{(1)}(r) & r_s\leqslant r\\ c_2f_l(r) & 0\leqslant r\leqslant r_s.\end{cases} \qquad (9.31)$$

(9.30)中包含有两点，即当 r 一直增加到 r_s 时，$a(r,\ l)$ 的连续性及 $d[a(r,l)]/dr$ 中的高度为 $K_s(2l+1)/4\pi r_s^2$ 的阶跃，注意到这两者则可确定常数 c_1 和 c_2。由此可得

$$c_1=-\frac{K_s(2l+1)}{4\pi r_s^2}\frac{f_l(r_s)}{W(r_s)},\quad c_2=-\frac{K_s(2l+1)}{4\pi r_s^2}\frac{g_l^{(1)}(r_s)}{W(r_s)},\tag{9.32}$$

其中 $W(r)=g_l^{(1)}(r)df_l/dr-f_l^{(r)}dg_l^{(1)}/dr$ 是$g_l^{(1)}$和 f_l 的 Wronski 行列式。幸而，我们可以证明 $W(r)$ 是与 $1/r^2$ 成比例的，因为 $g_l^{(1)}$ 和 f_l 所满足的波动方程可用来求方程 $d(r^2W)/dr=0$。这比例常数取决于波函数的归一化，现在我们求助于 WKBJ 理论。从补充 9.3(方程 11)，当 ω 较大时得到

$$rg_l^{\binom{(1)}{(2)}}(r)\sim\frac{K^{\binom{(1)}{(2)}}}{\left[\frac{1}{\alpha^2(r)}-\left(\frac{l+\frac{1}{2}}{\omega r}\right)^2\right]^{1/4}}$$

$$\times\exp\left\{\pm i\omega\int_{r_p}^{r}\left[\frac{1}{\alpha^2(r')}-\left(\frac{l+\frac{1}{2}}{\omega r'}\right)^2\right]^{1/2}dr'\right\},\tag{9.33}$$

其中 $K^{(1)}$ 和 $K^{(2)}$是常数，r_p是被积函数为零时的半径。

定义

$$p\equiv\frac{l+\frac{1}{2}}{\omega},\ \text{我们得到}\ p=\frac{r_p}{\alpha(r_p)}.\tag{9.34}$$

因为球面几何中的射线参量为 $(r\cdot\sin i)/\alpha$，由此可得 r_p 的物理解释，即 r_p 为沿射线参量为 p 的射线到转折点处的半径。

补充 9.3

WKBJ 理论

这里我们讨论求如下二次方程的近似解

$$\frac{d^2\phi}{dx^2}+\omega^2s^2\phi=0,\tag{1}$$

式中 ω 较大且是正的，而 $s=s(x)$ 使 s^2 成为 x 的单调增函数。我们将要描述的方法具有很大的通用性，因为往往可用前述的 ω 和 s^2 的特性将任意的二次线性齐次方程变换成(1)。很多作者都重新发现了此方法（包括 Wentzel，Kramers，Brillouin 和 Jeffreys 等都因而得名）。当然其主要概念还可追溯到 Green 和 Liouville，且 Rayleigh (1912)也曾用过这个概念。

我们将假定，在 $x=x_p$ 时，s^2 为零（称为转折点），所以 $s^2 \lesseqgtr 0$ 取决于 $x \gtreqless x_p$。从(1)得到，解 $\phi=\phi(x)$ 的曲率具有与 s 相反或相同的符号，这也取决于 $x \gtreqless x_p$。仅此事实就可推断出此解的主要特性，即在转折点之上它是振荡的，而在其下面是指数形式的。

这里 $s(x)$ 是常数，解是 $\phi=e^{\pm i\omega s x}$，这样我们就可假定一尝试形式 $\phi=e^{i\omega\tau(x)}$。按(1)则有

$$i\omega\tau''-\omega^2(\tau')^2+\omega^2s^2=0,$$

其中的撇号代表 d/dx。作为一级近似，这里我们忽略了 $\omega\tau''$，这就给出 $\tau'\sim\pm s(x)$ 和 $\tau(x)\sim\pm\int s(x)dx$。这将给出 $\tau''\sim\pm s'$，所以 τ 的二级近似满足 $(\tau')^2=s^2\pm is'/\omega$，即 $\tau'=\pm s+is'/2s\omega$，故 $\tau(x)=\pm\int s(x)dx+(i/2\omega)\ln s$。$\phi$ 的相应解为

$$\phi(x)\sim\frac{A}{s^{1/2}(x)}\exp\left(i\omega\int_{x_p}^{x}s\,dx\right)+\frac{B}{s^{1/2}(x)}\exp\left(-i\omega\int_{x_p}^{x}s\,dx\right)\tag{2}$$

（A 和 B 为常数）。如果 $|s'/\omega|\ll|s^2|$，这是有效的。因为很粗略地有 $\omega s\times$ 波长 $=2\pi$，所以有效性条件相当于 $|s'\times$ 波长 $|\ll 2\pi|s|$，并且在一个波长内 $s(x)$ 的变化必须比 s 本身小很多。显然，在 $x=x_p$ 附近，(2)将不能成立，因其中 s 为零。

注意，在指数范围内，$x<x_p$，s 是虚数，所以对通解的适宜标记为

$$(\phi x)\sim\frac{C}{(-s^2)^{1/4}}\exp\left[\omega\int_{x}^{x_p}(-s^2)^{1/2}dx\right]$$

$$+\frac{D}{(-s^2)^{1/4}}\exp\left[-\omega\int_{x}^{x_p}(-s^2)^{1/2}dx\right].\tag{3}$$

如果 C 是非零的，则在 x_p 以下，解中有一指数增长的成分，且在此范围内该成分将占优势。其次，我们的兴趣将集中在 x_p 下面的解 $\phi(x)$

上，对此解，WKBJ 近似式(3)有 $C=0$。给定一 D 值，在 x 的整个范围内，这个特解由(1)确定，对转折点以上的范围，我们试图找到如形式(2)的渐近表达式。我们不能简单地将(3)式向上运用到转折点，在转折点处使它等于(2)，然后再连续向上，因为这些公式中没有一个在转折点附近是成立的［它们在那里有奇异性，故在实际解 $\phi(x)$ 中不存在］。我们论及的是指数衰减解与在(2)中求和的两个传播解的"连接"，而 Rayleigh(1912)提出的方法是应用 Airy 函数。

我们注意到 $\mathrm{Ai}(-y)$是 $dw/dy+yw=0$ 的解，这是我们的方程(1)的一个特例。如下的结果是已知的(Abramowitz and Stegun, 1964, 公式 10.4.59—60)，

$$\mathrm{Ai}(-y)\sim\pi^{-1/2}y^{-1/4}\cos\left[\frac{2}{3}y^{3/2}-\pi/4\right] \quad 当\ y\to\infty,$$

$$\mathrm{Ai}(-y)\sim\frac{1}{2}\pi^{-1/2}(-y)^{-1/4}\exp\left[-\frac{2}{3}(-y)^{3/2}\right] \quad 当\ y\to-\infty. \tag{4}$$

因此，$\mathrm{Ai}(-y)$是一特解，它在转折点以下呈指数衰减形式。

在 $x=x_p$ 附近，我们用 $s^2=\lambda(x-x_p)$逼近 $s^2(x)$，其中在 $x=x_p$ 处 $\lambda=ds^2/dx$。当 ω 很大且 x 刚好在 x_p 之下时，(3)中的衰减解为

$$\frac{D}{\lambda^{1/4}(x_p-x)^{1/4}}\exp\left[-\frac{2}{3}\omega\lambda^{1/2}(x_p-x)^{3/2}\right].$$

和(4)中第二个式子对比，则有

$$2D\pi^{1/2}(\omega/\lambda)^{1/6}\,\mathrm{Ai}(-\omega^{2/3}\lambda^{1/3}(x-x_p)). \tag{5}$$

但现在我们可用(4)中第一个式子去探求在转折点以上这个解的性质如何。它必然象下式：

$$\frac{2D}{\lambda^{1/4}(x-x_p)^{1/4}}\cos\left[\frac{2}{3}\omega\lambda^{1/2}(x-x_p)^{3/2}-\pi/4\right]. \tag{6}$$

然而，在这个范围内，它由(2)给定为

$$\frac{1}{\lambda^{1/4}(x-x_p)^{1/4}}\left\{A\exp\left[i\frac{2}{3}\omega\lambda^{1/2}(x-x_p)^{3/2}\right]\right.$$
$$\left.+B\exp\left[-i\frac{2}{3}\omega\lambda^{1/2}(x-x_p)^{3/2}\right]\right\}. \tag{7}$$

比较(6)和(7)，我们得到

$$A=De^{-i\pi/4},\quad B=De^{+i\pi/4}, \tag{8}$$

最后我们得到了对于在转折点以下是衰减的解，在转折点以上的渐近

性质。

实际上，我们希望可以应用这个方法的方程为

$$\frac{d^2}{dr^2}(r\alpha)+\left(\frac{\omega^2}{\alpha^2}-\frac{l(l+1)}{r^2}\right)r\alpha=0. \quad (9)(参见(9.30))$$

在 $r=0$ 处有一奇异点，我们通过 $r=r_0e^{x/x_0}$ 来处理 x 以消掉此奇异性；r_0 和 x_0 都是常数。$r^{1/2}a(r,l)=\varphi$ 满足

$$\frac{d^2\phi}{dx^2}+\frac{r_0^2}{x_0^2}e^{2x/x_0}\left[\frac{\omega^2}{\alpha^2}-\left(\frac{l+\frac{1}{2}}{r_0e^{x/x_0}}\right)^2\right]\phi=0,$$

此式形式如(1)。类似于 $\omega\int_{x_p}^{x}s\,dx$ 的项现变成

$$\omega\int_{r_p}^{r}\left[\frac{1}{\alpha^2}-\left(\frac{l+\frac{1}{2}}{\omega r}\right)^2\right]^{1/2}dr',$$

并且在 $r<r_p$ 的范围内，$a(r,l)$的指数衰减解由下式近似给出：

$$ra(r,l)=r^{1/2}\phi\sim\frac{D}{\left[\left(\frac{l+\frac{1}{2}}{\omega r}\right)^2-\frac{1}{\alpha^2}\right]^{1/4}}$$

$$\times\exp\left\{-\omega\int_{r}^{r_p}\left[\left(\frac{l+\frac{1}{2}}{\omega r'}\right)^2-\frac{1}{\alpha^2}\right]^{1/2}dr'\right\} \quad (10)$$

在转折点以上($r>r_p$)，下式给出了同样的解，

$$ra(r,l)=r^{1/2}\phi\sim\frac{D}{\left[\frac{1}{\alpha^2}-\left(\frac{l+\frac{1}{2}}{\omega r}\right)^2\right]^{1/4}}$$

$$\times\left[\exp\left(i\omega\tau-\frac{\pi}{4}\right)+\exp\left(-i\omega\tau+\frac{\pi}{4}\right)\right],$$

其中

$$\tau=\int_{r_p}^{r}\left[\frac{1}{\alpha^2}-\left(\frac{l+\frac{1}{2}}{\omega r'}\right)^2\right]^{1/2}dr'. \quad (11)$$

在应用数学中使用的几个特殊函数广泛地利用了近似式，它们是

(2)和(3)的特例。对 Airy 函数的例子已经在(4)中给出。其它还包括球面 Hankel 函数 $h_l^{(1)}(\omega r/a)$ 和 $h_l^{(2)}(\omega r/a)$(其中 a 为常数)以及 Legendre 函数 $P_l(\cos\Delta)$。球面 Hankel 函数满足(9)(如 a 是常数)，同时相应的 WKBJ 公式(10)(此时已知为对 $h_l^{(1)}+h_l^{(2)}$ 的 Debye 近似式)具有归一化的形式 $D=a^{1/2}/\omega$。既然如此，由于 a 是常数，则(11)中的 τ 可积分成

$$\left[\frac{r^2}{a^2}-\left(\frac{l+\frac{1}{2}}{\omega}\right)^2\right]^{1/2}+\frac{\left(l+\frac{1}{2}\right)}{\omega}\arc\sin\left[\frac{\left(l+\frac{1}{2}\right)a}{\omega r}\right].$$

当 $r<r_p$ 时，(10)近似为球面的 Bessel 函数 $J_l(\omega r/a)$，且有 $D=a^{1/2}/2\omega$。

Legendre 方程的 WKBJ 近似式为

$$P_l(\cos\Delta)\sim\left(\frac{1}{2\pi l\sin\Delta}\right)^{1/2}\left\{\exp\left[-i\left(l+\frac{1}{2}\right)\Delta+\frac{i\pi}{4}\right]\right.$$
$$\left.+\exp\left[+i\left(l+\frac{1}{2}\right)\Delta-\frac{i\pi}{4}\right]\right\},\tag{12}$$

在此情况下，转折点(在此处(12)式不成立)出现在 $\sin\Delta=0$ 处，即 $\Delta=0$ 和 $\Delta=\pi$ 处。注意，(12)式是一驻波，它比例于 $\cos\left[\left(l+\frac{1}{2}\right)\Delta-\pi/4\right]$，尽管它被写成行波分量的形式[参照(9.39)]。

对 $g_l^{(j)}$ 的归一化是在和球面 Hankel 函数的 Debye 近似式对比之后作出的(见补充 9.3 中的讨论)。如果介质是均匀的且有恒定速度 α_s，实际上我们若假定 $g_l^{(j)}$ 等于 $h_l^{(j)}(\omega r/\alpha_s)$，这是合适的。现在来确定 $K^{(1)}$ 和 $K^{(2)}$，在 $r/\alpha(r)>p$ 的范围内(即在参量为 p 的射线最深的穿透深度以上)有

$$g_l^{\binom{(1)}{(2)}}(r)\sim e^{\mp i\pi/4}\frac{\alpha_s^{1/2}}{\omega r}\cdot\frac{1}{\left[\frac{1}{\alpha^2(r)}-\frac{p^2}{r^2}\right]^{1/4}}$$
$$\times\exp\left\{\pm i\omega\int_{r_p}^{r}\left[\frac{1}{\alpha^2(r')}-\frac{p^2}{(r')^2}\right]^{1/2}dr'\right\}.$$

更进一步抓住射线理论这个环节，我们将 $(1/\alpha^2-p^2/\alpha^2)^{1/2}$ 看作 $\alpha^{-1}\cos i$，它是 P 波的垂直慢度，前曾标记为 ξ，因而有

$$g_l^{(1)}_{(2)}(r)\sim\frac{e^{\mp i\pi/4}\alpha_s^{1/2}}{\omega r\xi^{1/2}(r)}\ \exp\left[\pm i\omega\int_{r_p}^{r}\xi(r')dr'\right].\quad(9.35)$$

类似地，由 WKBJ 理论，在 $r/\alpha(r)<p$ 的范围内（即 $r<r_p$），我们有

$$f_l(r)\sim\frac{\alpha_s^{1/2}}{2\,\omega r\left[\dfrac{p^2}{r^2}-\dfrac{1}{\alpha^2}\right]^{1/4}}\ \exp\left\{-\omega\int_r^{r_p}\left[\frac{p^2}{(r')^2}-\frac{1}{\alpha^2(r')}\right]^{1/2}dr'\right\}.$$

(9.36)

所以，$f_l(r)$ 在转折点以下随深度呈指数衰减。(9.36) 所指的归一化是在均匀介质中使 $f_l(r)=j_l(\omega r/\alpha_s)$（球面 Bessel 函数）。

三个函数 f_l，$g_l^{(1)}$，$g_l^{(2)}$ 是整个半径范围内的解，重要的是要求得并且弄清楚它们之间的连接公式。根据补充 9.3，我们发现这关系式和对球面 Bessel 函数和球面 Hankel函数的关系相同，即连接公式有如下的简单形式：

$$f_1(r)=\frac{1}{2}[g_l^{(1)}(r)+g_l^{(2)}(r)].\quad(9.37)$$

其物理意义是在转折点以下振幅是衰减的。但在转折点以上，有一个下行分量和上行分量组成的驻波，正如射线先向下到达转折点，然后再向上。在转折点以下，$g_l^{(1)}$ 和 $g_l^{(2)}$ 中每一个都将随深度渐渐变为指数形式。

根据前述的归一化，现在来计算 Wronski 行列式是可能的。我们精确地得到 $W(r)=-i\alpha_s/(\omega r^2)$。因此，根据 (9.29)，(9.31)，(9.32) 和 (9.37)，我们最后得到

$$P(r,\ \omega)=\frac{iK_s(\omega)}{4\,\pi\alpha_s}\sum_{l=0}^{\infty}\left(l+\frac{1}{2}\right)g_l^{(1)}(r_>)[g_l^{(1)}(r_<)$$

$$+g_l^{(2)}(r_<)]P_l(\cos\Delta),\quad(9.38)$$

其中 $r_>=(r,r_s)$ 中较大的；$r_<=(r,r_s)$ 中较小的。

通常将 Legendre 函数分离成其行波分量是很有用的，即

$$P_l = Q_l^{(1)} + Q_l^{(2)},$$

其中

$$Q_l^{\binom{1}{2}}(\cos\Delta) \sim \frac{\exp\left\{\mp i\left[\left(l+\frac{1}{2}\right)\Delta - \pi/4\right]\right\}}{(2\pi l \sin\Delta)^{1/2}} \qquad (9.39)$$

这是对较大的 l(若 l 不在负整数附近且 Δ 不在 0 或 180°附近)。回顾对笛卡尔坐标，水平波函数是 $e^{i\omega px}$，其中 p 是水平慢度或射线参量。类似地，按(9.39)，我们可将$\left(l+\frac{1}{2}\right)/\omega$ 看成球面几何中的射线参量，如在(9.34)中已表示出的那样。

解(9.38)在概念上类似于 Sommerfeld 积分，其意义表示来自一简单点源的波怎样才能展开成适宜于某坐标系的垂直的与水平的波函数，而在此坐标中边界条件又很容易分析。然而，虽然分波展开式(9.38)是一收敛级数，但直到 l 大到足以使 $g_l^{(1)}(r_<)+g_l^{(2)}(r_>)$ 呈指数衰减以前，级数的各单项不能显著减小。这就要求 l 大于 $\omega r_< + \alpha(r_<)$。由于 $r_<$ 通常是几千公里并且 $\alpha(r_<)$ 约为 10 公里/秒，所以为研究短周期（1 或 2 秒）体波，不得不对(9.38)中的几千项求和。这种数字计算上的困难是通过将对 l 的求和变换成积分（Watson 变换或 Poisson 变换)而有效地避免了，然后在(复)平面中[illegible]得适当的迴线之后，直接完成这一积分是很简单的。这适当的迴线的严格演算是不容易的（Nussenzveig, 1965; Ansell, 1978)，因为(9.38)实质上是四个不同类型的波之和。其中每一个都是 $g_l^{(j)}(r_<)Q_l^{(k)}$ 这种类型，其 $j=1$ 或 2，$k=1$ 或 2，且可根据从 $r_<$ 到 $r_>$ 是向下离开或向上离开以及初至是向源或离源来辨别它们的类型。但如果级数（9.38）分成四个级数，其中每一个级数相应于一个波型，则每一级数都是发散的。为避免这种发散性需要进行十分复杂的计算，在补充 9.4 中我们给出一个最重要情况下的实例，如图 9.17 中所说明的，且其中

有一个转折点。

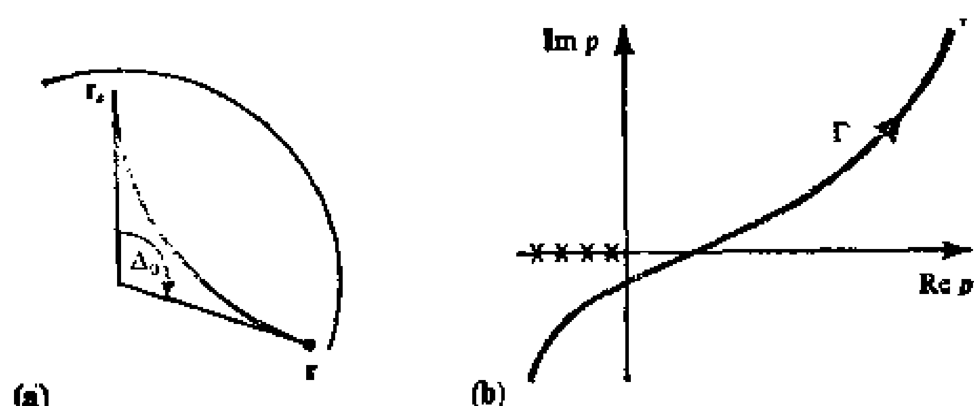


图 9.17
(a)从源到接收点，离源向下射线的参量。出现一个转折点。(b)有关的积分路径 Γ。见方程(9.40)(引自 Richards，1973)

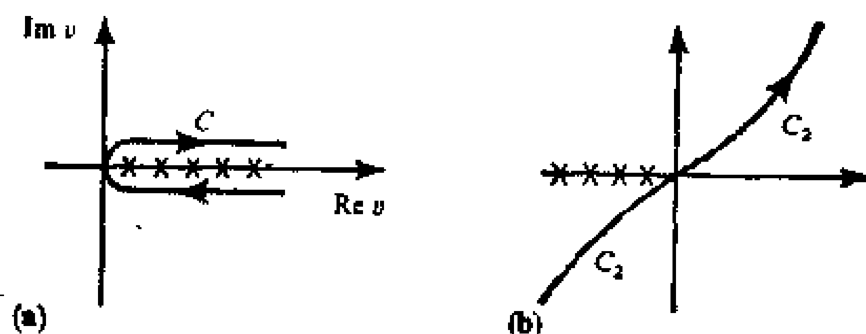
补充 9.4

Watson 变换的应用实例

这是一个将求和变换为积分的方法。利用在 $\nu=\frac{1}{2},1\frac{1}{2},2\frac{1}{2},\cdots$ 处 $\sin\nu\pi$ 的极点，此变换为

$$\sum_{l=0}^{\infty} f\left(l+\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}\int_{C} f(\nu)e^{-i\nu\pi}\sec\nu\pi d\nu, \tag{1}$$

其中 C 取为绕正的实 ν 轴，如图所示。



(a) Watson 变换的路径。极点都出现在沿实轴上，对正 ν，极点在 $\nu=l+\frac{1}{2}$处；$l=0, 1, 2, \cdots$。(b) 积分 $Q^{(2)}_{\nu-\frac{1}{2}}$在原点映射之后，对具有一个转折点的直达射线 C 的变形

在射线从源 r_s 处到接收点 r 处其间只有一个转折点的情况下，我们将应用(1)到分波展开式(9.38)中。该图形表示在图 9.17 a 中，利用 $P_l(\cos\Delta)=e^{il\pi}P_l(-\cos\Delta)$ 我们得到

$$P(r,\omega)=-\frac{K_s\omega}{4\pi a_s}\int_C \nu g^{(1)}_{\nu-\frac{1}{2}}(r)f_{\nu-\frac{1}{2}}(r_s)\ P_{\nu-\frac{1}{2}}(-\cos\Delta)\sec\nu\pi d\nu.$$

为将这个被积函数和积分路径变换成更有利的形式，必须利用垂直波函数和水平波函数的很多特殊性质，以避免在计算的中间步骤中出现发散积分。因而从 Nusseuzveig(1965)得出，C 可被变形使之越过第四象限及第一和第三象限的一部分，成为路径 C_2，它对原点是对称的(见图)。在这一阶段，被积函数在正实 ν 轴上有极点。写出

$$P_{\nu-\frac{1}{2}}(-\cos\Delta)\sec\nu\pi=[-e^{-i\nu\pi}Q^{(2)}_{\nu-\frac{1}{2}}(\cos\Delta)$$
$$+e^{i\nu\pi}Q^{(2)}_{-\nu-\frac{1}{2}}(\cos\Delta)]\csc\nu\pi$$

使积分 C_2 分离成两项。在包含 $Q^{(2)}_{-\nu-\frac{1}{2}}$ 的积分中以 $-\nu$ 代替 ν，并用 $g^{(1)}_{-\nu-\frac{1}{2}}(r_s)e^{-i\nu\pi}=g^{(1)}_{\nu-\frac{1}{2}}(r_s)$ 和

$$f_{-\nu-\frac{1}{2}}(r_s)=f_{\nu-\frac{1}{2}}(r_s)e^{-i\nu\pi}+i\sin\nu\pi g^{(1)}_{\nu-\frac{1}{2}}(r_s),$$

我们则得到

$$P(r,\omega)=-\frac{iK_s\omega}{4\pi a_s}\int_{C_2}\nu g^{(1)}_{\nu-\frac{1}{2}}(r)g^{(1)}_{\nu-\frac{1}{2}}(r_s)\ Q^{(1)}_{\nu-\frac{1}{2}}(\cos\Delta)d\nu. \qquad (2)$$

注意：(i) 这里最后的积分刚好和分波展开式(9.38)中出现的四个行波项之一相一致；(ii)(2)中的因子 $Q^{(2)}_{\nu-\frac{1}{2}}(\cos\Delta)$ 仅在负实轴上有极点，所以现在可在任何方便的地方使 C_2 穿过正实 ν 轴发生变形。(iii)如果在 r_s 和 r 之间没有转折点出现，即如果射线处处向上行走，则所预计的 (9.38) 中的行波项是 $g^{(1)}_l(r)g^{(2)}_l(r_s)Q^{(2)}_l(\cos\Delta)$。Ansell(1978)已给出了一个详尽的分析，指出了 Richards(1973)讨论中的发散积分。

虽然，分波展开式的严格计算是费力的，但其结果却有很大的意义，即在分波展开式中仍可识别出有物理意义的行波。使用复数积分路径的作用是双重的：消除所有无用的行波，从计算上得到余项中值得注意的积分。因此，对图 9.17 a 所示的源和接收点，补充 9.4 中的结果(2)，可精确地识别为所预期的行波。我们得到

$$P(r,\ \omega)=\frac{-iK_s\omega^3}{4\pi\alpha_s}\int_\Gamma pg^{(1)}_{\omega p-\frac{1}{2}}(r)\ g^{(1)}_{\omega p-\frac{1}{2}}$$
$$\times(r_s)Q^{(2)}_{\omega p-\frac{1}{2}}(\cos\Delta)dp, \tag{9.40}$$

其中 p 是射线参量$(\nu=l+\frac{1}{2}=\omega p)$，如图 9.17 b 所示，$\Gamma$ 被变形以穿过任意方便的点或穿过正实 p 轴上的一些点。

地球中间断面的作用，如核-幔边界，将在下节中研究。我们将发现在(9.40)的被积函数中包含有反射系数和透射系数是必要的。然而，如图 9.12 b，c 所表示的类型，在源和接收点之间的多路径数应已经包括在(9.40)中了。在我们 $g_l^{(i)}$ 的定义中隐含着这样的假定，恰在一个转折点 r_p 处解出的 $p=r/\alpha(r)$，因而低速带已被除外。(WKBJ 表达式可作些修正以使该假定削弱些。)因为 T-Δ 曲线没有间断，所以走时曲线的这些分支犹如给定的一条射线，三条射线，或者一般情况下，在源和接收点之间的一些奇数条射线。

(9.40)的用途包括了垂直波函数的直接计算(用运动方程的积分)，随后选择最速下降路径附近的 Γ 路径求(9.40)的积分(Chapman and Phinney，1972)。然而，经常采用波函数的近似式，这使更加快速的计算成为可能。首先，我们将讨论 WKBJ 近似式，对和源相距 Δ_0 处的接收点，它应用于由(9.40)得到的径向位移。于是，按(9.25a)，(9.35)和(9.39)，

$$u_r(r,\Delta_0,\omega)=[\rho(r)]^{-1/2}\partial P/\partial r=\frac{K_s e^{-3i\pi/4}\omega^{3/2}}{[2\pi\rho(r)\sin\Delta_0]^{1/2}}\frac{1}{4\pi rr_s}$$
$$\times\int_\Gamma\left(\frac{p\xi(r)}{\xi(r_s)}\right)^{1/2}e^{i\omega J}dp, \tag{9.41}$$

这里相位延迟的积分为

$$J=J(p)=\int_{r_p}^{r_s}\xi dr+\int_{r_p}^{r}\xi dr+p\Delta_0.$$

如(9.22)所指出的，$\int\xi dr$ 和走时及距离的积分有关，所以

$$J = T(p) - p\Delta(p) + p\Delta_0 = \tau(p) + p\Delta_0, \qquad (9.42)$$

其中 $T(p)$和$\Delta(p)$是参量为 p 的射线从位于 r_s 处的源到达半径r处的时间和距离。由于 $\partial J/\partial p = \Delta_0 - \Delta(p)$(见(9.23))，由此得到 u_r 的被积函数在 p 值处有鞍点，以使 $\Delta(p) = \Delta_0$，即正好对此射线参量，在源和接收点之间有一条射线。在此鞍点 p_0 附近(比如说)，Taylor 级数的展开式给出

$$J(p) = T(p_0) + \frac{1}{2}(p - p_0)^2(-\partial\Delta/\partial p)。 \qquad (9.43)$$

如果在 r 和 r_s 之间刚好有一实射线，则 $\partial\Delta/\partial p$ 为负的（图9.13中的 AB 分支)，并且对于 Γ，确定鞍点为最速下降路径是合适的，这导致(9.41)的近似式

$$u_r(r, \Delta_0, \omega) \sim \frac{-iK_s\omega}{4\pi}\left(\frac{\alpha_s}{\rho\alpha}\right)^{1/2}\frac{e^{i\omega T}}{rr_s}\left[\frac{\cos i_s \sin\Delta_0}{p_0\cos i}\times\left(-\frac{\partial\Delta}{\partial p}\right)\right]^{-1/2}.$$

通过下式确定几何扩散：

$$\alpha_s\mathscr{R}(r, r_s) = rr_s[\cos i\cos i_s\sin\Delta_0|\partial\Delta/\partial p|/p_0]^{1/2} \quad (9.44)$$

(见问题 4.3)，我们得到

$$u_r(r, \Delta_0, \omega) \sim \frac{-iK_s\omega}{4\pi(\rho\alpha\alpha_s)^{1/2}}\frac{e^{i\omega T}}{\mathscr{R}(r, r_s)}\cos i(r). \quad (9.45)$$

我们曾用 K_s 描述此源的强度。如果所描述的P波源用其矩张量 $M_{ij}(t) = M_0(t)\delta_{ij}$ 来代替，则体力为 $f_i(x, t) = -M_0(t)\partial\delta(x - r_s)/\partial x_i$。当震源区内物质性质的变化很小时，为使 K_s 和 M_0 相关，注意到向量波动方程（补充9.2，方程(1)）中主要的项变成了$\rho\omega^2 u + \nabla(\rho\alpha^2\nabla\cdot u) = \nabla[M_0(\omega)\delta(x - r_s)]$，并由于 $u = \rho^{-\frac{1}{2}}\times\nabla P$，这给出(和(9.26)比较)$K_s = M_0(\omega)/\rho_s^{1/2}\alpha_s^2$。因而，在时间域中我们从(9.45)得到

$$u_r(r, \Delta_0, t) \sim \frac{\cos i(r)\dot{M}_0(t - T)}{4\pi[\rho(r)\rho_s\alpha(r)\alpha_s^5]^{1/2}\mathscr{R}(r, r_s)}, \quad (9.46)$$

此式正是几何射线理论所预期的。

一个更复杂的结构如图9.18所示，这里对距离Δ_0有五个射线参量可解方程$\Delta(p)=\Delta_0$。此相位积分的二阶导数交替为正和负，它给出了其取向如图9.18 b所表示的鞍式曲线。可选取Γ沿最速下降路径穿过每一个鞍点，并对第一、第三、第五鞍点给出类型如(9.45)的近似式。对第二、第四鞍点，近似式为类型(9.45)乘以$(-i)$，即具有$\pi/2$的相位超前。转换到时间域，相应于偶序数鞍点的到时具有脉冲形状，它是对奇数的Hilbert变换。当$\Delta_c=\Delta(p)$有双根时(比如说在p_c处)发生焦散现象，以致在$p=p_c$时$\partial\Delta/\partial p$也为零。图9.19描述了此情况下波函数的性质，强调之点是在推广这些程序去计算复射线参量的T和Δ之后，(9.41)用数值方法依然是很容易计算的，Richards曾用这个方法描述了在接近240°处$PKKP$中的焦散对振幅的影响。

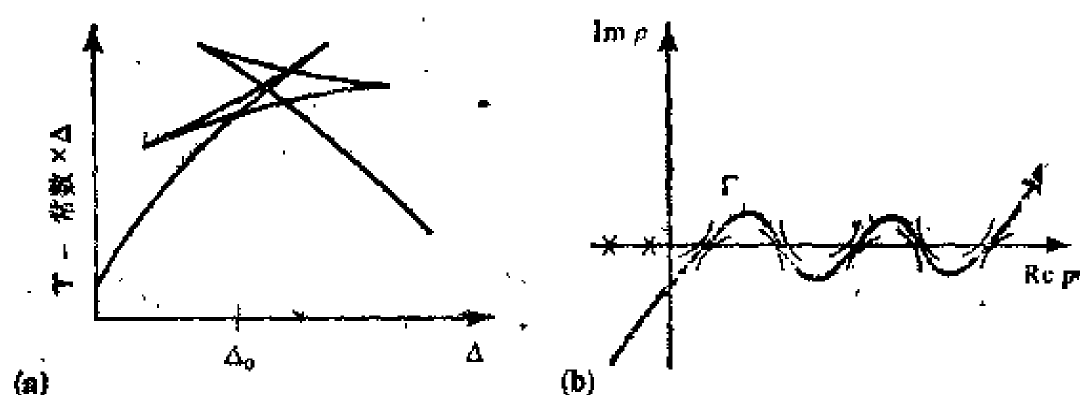


图 9.18

(a) 折合走时曲线，具有两个重叠的三重量。(b) 穿过五个鞍点的复射线参量平面中的积分路径，每一个鞍点都是满足$\Delta(r_s,p)=\Delta_0$的一个p值(引自Richards, 1973)

Chapman(1976 b)曾叙述过如(9.41)的表达式怎样才能在时间域中写成褶积之和。此结果是重要的，因为当多重到时和焦散可能存在时，它或许是导出合成地震图的最简单有效的方法。显然，此方法和Cagniard的方法有密切的联系，甚至当转折点存在的情况下这个方法都是有效的。我们从(9.41)开始，但却用一个备

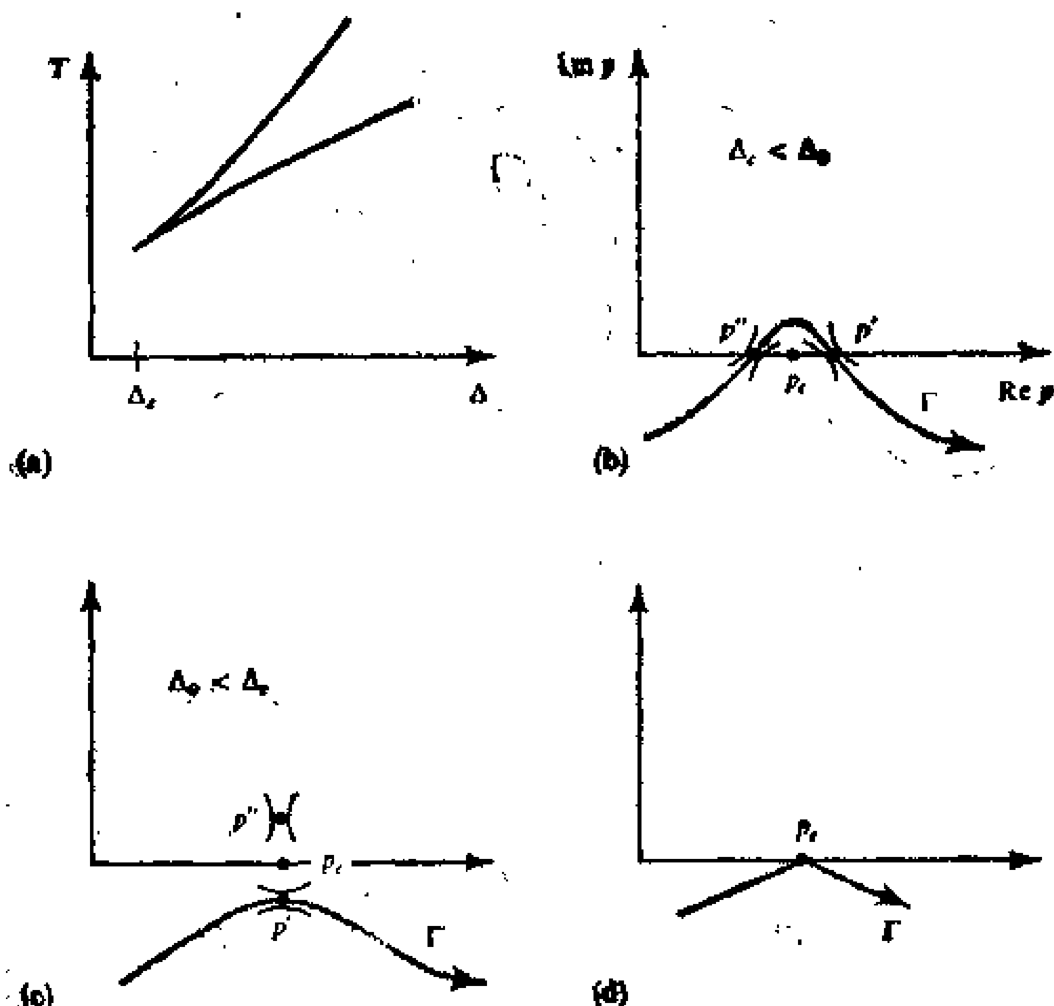


图 9.10

焦散点附近鞍点的特性。(a)在距离为 Δ_c 时，$T=T(\Delta)$ 的两个分支碰到一起，Δ_c 处有一焦散点。(b) 在 Δ_0 刚好大于 Δ_c 的距离时，$\Delta(p)=\Delta_0$ 的两个实数解是存在的，每一解在实 p 轴上给出一鞍点。当 Δ_0 移动并通过 Δ_c 时，这两个鞍点合并于 p_c，然后(c) 对 Δ_0 刚好小于 Δ_c 的距离时，$\Delta(p)=\Delta_0$ 的两个复数共轭解出现，一个平行于实 p 轴，一个在实 p 轴以下，并且现在这是最速下降路径。(d) 所示为两个直线段，在 $\Delta_0 \gtrless \Delta_c$ 的两种情况下，它们适用于(9.41)的数值计算(引自 Richards, 1937)

向同性的矩张量 $M_{ij}=M_0(\omega)\delta_{ij}$，所以

$$u_r(r,\Delta_0,\omega)=\frac{-i\omega M_0(\omega)e^{-i\pi/4}\omega^{1/2}}{(2\pi\rho\rho_s\sin\Delta_0)^{1/2}4\pi r r_s\alpha_s^2}\int_\Gamma B(p)e^{i\omega J(p)}dp, \tag{9.47}$$

其中 $B(p)=\left(\frac{p\xi(r)}{\xi_s}\right)^{1/2}=p^{1/2}\left(\frac{1}{\alpha^2}-\frac{p^2}{r^2}\right)^{1/4}\Big/\left(\frac{1}{\alpha_s^2}-\frac{p^2}{r_s^2}\right)^{1/4}$.

在时间域中，此式变成(见补充9.5)

$$u_r(r, \Delta_0, t)=\frac{\dfrac{dM_0}{dt}}{(2\pi\rho\rho_s\sin\Delta_0)^{1/2}4\pi r r_s\alpha_s^2}*\frac{d}{dt}\frac{H(t)}{(\pi t)^{1/2}}*\frac{1}{\pi}$$

$$\times \mathrm{Re}\int_0\int_\Gamma B(p)e^{i\omega(J-t)}dp\,d\omega. \qquad (9.48)$$

但这里时间褶积的三个函数中的最后那个是 $f(t)$,

$$f(t)=\mathrm{Re}\int_\Gamma B(p)\delta[J(p)-t]dp. \qquad (9.49)$$

因而，仅当 $J(p)$等于 t 时的 p 值，被积函数才是起作用的。此 p 值以实数 t 为参量，且部分是和Cagniard 路径的值相同。为了看清这一点，我们首先考虑一简单情况，在此情况下只用一个射线参量 p_0，以 $\mathbf{r}_s$ 和 $\mathbf{r}$ 之间的走时 t_0(图9.17)解出 $\Delta(p)=\Delta_0$。图9.20a中所示的量 $J(p)=T(p)-p\Delta(p)+p\Delta_0$，其斜率 $\Delta_0-\Delta(p)$在 p_0 处为零，此时 $J(p)=t_0$。对大于 t_0 的时间，方程

$$t=J(p) \qquad (9.50)$$

有两个根，Chapman(1976b)标记成 $\pi_1(t)$和 $\pi_2(t)$。事实上，方程(9.50)恰如Cagniard 路径的一个方程。显然，我们感兴趣的仅为一个根，同时对晚于某射线到时的时间，我们注视到此根离开了实 p 轴。这里，我们将保留两个根并且使 Γ 仅保持在实 p 轴上(在 p_0 附近)，所以避免了复射线参量值。图9.20b 所示的路径 $\pi_1(t)$和 $\pi_2(t)$，仅对 $t\geqslant t_0$ 时才有实数值。注意，当 t 增加时，取其方向为沿 $\pi_1(t)$，这和第六章及9.1节所熟悉的方向相反。其理由是在 p_0 点 $\partial\Delta/\partial p<0$，在 p_0 附近沿 $\pi_i(t)$ 的值由下面的Taylor 展开式给出：

$$t=t_0+\frac{1}{2}(\pi_i-p_0)^2\frac{\partial^2 J}{\partial p^2}=t_0-\frac{1}{2}(\partial\Delta/\partial p)|_{p_0}(\pi_i-p_0)^2. \qquad (9.51)$$

一旦(9.50)的实解 $\pi_i=\pi_i(t)$是已知的，在每一个 $\pi_i(t)$附近

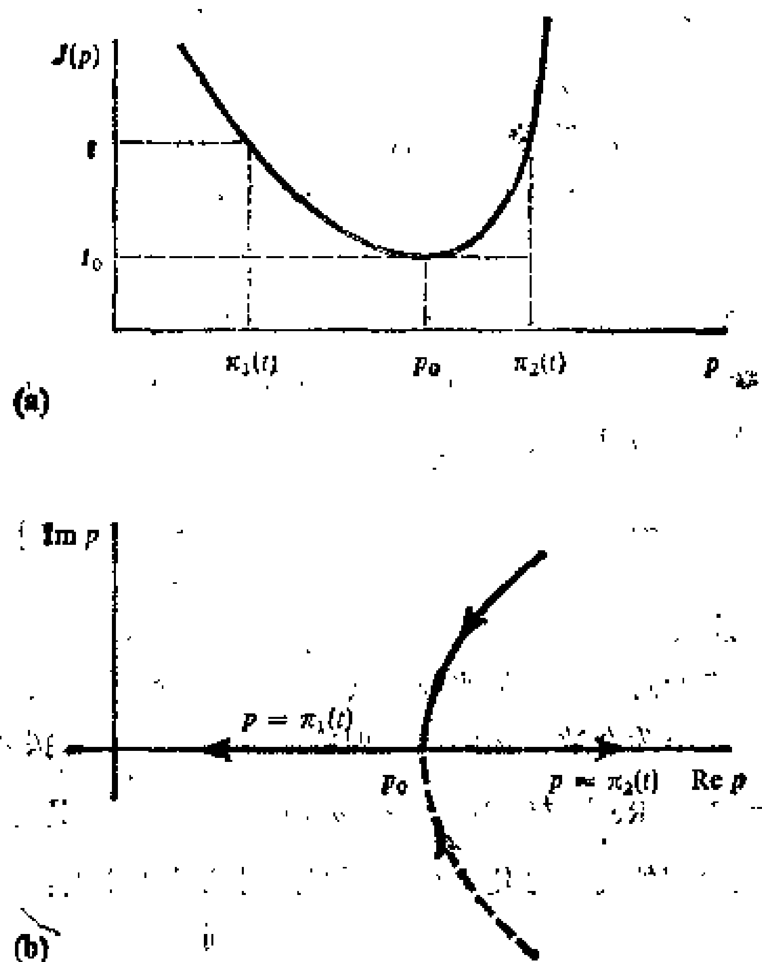


图 9.20

(a)函数 $J(p)$是由 $\tau(p)$(图9.14d)加一线性项 $p\Delta_0$ 得到。p_0处的极小值相应于时间 $t_0=J(p_0)$。(b)对 $t=J(p)$，其解的路径是 $p=\pi_i(t)$，当 $t>t_0$ 时它位于实 p 轴上

我们可以用下式逼近(9.49)中 δ 函数的宗量

$$J(p)-t\approx(p-\pi_i)\frac{\partial J}{\partial p}\Big|_{\pi_i}=(p-\pi_i)[\Delta_0-\Delta(\pi_i)]。$$

事实上，这里包括的高阶项是没有用的，因为这个近似表示式本身是 WKBJ 近似表达式的结果。因此，(9.48)成为

$$u_r(r,\ \Delta_0,\ t)=\frac{\dfrac{dM_0}{dt}}{(2\rho p_0\sin\Delta_0)^{1/2}4\pi^2\rho r_s\alpha_s^3}*\frac{d}{dt}\frac{H(t)}{t^{1/2}}$$

$$* \sum_j \frac{\beta(\pi_j)}{|\Delta_0-\Delta(\pi_j)|}. \tag{9.52}$$

在处理上，这个结果类似于我们先前的 Cagniard 方法导出的结果，但不需要复数运算。为确保在(9.52)中包含有几何射线理论，我们在 p_0 附近将 $\Delta_0-\Delta(\pi_j)$ 展开成 $(-\partial\Delta/\partial p)_{p0}(\pi_j-p_0)$，然后用(9.51)写成

$$\Delta_0-\Delta(\pi_j)\sim[-2\,\partial\Delta/\partial p]_{p0}^{1/2}(t-t_0)^{1/2}. \tag{9.53}$$

从(9.52)的褶积和补充 9.5 可见，两项($j=1, 2$)中的每项只贡献了几何射线近似式(9.46)的一半。

补充9.5

有用的变换对

因为我们的时间级数是实数，其 Fourier 变换的实部频率为偶数，虚部的频率为奇数。按照这一理解，我们仅对正的实频率写出公式，$f(t)=(1/\pi)\mathrm{Re}\int_0^{\infty}f(\omega)\exp(-i\omega t)d\omega$。于是，在具有 $t^{-\frac{1}{2}}$ 和乘数 $\omega^{-\frac{1}{2}}$ 的褶积之间的连接是建立在如下变换对的基础上的：

频率	时间
$e^{i\pi/4}\left(\frac{\pi}{\omega}\right)^{1/2}$	$\frac{H(t)}{t^{1/2}}$
$e^{-i\pi/4}\left(\frac{\pi}{\omega}\right)^{1/2}$	$\frac{H(-t)}{(-t)^{1/2}}$
$e^{-i\pi/4}(\pi\omega)^{1/2}$	$\frac{dH(t)}{dt\,t^{1/2}}$
$e^{i\pi/4}\,(\pi\omega)^{1/2}$	$-\frac{dH(-t)}{dt(-t)^{1/2}}$

$H(t)/t^{1/2}$ 的 Hilbert 变换是 $H(-t)/(-t)^{1/2}$，并且要记住的基本变换是

$$\frac{H(t)}{t^{1/2}}*\frac{H(t-T)}{(t-T)^{1/2}}=\pi H(t-T).$$

包含 Hilbert 变换算子和算子 d/dt 的褶积可根据互易性及这些算子和不同函数的相关性写成很多种不同的形式。因此有

$$\frac{d\psi}{dt} * \frac{H(t)}{t^{1/2}} * \frac{H(t-T)}{(t-T)^{1/2}} = \psi * \frac{d}{dt}[\pi H(t-T)] = \pi\psi(t-T),$$

和

$$\psi(t) * \left[-\frac{d}{dt}\frac{H(-t)}{(-t)^{1/2}} * \frac{H(T-t)}{(T-t)^{1/2}}\right] = \left(-\frac{d\psi}{dt}\right) * (-\pi H(t-T))$$

$$= \pi\psi(t-T).$$

要从公式(9.52)—(9.53)得到几何射线理论，我们用

$$\frac{d}{dt}\frac{H(t)}{t^{1/2}} * \frac{H(t-t_0)}{(t-t_0)^{1/2}} = \pi\delta(t-t_0).$$

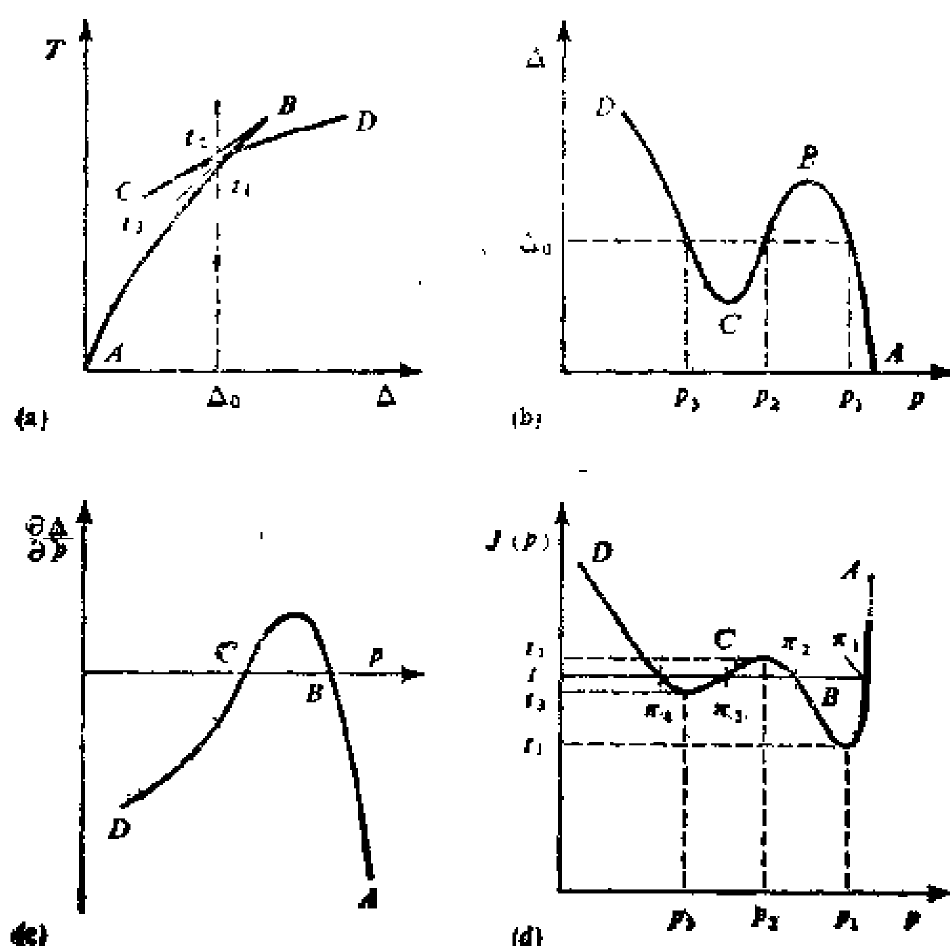


图 9.21

在B和C处有焦散的走时曲线及导出曲线。对距离Δ_0，几何射线给数值表明有三重性。(a) 具有到时t_1，t_2，t_3的走时曲线，(b) $\Delta=\Delta(p)$，对$\Delta(p)=\Delta_0$有三个解p_1，p_2，p_3。(c)$\partial\Delta/\partial p$中的零点出现在$B$和$C$处。(d)对一特定的距离$\Delta_0$，对$t=J(p)$其解$\pi_i(t)$的图解(引自 Chapman，1976b)

(9.52)的主要优点是直接地处理了多路径和焦散。图9.21表示出一个更加复杂的走时曲线，对$\Delta(p)=\Delta_0$有三个解p_1，p_2，p_3。对$t=J(p)$有四个解，而且如何应用(9.52)是相当清楚的。在B和C处的焦散是$J=J(p)$中的拐点，如果Δ_0是一焦散点，则相应于图9.21d中的拐点是水平的。由此求得$\Delta_0-\Delta(\pi_r)\propto(t-t_0)^{2/3}$，由(9.52)给出了很大的振幅。

有意思的是，(9.52)已由完全不同于我们曾采用的方法所得到。例如，Chapman(1976a)对大量均匀平面层研究了Cagniard方法，并能够得到广义一次反射(见(9.6))的表达式。他对所有的内界面求和，并当层的厚度逐渐缩小到零时取其极限值。在波阵面附近，表示式是(9.52)所给定值的$\pi/3$倍(仅对平面分层适用)，对有转折点的射线，该表示式意味着一个出人意外的结果，即在极限情况下，精细的分层和大量的一次反射并未给出波阵面附近的几何射线理论公式。相反，一次反射的总效应很大，约为5%。然而，第三个反射(三次反射波)，在波阵面附近其极限趋于(9.52)的$-\pi^3/648$，并且Chapman从$(2l+1)$次反射给出波阵面的近似式为(9.52)的$2(-1)^l(\pi/6)^{2l+1}/(2l+1)!$。加上连续多次的反射，则确实给出一迅速收敛的级数，且收敛于(9.52)，这是因为

$$\frac{\pi}{3}-\frac{\pi^3}{648}+\cdots=2\sin\frac{\pi}{6}=1.$$

Wiggins(1976a)用公式表示了另一方法，视$J(p)$为一波阵面(或圆盘)在Δ_0处的到时，其慢度为p。沿$J(p)$取相等的时间增量，他得到(9.52)的离散型并称之为圆盘射线理论。Chapman(1978a)曾建议对解(9.52)其适当的名字应为WKBJ地震图。这名字是合适的，因为它是在空间域和(或)时间域中的一个表示式，此式等效于在射线参量域和(或)频率域中的WKBJ近似式。WKBJ地震图在计算上省时间，在很多情况下，它大概是研究波形的最佳方法。我们已得到Chapman(1978a，b)曾称做慢度方法的一个特例，即在慢度(射线参量)域中得到其中间结果(在对

频率积分之后）．然而，在下一节中，我们将找到一些重要实例，其中 WKBJ 近似式是不准确的，所以，必须探寻(9.52)的代替式．

贯穿本节之内，我们曾假定了一个平稳变化的速度剖面。如果考虑到不连续性，就像地球的自由表面，那么必将导入有关的反射系数和透射系数。对 WKBJ 地震图，其结果表明只是有简单的平面波系数。超出 WKBJ 理论，对由几个均匀层组成的简单地球模型，其主要方法是熟知的(Scholte，1956)，因为在这些当中，垂直波函数是由球面 Hankel 函数组成的。在这些模型中已发现，所感兴趣的波路径(如 $SKKP$)可通过对总响应的表达式中分离其分波级数而进行分析。在概念上这和无限射线族定量表达式中识别一个特殊的广义射线有同样的运算(见图9.10)。Watson 变换仍是可用的，但现在，在复 p 平面中任意的路径变形都必须考虑对所感兴趣的射线路径的反射系数或透射系数中的极点。这些极点的大多数位置是通过研究球面 Hankel 函数的 WKBJ近似式的性质而确定的，因此，在更真实的地球模型中，由于间断面不同深度之间的弹性性质具有径向变化，我们仍可期望，利用广义垂直波函数 $g^{(j)}_{\omega p-\frac{1}{2}}$之 WKBJ 公式(9.35)—(9.36)可确定相应的极点位置。路径变形的严格分析要求将 Watson 路径改变成象 Γ 那样的路径(图9.17)，这对真实的地球模型是一棘手的课题。然而，现在已很清楚了，在波传播中几个不同类型的问题是能够加以区分的。在下文中，我们将着重于谱方法，在频率域中已得到了其中间结果(在对复射线参量的积分之后)。

9.5 存在间断面的地球模型中的体波问题

为系统处理地球内间断面的反射和透射，以运动应力向量为基础来发展一种方法是很重要的。如果没有这种方法，则必须利用通常以势函数为基础的一种特定的方法，并且对每一种特殊的应

用都必须完成其详细的代数运算。在这一节中，我们将研究球对称介质中 P-SV 运动的运动-应力向量，所用的符号类似于我们对均匀平面层所用过的。其散射矩阵很容易写出，并且我们将用它去研究几种不同的体波。

适用的水平波函数是在第八章中叙述的向量面谐函数。我们的符号是以完全归一化面谐函数 $Y_l^m(\Delta,\ \phi)$ [见(8.5)] 为基础的，并且

$$\boldsymbol{R}_l^m(\Delta,\ \phi)=Y_l^m\hat{\boldsymbol{r}},$$

$$\boldsymbol{S}_l^m(\Delta,\ \phi)=\frac{1}{[l(l+1)]^{1/2}}\left(\frac{\partial Y_l^m}{\partial\Delta}\hat{\boldsymbol{\Delta}}+\frac{1}{\sin\Delta}\frac{\partial Y_l^m}{\partial\phi}\hat{\boldsymbol{\phi}}\right),\qquad(9.54)$$

$$\boldsymbol{T}_l^m(\Delta,\ \phi)=\frac{1}{[l(l+1)]^{1/2}}\left(\frac{1}{\sin\Delta}\frac{\partial Y_l^m}{\partial\phi}\hat{\boldsymbol{\Delta}}-\frac{\partial Y_l^m}{\partial\Delta}\hat{\boldsymbol{\phi}}\right).$$

由这些我们作出展开式

$$\boldsymbol{u}=\boldsymbol{u}(r,\ \Delta,\ \phi,\ \omega)=(u_r,\ u_\Delta,\ u_\phi)$$

$$=\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l}[U_l^m\boldsymbol{R}_l^m+V_l^m\boldsymbol{S}_l^m+W_l^m\boldsymbol{T}_l^m],\qquad(9.55)$$

和

$$牵引力=(\tau_{rr},\ \tau_{r\Delta},\ \tau_{r\phi})=\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l}[R_l^m\boldsymbol{R}_l^m+S_l^m\boldsymbol{S}_l^m+T_l^m\boldsymbol{T}_l^m].$$

这是我们希望求解的六个量 U_l^m，V_l^m，W_l^m，R_l^m，S_l^m，T_l^m。每一个量都是 $(r,\ l,\ m,\ \omega)$ 的函数，并且在这个意义上，在我们感兴趣的定义域 $(r,\ \Delta,\ \varphi,\ t)$ 中，它是一个解的三次变换。在多重变换的运动方程(2.47)—(2.50)中，仅仅保留了径向微商，并且可将它们分成两组：

$$\frac{d}{dr}\begin{pmatrix}V\\U\\S\\R\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{r} & \frac{-[l(l+1)]^{1/2}}{r}\\ \frac{\lambda[l(l+1)]^{1/2}}{r(\lambda+2\mu)} & -\frac{2\lambda}{r(\lambda+2\mu)}\\ \frac{4l(l+1)\mu(\lambda+\mu)}{r^2(\lambda+2\mu)}-\rho\omega^2-\frac{2\mu}{r^2} & \frac{-2\mu(3\lambda+2\mu)[l(l+1)]^{1/2}}{r^2(\lambda+2\mu)}\\ \frac{-2\mu(3\lambda+2\mu)[l(l+1)]^{1/2}}{r^2(\lambda+2\mu)} & -\rho\omega^2+\frac{4\mu(3\lambda+2\mu)}{r^2(\lambda+2\mu)}\end{pmatrix}$$

$$
\begin{matrix}
\frac{1}{\mu} & 0 \\
0 & \frac{1}{\lambda+2\mu} \\
-\frac{3}{r} & \frac{-\lambda[l(l+1)]^{1/2}}{r(\lambda+2\mu)} \\
\frac{[l(l+1)]^{1/2}}{r} & \frac{-4\mu}{r(\lambda+2\mu)}
\end{matrix}
\Bigg)\begin{pmatrix} V \\ U \\ S \\ R \end{pmatrix} \tag{9.56}
$$

和

$$
\frac{d}{dr}\begin{pmatrix} W \\ T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{r} & \frac{1}{\mu} \\ \frac{\mu(l-1)(l+2)}{r^2}-\rho\omega^2 & \frac{3}{r} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} W \\ T \end{pmatrix}. \tag{9.57}
$$

我们已从因变量中略去了下标 l 和上标 m。注意，尽管在方程中没有出现 m，但我们必须记住，一般而言，因为 m 和震源展开式有关，所以对 m 的依赖性还是存在的。在第八章中，我们曾把谐波数 n 和径向函数联系起来，在我们现在的方法中，没有发生谐波，因为现在我们没有去求根据 $r=0$ 时有奇异性以及 $r=r_\oplus$时（地球表面）有零应力而得的特解。相反，我们将处理在(还)没有采用边界条件情况下的一组完整线性独立解。

显然，(9.56) 描述了 P-SV 运动（参照(5.60)），而(9.57)则描述了 SH 运动 [参照(5.58)]，这两组方程为标准形式 $d\boldsymbol{f}/dr=\boldsymbol{A}(r)\boldsymbol{f}$。我们的下一个目标是寻求怎样能把 $\boldsymbol{f}$ 写成 $\boldsymbol{f}=\boldsymbol{F}\boldsymbol{w}=\boldsymbol{E}\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{w}$，其中层矩阵 $\boldsymbol{F}$ 已被分解成描述每一层中位移分量和应力分量振幅的 $\boldsymbol{E}$，和给出下行和上行的 P 及 SV 之垂直波函数的 $\boldsymbol{\Lambda}$（对角矩阵）。产生 $\boldsymbol{F}$ 及其因子 $\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{\Lambda}$ 的最简单方法是借助于适宜球面几何的势函数（9.25 a），这是由于 $\boldsymbol{F}$ 的每一列都能够从一可识别的垂直波函数中（问题 5.8）导出来。另一方法是反演由 Chapman（1973，1974）给出的变换。最后的结果十分显著地类似于平面波理论的（5.65）。对 P-SV 问题，它是

$$
\boldsymbol{f}(r)=\begin{pmatrix} V \\ U \\ S \\ R \end{pmatrix}=\boldsymbol{E\Lambda w},
$$

其中

$$
\boldsymbol{\Lambda}=\begin{pmatrix} \pi^{(2)}(r) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma^{(2)}(r) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \pi^{(1)}(r) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sigma^{(1)}(r) \end{pmatrix} \tag{9.58}
$$

和

$$
\boldsymbol{E}=\begin{pmatrix} -\frac{i\alpha p}{r} & -i\beta\eta & -\frac{i\alpha p}{r} & -i\beta\eta \\ -\alpha\xi & \frac{\beta p}{r} & \alpha\xi & -\frac{\beta p}{r} \\ -2\omega\rho\alpha\beta^2\frac{p}{r}\xi & -\omega\rho\beta\left(1-2\beta^2\frac{p^2}{r^2}\right) & 2\omega\rho\alpha\beta^2\frac{p}{r}\xi & \omega\rho\beta\left(1-2\beta^2\frac{p^2}{r^2}\right) \\ i\omega\rho\alpha\left(1-2\beta^2\frac{p^2}{r^2}\right) & -2i\omega\rho\beta^3\frac{p}{r}\eta & i\omega\rho\alpha\left(1-2\beta^2\frac{p^2}{r^2}\right) & -2i\omega\rho\beta^3\frac{p}{r}\eta \end{pmatrix}. \tag{9.59}
$$

波函数 $\pi^{(i)}$是对于 P 波的，并且通过下式和我们前述的 $g_i^{(i)}$有关，

$$
\pi^{(1)}_{(2)}(r,p,\omega)\equiv\left(\frac{\rho_s}{\rho}\right)^{1/2}\frac{\alpha_s}{\alpha}\,g_i^{(1)}_{(2)}\sim e^{\mp i\pi/4}\left(\frac{\rho_s\alpha_s}{\rho\alpha\cos i}\right)^{1/2}
$$

$$
\times\left(\frac{\alpha_s}{\omega r}\right)\exp\left[\pm i\omega\int_{r_p}^{r}\xi(r')dr'\right]. \tag{9.60}
$$

波函数 $\sigma^{(i)}$是对于 SV 波的，它是由横波速度剖面 $\beta(r)$ 定义的，类似地有

$$
\sigma^{(1)}_{(2)}(r,p,\omega)\sim e^{\mp i\pi/4}\left(\frac{\rho_s\beta_s}{\rho\beta\cos j}\right)^{1/2}\left(\frac{\beta_s}{\omega r}\right)
$$

$$
\times\exp\left[\pm i\omega\int_{r_p}^{r}\eta(r')dr'\right] \tag{9.61}
$$

(这里的 r_p 是 S 波的转折点，其中 $\eta=(1/\beta^2-p^2/r^2)^{1/2}=\beta^{-1}\cos j$

为 0)。在(9.59)中强调的垂直慢度由下式定义：

$$\grave{\xi}\equiv\frac{1}{-i\omega\pi^{(2)}}\frac{d\pi^{(2)}}{dr},\acute{\xi}\equiv\frac{1}{i\omega\pi^{(1)}}\frac{d\pi^{(1)}}{dr},$$

$$\grave{\eta}\equiv\frac{1}{-i\omega\sigma^{(2)}}\frac{d\sigma^{(2)}}{dr},\ \acute{\eta}\equiv\frac{1}{i\omega\sigma^{(1)}}\frac{d\sigma^{(1)}}{dr},\qquad(9.62)$$

在一次近似下，由 WKBJ 理论得到，在转折点以上，$\grave{\xi}\sim\acute{\xi}\sim\alpha^{-1}\cos i$ 和 $\grave{\eta}\sim\acute{\eta}\sim\beta^{-1}\cos j$。但在转折点以下，$\grave{\xi}\sim\acute{\xi}\sim-i(p^2/r^2-1/\alpha^2)^{1/2}$和 $\grave{\eta}\sim-\acute{\eta}\sim-i(p^2/r^2-1/\beta^2)^{1/2}$。撇号如 $\grave{\xi}$ 和$\acute{\xi}$，是用以表明，$\grave{\xi}$(读作"ξ 向下")由下行波引出，而$\acute{\xi}$(读作"ξ 向上")则由上行波引出。

F，**E** 和 **A** 中，列的次序依次取成下行 P，下行 SV，上行 P，上行 SV，且其中每一种波出现的比例取决于 ω。对地球中每一非均匀层可确定这三个矩阵，但在应用的方式上常把它们和均匀层进行对比，这里有一主要的差别，简单地说这是因为现在仅需要极少的"层"。例如，对下地幔通常采用一层，其深度从约 650 公里一直向下到核幔边界。

因为(9.25 a)—(9.25 b)给出的势函数方法仅仅是近似的，必须认识到，我们给出的对 **A** 的公式及其波函数也只是近似的。然而，我们将能改进 WKBJ 的近似式。**E** 的公式(9.59) 也是近似的，甚至在均匀的球面层中亦是近似的。尽管如此，对最深范围，其误差仅是 $\alpha/\omega r$ 和 $\beta/\omega r$ 的量级，在最不利的情况下是 $(\alpha/\omega r)^{2/3}$ 和$(\beta/\omega r)^{2/3}$的量级，对体波频率这仍是无关紧要的。

虽然我们已研究了运动-应力向量方法，但它并未包含任何势函数方法所未给出的内容，还记得我们的目的是当碰到间断性边界条件时，求得簿记的系统方法。我们利用图 9.22 中表示的层序号，对每一内界面都可建立如(5.37)中给出的散射矩阵。作为参考，对 r_1 处的内界面，其全部 16 个 P-SV 的反射、转换、透射系数，在补充 9.6 中我们给出了一些专门的公式。

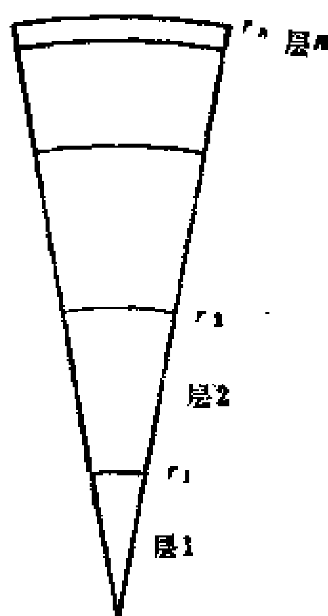


图 9.22
球面几何中层和边界的序号。由于每一层可以是非均匀的，在整个地球中，对于研究长周期体波仅需要几个层(约为10层)

补充 9.6

非均匀叠层的广义散射；在两个径向非均匀层间一个球形内界面的特例

我们假定，对一非均匀叠层，希望求出第M层和第$N+1$层之间所有内界面的散射。这些内界面本身位于半径r_M，r_{M+1}，r_{M+2}，…，r_{N-1}，r_N等处，同时（$N+1$）层在r_N上面。

在第M层中，上行和下行的$P-SV$波系统用常向量来描述：

$$W_M=(\grave{P}_M,\ \grave{S}_M,\ \acute{P}_M,\ \acute{S}_M)^T,$$

并且在每一层中，从$\mathbf{f}=\mathbf{F}\mathbf{w}$得到

$$\mathbf{w}_M=\mathbf{F}_M^{-1}(r_M)\mathbf{f}(r_M).$$

因此

$$\begin{aligned}\mathbf{w}_M&=\mathbf{F}_M^{-1}(r_M)\mathbf{F}_{M+1}(r_M)\mathbf{w}_{M+1} \qquad (1)\\&=\{\mathbf{F}_M^{-1}(r_M)\mathbf{F}_{M+1}(r_M)\}\cdots\{\mathbf{F}_N^{-1}(r_N)\mathbf{F}_{N+1}(r_N)\}\mathbf{w}_{N+1}\\&=\mathbf{H}\mathbf{w}_{N+1},\end{aligned}$$

其中$\mathbf{H}$是矩阵乘积。因此

$$(\grave{P}_M,\grave{S}_M,\acute{P}_M,\acute{S}_M)^T=\mathbf{H}(\grave{P}_{N+1},\grave{S}_{N+1},\acute{P}_{N+1},\acute{S}_{N+1})^T, \qquad (2)$$

如果所有的层矩阵 $\boldsymbol{F}$ 及其逆 $\boldsymbol{F}^{-1}$ 是已知的，则 $\boldsymbol{H}$ 可明确地得到。在很多应用中，在径向非均匀层内的 $\boldsymbol{F}$ 是由 (9.58)—(9.59) 给定，且其逆矩阵为

$$
\boldsymbol{F}^{-1}=\frac{i}{2}\begin{pmatrix}
F_{33}/\alpha_s^3 & F_{43}/\alpha_s^2 & -F_{13}/\alpha_s^3 & -F_{23}/\alpha_s^2 \\
F_{34}/\beta_s^3 & F_{44}/\beta_s^2 & -F_{14}/\beta_s^3 & -F_{24}/\beta_s^2 \\
-F_{31}/\alpha_s^3 & -F_{41}/\alpha_s^2 & F_{11}/\alpha_s^3 & F_{21}/\alpha_s^2 \\
-F_{32}/\beta_s^3 & -F_{42}/\beta_s^2 & F_{12}/\beta_s^3 & F_{22}/\beta_s^2
\end{pmatrix}.
$$

这里的下标 s 代表在某参考值处的性质（见(9.35)），用 F 的元素表示的 $\boldsymbol{F}^{-1}$ 与这个公式是对 $(\pi^{(1)},\ \pi^{(2)})$ 和 $(\sigma^{(1)},\ \sigma^{(2)})$ 的 Wronski 行列式特殊的结果。

我们用下式定义一散射矩阵 $\boldsymbol{S}$

$$
(\acute{P}_{N+1},\acute{S}_{N+1},\grave{P}_M,\grave{S}_M)^T=\boldsymbol{S}(\grave{P}_{N+1},\grave{S}_{N+1},\acute{P}_M,\acute{S}_M)^T, \tag{4}
$$

其中

$$
\boldsymbol{S}=\begin{pmatrix}
\grave{P}\acute{P} & \grave{S}\acute{P} & \acute{P}\acute{P} & \acute{S}\acute{P} \\
\grave{P}\acute{S} & \grave{S}\acute{S} & \acute{P}\acute{S} & \acute{S}\acute{S} \\
\grave{P}\grave{P} & \grave{S}\grave{P} & \acute{P}\grave{P} & \acute{S}\grave{P} \\
\grave{P}\grave{S} & \grave{S}\grave{S} & \acute{P}\grave{S} & \acute{S}\grave{S}
\end{pmatrix} \tag{5}
$$

[与两均匀半空间之间的一固体界面的 (5.34)—(5.37) 进行对比，(4) 的左半部表示散射波，$\boldsymbol{S}$ 作用于入射波。] 现在，$\boldsymbol{S}$ 中的图表值指的是广义散射系数，所以，例如，$\grave{P}\grave{S}$ 代表第 $N+1$ 层中向下的 P 引起的在第 M 个非均匀层中向下透射的 SV 波的位相和振幅值。因此，$\grave{P}\grave{S}$ 包含了由界面 M 和 N 之间的叠层内所有的多次反射。为了用 H 中的各表值明确地得到 S，将 (2) 代入 (4) 中进行运算而得

$$
\boldsymbol{S}=-\begin{pmatrix}
H_{13} & H_{14} & -1 & 0 \\
H_{23} & H_{24} & 0 & -1 \\
H_{33} & H_{34} & 0 & 0 \\
H_{43} & H_{44} & 0 & 0
\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}
H_{11} & H_{12} & 0 & 0 \\
H_{21} & H_{22} & 0 & 0 \\
H_{31} & H_{32} & -1 & 0 \\
H_{41} & H_{42} & 0 & -1
\end{pmatrix}
$$

$$
=\frac{1}{D}\begin{pmatrix}
0 & 0 & -H_{44} & H_{34} \\
0 & 0 & H_{43} & -H_{33} \\
D & 0 & H_{14}H_{43}-H_{13}H_{44} & H_{13}H_{34}-H_{14}H_{33} \\
0 & D & H_{24}H_{43}-H_{23}H_{44} & H_{23}H_{34}-H_{24}H_{33}
\end{pmatrix}
$$

$$
\times\begin{pmatrix} H_{11} & H_{12} & 0 & 0 \\ H_{21} & H_{22} & 0 & 0 \\ H_{31} & H_{32} & -1 & 0 \\ H_{41} & H_{42} & 0 & -1 \end{pmatrix}, \qquad (6)
$$

其中 $D=H_{33}H_{44}-H_{34}H_{43}$.

将 (6) 中两个矩阵乘出来，可求得 S 中任一所需的表值。这里我们已给出的方法是 Červený (1974) 提出的，他还说明了如何避免数值运算上的困难，即通过 H 的 2×2 子矩阵来处理 6×6 矩阵 (称为 delta矩阵)。对均匀层，约化成计算 5×5 矩阵的 delta 矩阵法已由 Kind (1976) 详细地叙述过。

在两个非均匀层之间有一个内界面的特殊情况下，求得 S 往往是十分重要的。于是从 (1) 得到矩阵 H。(5.34)—(5.36) 中的方法使我们有如下定义：

$$a=\rho_2(1-2\,\beta_2^2p^2/r_1^2)-\rho_1(1-2\,\beta_1^2p^2/r_1^2),$$

$$b=\rho_2(1-2\,\beta_2^2p^2/r_1^2)+2\,\rho_1\beta_1^2p^2/r^2,$$

$$c=\rho_1(1-2\,\beta_1^2p^2/r_1^2)+2\,\rho_2\beta_2^2p^2/r_1^2,$$

$$d=2(\rho_2\beta_2^2-\rho_1\beta_1^2),$$

$$E=b\grave{\xi}_1+c\acute{\xi}_2,\quad F=b\grave{\eta}_1+c\acute{\eta}_2,\quad G=a-d\grave{\xi}_1\acute{\eta}_2,$$

$$H=a-d\acute{\xi}_2\grave{\eta}_1,\quad D=EF+GHp^2/r_1^2,$$

这里脚标 1 是对下层，脚标 2 是对上层。内界面本身位于 r_1 处，P-SV 系数为：

$$\grave{P}\acute{P}=-\{[(b\acute{\xi}_1-c\grave{\xi}_2)F+(a+d\grave{\xi}_2\grave{\eta}_1)Gp^2/r_1^2]/D\}(\pi_2^{(2)}/\pi_2^{(1)}),$$

$$\grave{P}\acute{S}=\{(\grave{\xi}_2+\grave{\xi}_2)(ac+bd\grave{\xi}_1\grave{\eta}_1)p\alpha_2/(r_1\beta_2D)\}(\pi_2^{(2)}/\sigma_1^{(1)}),$$

$$\grave{P}\hat{P}=\{\rho_2(\acute{\xi}_2+\grave{\xi}_1)F\alpha_2/(\alpha_1D)\}(\pi_1^{(2)}/\pi_1^{(2)}),$$

$$\grave{P}\grave{S}=-\{\rho_2(\acute{\xi}_2+\grave{\xi}_2)Gp\alpha_2/(r_1\beta_1D)\}(\pi_2^{(2)}/\sigma_1^{(2)}),$$

$$\grave{S}\acute{P}=\{(\acute{\eta}_2+\grave{\eta}_1)(ac+bd\grave{\xi}_1\grave{\eta}_1)p\beta_2/(r_1\alpha_2D)\}(\sigma_2^{(2)}/\pi_1^{(1)}),$$

$$\grave{S}\acute{S}=\{[b\grave{\eta}_1-c\grave{\eta}_2)E+(a+d\grave{\xi}_1\grave{\eta}_2)Hp^2/r_1^2]/D\}(\sigma_2^{(2)}/\sigma_2^{(1)}),$$

$$\grave{S}\grave{P}=\{\rho_2(\acute{\eta}_2+\grave{\eta}_2)Hp\beta_2/(r_1\alpha_1D)\}(\sigma_2^{(2)}/\pi_1^{(2)}),$$

$$\grave{S}\grave{S}=\{\rho_2(\acute{\eta}_2+\grave{\eta}_2)E\beta_2/(\beta_1D)\}(\sigma_2^{(2)}/\sigma_1^{(2)}),$$

$$\acute{P}\acute{P}=\{\rho_1(\grave{\xi}_1+\acute{\xi}_1)F\alpha_1/(\alpha_2D)\}(\pi_1^{(1)}/\pi_2^{(1)}),$$

$$\acute{P}\acute{S}=\{\rho_1(\grave{\xi}_1+\acute{\xi}_1)Hp\alpha_1/(r_1\beta_2D)\}(\pi_1^{(1)}/\sigma_2^{(1)}),$$

$$\acute{P}\grave{P}=\{[b\acute{\xi}_1-c\acute{\xi}_2)F-(a+d\acute{\xi}_1\acute{\eta}_2)Hp^2/r_1^2]/D\}(\pi_1^{(1)}/\pi_1^{(2)}),$$

$\grave{P}\grave{S}=-\{(\grave{\xi}_1+\acute{\xi}_1)(ab+cd\acute{\xi}_2\acute{\eta}_2)p\alpha_1/(r_1\beta_1\mathrm{D})\}(\pi_1^{(1)}/\sigma_1^{(2)})$,

$\acute{S}\acute{P}=-\{\rho_1(\grave{\eta}_1+\acute{\eta}_1)Gp\beta_1/(r_1\alpha_2\mathrm{D})\}(\sigma_1^{(1)}/\pi_2^{(1)})$,

$\acute{S}\acute{S}=\{\rho_1(\grave{\eta}_1+\acute{\eta}_1)E\beta_1/(\beta_2\mathrm{D})\}(\sigma_1^{(1)}/\sigma_2^{(1)})$,

$\acute{S}\grave{P}=-\{(\grave{\eta}_1+\acute{\eta}_1)(ab+cd\acute{\xi}_2\acute{\eta}_2)p\beta_1/(r_1\alpha_1\mathrm{D})\}(\sigma_1^{(1)}/\pi_1^{(2)})$,

$\acute{S}\grave{S}=\{[(b\acute{\eta}_1-c\acute{\eta}_2)E-(a+d\acute{\xi}_2\acute{\eta}_1)Gp^2/r_1^2]/\mathrm{D}\}(\sigma_1^{(1)}/\sigma_1^{(2)})$.

每一系数中最后的因子是在 r_1 处求得的波函数之比。

这里我们惯用的符号适合于(9.58)中的因变量。例如，如果

$$\boldsymbol{w}_2=\begin{pmatrix}0\\1\\\grave{S}\acute{P}\\\grave{S}\acute{S}\end{pmatrix}\text{ 则 }\boldsymbol{w}_1=\begin{pmatrix}\grave{S}\grave{P}\\\grave{S}\grave{S}\\0\\0\end{pmatrix}.$$

如果两层中的一层是流体，则 16 个系数中只有 9 个是有意义的。用求极限的方法，从这里所给出的这些值可以很容易地求得它们。例如，如果层 1 是流体核，则用 $\beta_1\to 0$，$\eta_1\to\infty$ 和 $bc-abp^2/r_1^2=\rho_1\rho_2$。依此方法，将前面定义的系数 $\grave{P}\grave{P}$，$\acute{P}\grave{P}$，$\acute{P}\grave{S}$ 用于核幔边界则分别得到 $\grave{P}\grave{K}$，$\acute{K}\grave{K}$ 和 $\acute{K}\grave{S}$。

对 SH 和一个内界面的情况，其相应的结果为

$\grave{S}\acute{S}=[(\mu_2\grave{\eta}_2-\mu_1\grave{\eta}_1)/\mathrm{D}]\sigma_2^{(1)}/\sigma_2^{(1)}$,

$\grave{S}\grave{S}=[\mu_2(\grave{\eta}_2+\acute{\eta}_2)/\mathrm{D}]\sigma_2^{(2)}/\sigma_1^{(2)}$,

$\acute{S}\acute{S}=[\mu_1(\acute{\eta}_1+\grave{\eta}_1)\mathrm{D}]\sigma_1^{(1)}/\sigma_2^{(1)}$,

$\acute{S}\grave{S}=[(\mu_1\acute{\eta}_1-\mu_2\acute{\eta}_2)/\mathrm{D}]\sigma_1^{(1)}/\sigma_1^{(2)}$,

其中 $\mathrm{D}=\mu_1\grave{\eta}_1+\mu_2\acute{\eta}_2$，$\mu_1\mu_2$ 分别为界面以下和界面以上的刚性系数。

我们至终可以将我们的理论应用于某些地震体波问题了。首先，我们将研究 PcP（从核-幔边界反射的 P 波）及其连带的绕射和干涉现象。我们从 r_s 处一爆炸源 $M_{ij}=M_0(t)\delta_{ij}$ 开始，由(9.40)—(9.46)我们注意到

$$u_r^{\wedge}(r,\Delta_0,\omega)=\frac{-i\omega M_0(\omega)i\omega}{4\pi\rho_s\alpha_s^4}\int_\Gamma\omega^2p\pi^{(1)}(r_s)$$
$$\times[\alpha(r)\xi(r)\pi^{(1)}(r)]Q_{\omega p-\frac{1}{2}}^{(2)}(\cos\Delta_0)dp.\qquad(9.63)$$

这正是从 r_s 离源向下传至 r，在 (r,Δ_0) 处的直达波，如图 9.17

所示。对现在的目的，我们假设震源和接收点的深度一直向下到核幔边界，对于 ρ 和 α 都是平稳变化的剖面。就是用这个剖面定义了波函数 $\pi^{(1)}$，同时并用来区分地核剖面和地幔剖面，对此两者标以脚标 c 和 m 是必要的。我们把(9.63)称作 $u_r^{\grave{P}}$，因为正是这种类型的入射波和核幔边界发生相互作用。注意到(9.63)中和 r 的关系完全归因于被积函数因子 $[\alpha(r)\acute{\xi}(r)\pi^{(1)}(r)]$。正是这一项表现为预计的 $\boldsymbol{F}$ 中行和列的表值(在 r 处向上到达的 P 波的径向位移分量)。这说明我们用以簿记的一些新符号是适用于垂直波函数的。它还证明，在补充 9.6 中对 $\boldsymbol{F}$ 的列所得的反射系数或透射系数可直接用于(9.63)中的被积函数。

将因子 $\grave{P}\acute{P}$ 引入 (9.63)，可完全得到在核-幔边界上的广义反射

$$u_r^{P+PcP}(r,\Delta_0,\omega)=\frac{-i\omega M_0(\omega)i\omega}{4\pi\rho_s\alpha_s^4}$$
$$\times\int_\Gamma \omega^2 p\pi^{(1)}(r_s)\grave{P}\acute{P}[\alpha(r)\acute{\xi}(r)\pi^{(1)}(r)]Q^{(2)}_{\omega p-\frac{1}{2}}(\cos\Delta_0)dp, \tag{9.64}$$

这里的路径 Γ 和相关的复射线参量平面的特性如图 9.23 所示。补充 9.6 中给出了 $\grave{P}\acute{P}$，地核和地幔分别取为层 1 和层 2。虽然(9.64)的精确演算是很复杂的 (Nussezveig, 1965, 描述了一个有关的正则问题)，但当认识并理解了这个被积函数的简单性质时，这个结果是有意义的。因此，在 P 和 PcP 均可被接收到的距离 Δ_0 处 (图 9.23 a)，被积函数有两个鞍点。对于直达 P 波的具有大于 p_d 的射线参量 p，其中 $p_d=r_{\mathrm{CMB}}/\alpha_m(r_{\mathrm{CMB}})$ 适用于刚好碰到核幔边界的射线。脚标 m 代表地幔的性质。如 $p>p_d$，则 $\grave{\xi}_m\sim\acute{\xi}_m$，并且很容易表示成 $\grave{P}\acute{P}\sim1$。对(9.64)中的直达波 P 的鞍点恰和我们在 (9.41) 中先已研究过的相同。如 $p<p_d$，则(9.64)中被积函数的相位可从以下因子得到：

$$\pi_m^{(1)}(r_s)[\pi_m^{(2)}(r_{\mathrm{CMB}})/\pi_m^{(1)}(r_{\mathrm{CMB}})]\pi_m^{(1)}(r)Q^{(2)}_{\omega p-\frac{1}{2}}(\cos\Delta_0).$$

对此相位，WKBJ 理论可证明其给出 $\exp[i\omega(T-p\Delta+p\Delta_0)]$，其中的 $T(p)$ 和 $\Delta(p)$ 适合于 PcP 射线。我们前已叙述过这样的相位因子如何给出鞍点。事实上，$\partial\Delta/\partial p$ 在此情况下是正的，所给出的鞍点位置如图 9.23 c 所示。因而，在 $p<p_d$ 的范围内利用 WKBJ 理论，可证明 $\grave{P}\acute{P}$ 的振幅等于平面波的反射系数（仍是

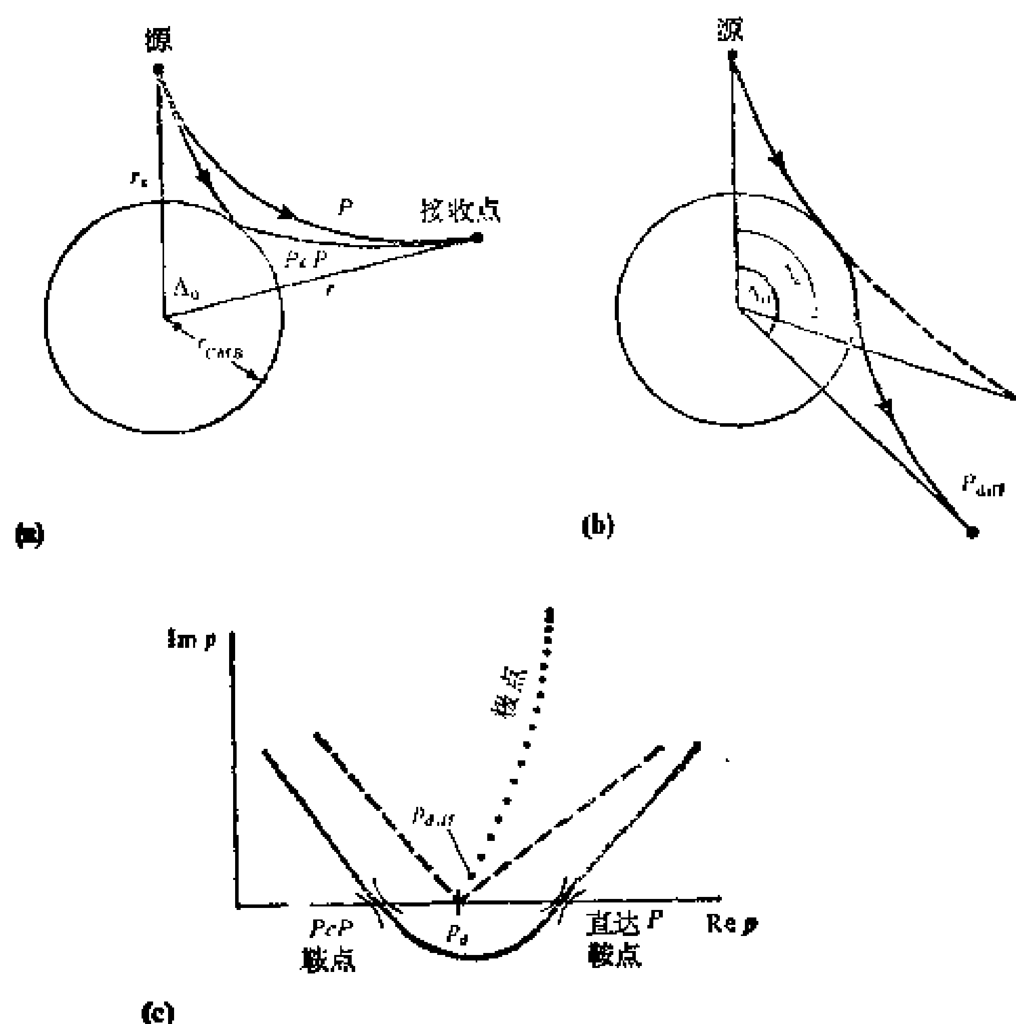


图 9.23

(a)直达波 P 和 PcP 的射线。(b)超过 Δ_d 即为影区，在影区中 P 波是衍射的。(c)相关的复 p 平面。对 $\Delta_0<\Delta_d$ 的距离，出现两个鞍点。从 p_d 向上成串的衍射极点总是存在的，但现代地震学强调沿迴线（虚线）求积分来计算(9.64)，而不是求鞍点的近似式或计算个别的留数。极点位置如补充 9.8 所述。注意，在 Δ_d 的任何一边上，对所取的距离 Δ_0 的范围内有一条路径是适用的。和图 6.22 c 所示的路径进行对比

p 的函数)。对这个 PcP 鞍点(补充 6.3)求积分，继续求出鞍点的近似式，我们将只对这个相位重新使用经典射线理论（即用几何扩散和平面波反射系数一起来描述核-幔边界处的散射)。

PcP 的这些初步讨论引出了一般规律中的一个特例：若在源和接收点之间存在一实射线，则应用于广义射线的积分表达式[参照(9.64)]的两个近似式（WKBJ 理论和鞍点近似式)的组合，将只给出几何射线理论。首先，对均匀介质，在(6.19)的推导中我们已得到了这一特性的结果。Seckler 和 Keller (1959) 对非均匀介质也给出了很多实例。当然，我们的兴趣是改进经典射线理论。当既不利用 WKBJ 近似式又不利用鞍点近似式时，我们将给出几个改进这个结果的实例。

回到图 9.23，我们看到，当 Δ_0 增加时，直达波 P 和 PcP 的射线向一起靠近，而在特定的距离 Δ_d 处，它们汇合起来．采用光学的术语，自然地称 Δ_d 为影区边界，因为它表示了范围 $\Delta^* < \Delta_0$ 的界限，在这个范围内既无直达波 P 也无 PcP 出现。如图 9.23 b 所示，在影区内到达的射线必然绕着地幔的基底蠕动。这种到达波在地震学中已广泛地被观测到，称之为衍射的 P 波（写成 $P_{衍}$)。在几何上它类似于无线电波在地球的弯曲表面上的衍射，对这一问题，Watson 最早研究过这一现在以他的名字命名的变换。在 $\Delta_0 = \Delta_d$ 时，两个鞍点在 $p = p_d$ 处汇合。在影区之内，线积分(9.64)可求得，它为一串极点（补充 9.8 中所述，$\grave{P}\acute{P}$ 的分母的零点)的留数之迅速收敛的级数，这些极点从恰在 p_d 上部的第一个极点向上延伸到第一象限中。如果接收点恰好在影区之内，以致 Δ_0 比 Δ_d 大得多，则只有第一个留数是重要的。它被定位于 $P_{衍}$处，紧挨着 p_d，此时 $p_{衍} = p_d + \lambda e^{i\pi/3}\omega^{-2/3}$，这里的 λ 是和 $p_d{}^{1/3}$ 具有同量级的正的常数。完全在影区之内时，得到衍射波 $P_{衍}$的振幅比例于

$$\exp[-\omega^{1/3}\lambda\sin(\pi/3)(\Delta_0-\Delta_d)].$$

因此，$P_{衍}$的振幅在较高频率时衰减较快，且在较大距离上进入

影区。

(9.64)的所有这些性质已由 Scholte(1956)叙述了。Phinney 和 Cathles(1969)指出，线积分(9.64) 的数值计算有很多优点。一个合适的路径是如图 9.23 c 所示的两条虚线段；在两种不同频率上的积分结果如图 9.24 所示。

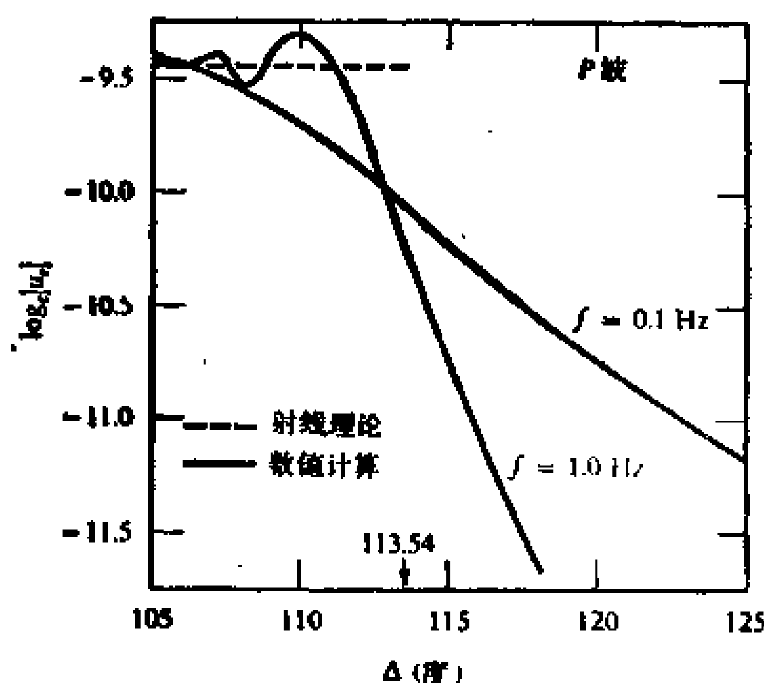


图 9.24

由一阶梯函数 $M_0(t)$的爆炸源所产生的P波位移振幅的垂直分量。在不同的频率上通过(9.64)进行了计算，积分的路径在前一图中给出（线段）。在这粗略的地球模式中，影区边界 Δ_d 为 113.54°。在 $\Delta_0<\Delta_d$ 时P和PcP相干涉。虚线仅给出直达P波的射线理论。虽然没有清晰的影区边界，在Δ_d附近，1 赫频率时的振幅随距离确实相当迅速的衰减。当进入影区较远时，可能观测到长周期波

在本节的余下部分，我们将叙述在复射线参量平面中沿着直线段所构成的路径进行数值积分的结果。但在理论上还需要一个新的环节。我们发现，当 p 在其径向自变量在一转折点的值附近变化时，往往需要计算类似 $\pi_m^{(1)}(r_{CMB},p,\omega)$的波函数。上述的即是这种情况，例如，在图 9.23 c中的 p_d 附近，还注意到几乎 $P_{衍}$ 中全部能量都具有这个射线参量。问题是，恰好在此转折点区域

中 WKBJ 近似式不再成立，如补充 9.3 所述。（图 9.34 中的计算是没问题的，因为“地幔”和“地核”是均匀的，所以用球面 Hankel 函数可精确地给出垂直波函数 $\pi^{(j)}$和 $\sigma^{(j)}$。）幸而，在很多径向非均匀的情况下，有一个 $\pi^{(j)}$和 $\sigma^{(j)}$能满足一致的渐近逼近式。在补充 9.7 中给出了简要的评述，并且在这里讲到的结果为其 Langer 近似式

$$\pi^{\binom{1}{2}}(r,p,\omega)\sim\left(\frac{\pi\rho_s\alpha_s}{2\rho\alpha}\right)^{1/2}\frac{\alpha_s e^{\mp i\pi/6}}{\omega r}\left(\frac{\omega\tau}{\alpha\xi}\right)^{1/2}H_{1/3}^{\binom{1}{2}}(\omega\tau),\tag{9.65}$$

其中 $\tau=T-p\Delta=\int_{r_p}^{r}\xi(r')dr'$ 和 $\xi=\xi(r)=(1/\alpha^2(r)-p^2/r^2)^{1/2}$。相应的垂直慢度为

$$\grave{\xi}\sim\left(\frac{1}{\alpha^2}-\frac{p^2}{r^2}\right)^{1/2}e^{-i\pi/6}\frac{H_{2/3}^{(2)}(\omega\tau)}{H_{1/3}^{(2)}(\omega\tau)}$$

和

$$\acute{\xi}\sim\left(\frac{1}{\alpha^2}-\frac{p^2}{r^2}\right)^{1/2}e^{i\pi/6}\frac{H_{2/3}^{(1)}(\omega\tau)}{H_{1/3}^{(1)}(\omega\tau)}.\tag{9.66}$$

对 $\sigma^{(j)}$，$\grave{\eta}$ 和 $\acute{\eta}$ 类似的表示式是建立在 $\beta(r)$和剪切波转折点的基础上的。

补充 9.7

垂直波函数的一致渐近逼近式

在先前对垂直波函数($g^{(1)}$，$g^{(2)}$，f，$\pi^{(1)}$，$\pi^{(2)}$，$\sigma^{(1)}$，$\sigma^{(2)}$) 的讨论中，着重点是这些函数所满足的运动方程，因此，原则上我们认为它们是 r 的函数。但为计算由点源产生的波，我们往往要研究当 r 是固定时的(源点或接收点的位置或施加的某些边界条件的水平)垂直波函数和可变的 p 和 ω。

在一适当的归一化被确定之后，对较大的 ω，当 p 和 ω 改变而计算波函数时，WKBJ 近似式(9.35)—(9.36)和 (9.60) 往往是合适的。然而，这是一个非一致逼近式，它可能太粗或者造成严重错误，当 p 值接近于一个特定的 p_r 值，这个 p_r 使径向变量 r 出现一转折点。为得到一个一致逼近式，我们将再回头讲运动方程。

下面我们将研究 $g^{(1)}$和 $g^{(2)}$，并引入作为下式的向外和向内波的两个解：

$$\frac{d^2}{dr^2}[ra(r,l)]+\omega^2\left[\frac{1}{\alpha^2(r)}-\frac{l(l+1)}{\omega^2 r^2}\right]ra(r,l)=0. \tag{1}$$

先前，当 r 在 r_p 附近变化时设法求解(1)，其关键在于对 $ra(r,l)$ 项的系数求出 Taylor 级数展开式，即把这项展开成 $r-r_p$ 的幂级数。在转折点本身范围内，这导出 Airy 函数的解，此解具有和$(r-r_p)$成比例的自变量[参照补充 9.3 中方程(5)的推导]。但这又是一个非一致逼近式，因为它仅在转折点范围才起作用。

我们将利用的一致渐近解是以 Langer(1951)和 Olver(1954 a,b)的工作为基础的。实际上，这种方法利用的是从 r 和 $\alpha(r)$ 得到的一个新的深度变量，用此变量时，在包括转折点深度在内的所有深度上方程(1)接近于 Airy 方程。我们将只叙述其结果，更详细的请读者参考 Richards(1976 b)的文献。

因此，如对 WKBJ 近似式所定义的那样，从 $\tau=\tau(r,p)=\int_{r_p}^{r}\xi dr$ 着手，我们引入了新的深度变量 $\zeta=\left(\frac{3}{2}\omega\tau\right)^{2/3}$。这里假定速度剖面是半径的解析函数，所以 r_p 也是 p 的解析函数。由此得出 ξ，τ 和 ζ 是 p 的解析函数，所以 $g^{(1)}$和 $g^{(2)}$也是解析函数。如果速度剖面不是解析的（即它可能由很多 Mohorovičić 层构成，每一层中速度由 ar^b 给出，且在层中 a，b 为常数)，则 r_p 不是 p 的解析函数，$g^{(1)}$和 $g^{(2)}$也都不是解析函数。即使如此，$g^{(1)}$和 $g^{(2)}$可能随着 p 有相当平稳的变化，以使在复平面中，对于我们的目的而言可将其作为解析函数来处理。

用 ζ，(1)可写成如下形式：

$$\frac{d^2}{d\zeta^2}\left[r\left(\frac{d\zeta}{dr}\right)^{1/2}a(r,l)\right]+\zeta\left[r\left(\frac{d\zeta}{dr}\right)^{1/2}a(r,l)\right]$$

$$=\text{频率低两个量级的项}. \tag{2}$$

当 ω 较大，右半边一律可忽略（即对所有的深度)。由此得到，$r(d\zeta/dr)^{1/2}a(r,l)$具有由 Airy 函数的线性组合构成的解，Airy 函数为

$$\mathrm{Ai}(-\zeta),\ \mathrm{Ai}(-e^{2i\pi/3}\zeta),\ \mathrm{Ai}(-e^{-2i\pi/3}\zeta). \tag{3}$$

现在，对 $a(r,l)$，我们已得到所需要的一致渐近解，对每一个特解 $g^{(1)}$(向外的波)和 $g^{(2)}$(向内的波)，仅仅还需判别 (3) 的特定的线性组合。这是很容易做的，只要对比(3) 中三个函数的 WKBJ 近似式和 $g^{(1)}$与 $g^{(2)}$的 WKBJ 近似式即可。这个对比告诉我们

$$g^{\binom{1}{2}} \sim \frac{2}{\omega r}\left(\frac{\pi \alpha_s}{\xi}\right)^{1/2} \zeta^{1/4} \mathrm{Ai}(-e^{\pm 2i\pi/3}\zeta) e^{\mp i\pi/3}. \tag{4}$$

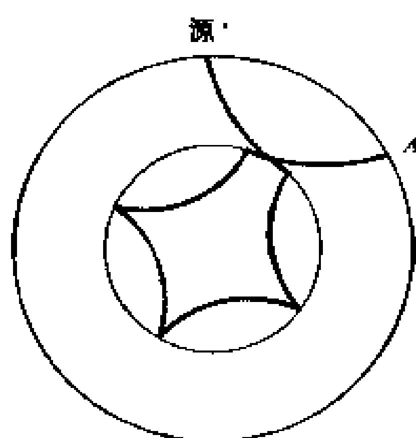
WKBJ 理论仅用于求得上述的归一化，(4) 给出了我们所需要的一致渐近逼近式。在计算上它们比 WKBJ 近似式稍有困难。两者都要求 $\tau=\tau(r, p)$，(4)以 Airy 函数为处理对象，而 WKBJ 近似式用的是指数形式。

在正文中引用的 Langer 近似式(9.65)是以前述的(4)，(9.60)以及使 Airy 函数和 1/3 次的 Hankel 函数相关的标准公式为基础的。在(4)和 (9.65) 中各个因子所需要的不同的分支切割是这样选定的，它们使各因子的乘积和 Langer 近似式本身都是一全函数(单值的和解析的)，对有限的 p 其边界处处都在 p 平面中。$g^{(1)}$的各零点位于这个平面中第一和第三象限中，而 $g^{(2)}$的各零点位于第二和第四象限中(见补充 9.8)。

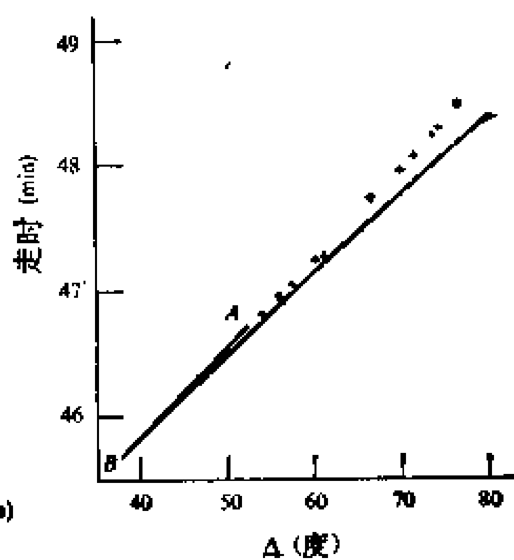
在本节余下的部分中，我们将引用地震学中体波的一些例子，其性质很容易通过类似于(9.64)在复射线参量平面中的线积分而定量地表示，但对垂直波函数却用了 Langer 近似式。

因此，现在我们来看P波，它已透射到地球的液核中，这正是一个最好的例子，它说明在低速介质(此时为液核)位于内界面以下的情况下，当波和一间断面相互作用时将可能发生什么情况。专门来研究 $P4KP$ 的例子(见图 9.25 a)，它已在大的核爆破之后观测到(Adams，1972；Buchbinder，1972)，我们的理论允许我们写出距离 Δ_0 处的径向位移

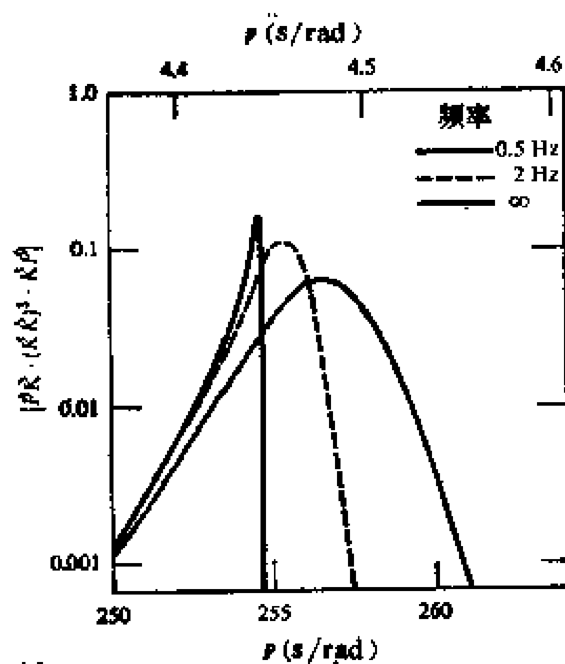
$$\begin{aligned} u_r{}^{P4KP}(r,\Delta_0,\omega) = & \frac{-i\omega M_0(\omega) i\omega}{4\pi\rho_s\alpha_s^4} \\ & \times \int_\Gamma \omega^2 p \pi^{(1)}(r_s) \grave{P}\grave{K}(\acute{K}\grave{K})^3(\acute{K}\acute{P}) \\ & \times [\alpha(r)\xi(r)\pi^{(1)}(r)] Q^{(2)}_{\omega p-\frac{1}{2}}(\cos\Delta_0)\, dp. \end{aligned} \tag{9.67}$$



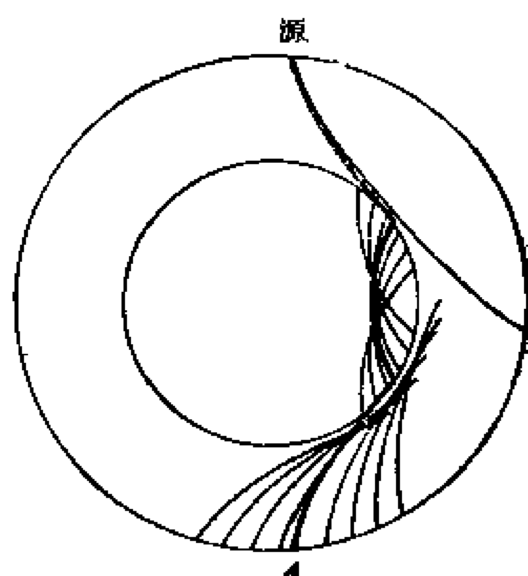
源
A
(a)



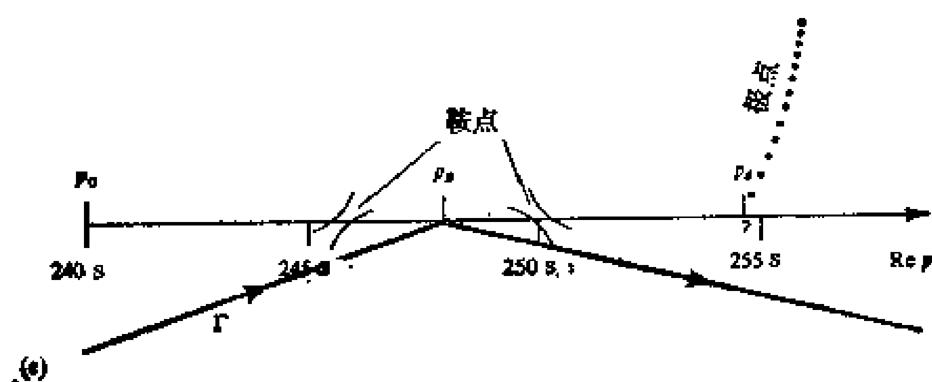
49
48
47
46
走时 (min)
A
B
40
50
60
70
80
Δ (度)
(b)



p (s/rad)
4.4
4.5
4.6
1.0
0.1
0.01
0.001
频率
0.5 Hz
2 Hz
∞
250
255
260
p (s/rad)
(c)



源
A
(d)



鞍点
鞍点
p_0
p_s
240 s
245 s
250 s
255 s
Re p
Γ
(e)

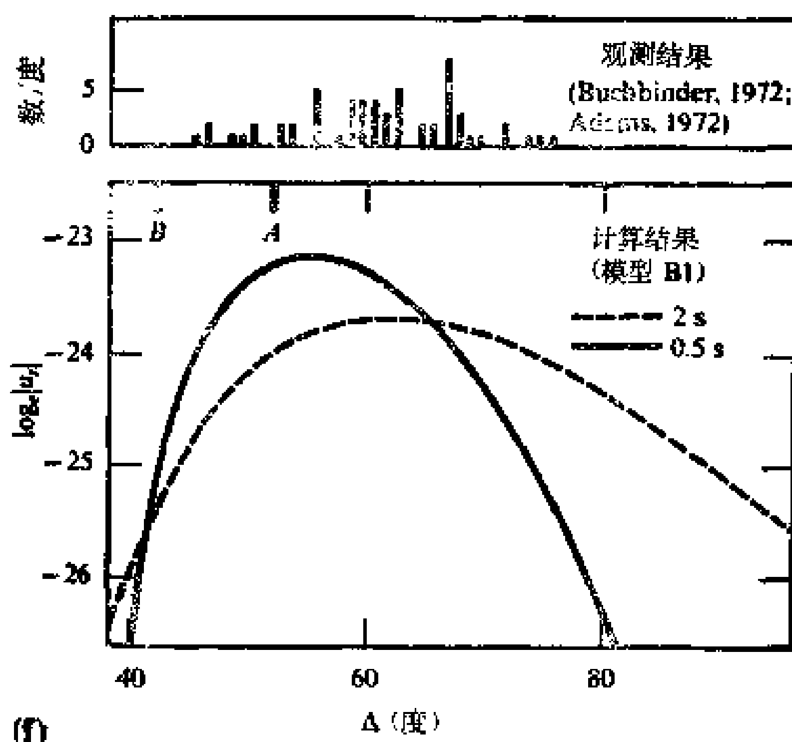


图 9.25

地幔中的 p 波在地球的核幔边界下面形成内反射，称为 $PmKP$，以整数 m 表示液核内路径的各段。(a) $P4KP$ 的射线路径。所示的射线参量刚好是地核-掠射的射线参量 p_d。对这个特殊的射线参量，$P4KP$ 在地表的出射点标成 A。根据经典的射线理论，可预期，仅当射线参量小于或等于 p_d 时才能观测到 $P4KP$。然而，情况不是这样。(b) 将 Jeffreys-Bullen 地球模型中 $P4KP$ 的走时曲线表为实线。A 处为射线参量的最大值，曲线从 A 处开始并减小，到 B 处为最小值($\Delta=\Delta(p)$ 时)，此处为一个焦散点。在 $\partial\Delta/\partial p<0$ 的分支上，射线参量连续减小。对判定为新地岛地区的核爆炸，在北美洲台站上记录所观测到的一些走时，图中以十字表示。(c) 对两个有限频率，图中示出 $P4KP$ 相关的反射系数和透射系数的乘积相对于射线参量的变化。图中亦示出了当频率趋于无限时的极限情况[当 $p_d<p$ 时它为零，而当 $p<p_d$ 时它只不过是平面波系数(5.39)的一个乘积](引自 Richards,1973)。(d) 所画最粗的射线是地核-掠射射线，在 A 处出射。在转折点以下其能量成指数衰减。因此，对射线参量稍高于 p_d 的射线，在核-幔边界会从上向下漏能。在此边界以下能量又沿实射线传播。因此，刚好在转折点以下的高速区其作用如一隔板，当以有限的频率通过它时，一些能量可进入低速带(此时即为地核)。为清楚起见，这里我们仅表示出 PKP，但对所有的 $PmKP$，都将产生这一隧道现象。能量也可通过隧道返回到地幔。在某一距离的范围上隧道将扩散能量，并且这个范围延伸到远远超过 A 点。(e) (9.67)中的被积函数在复 p 平面中的特性。在 $P=P_a$ 任何一边上的鞍点，其行为类似于 9.19 b、c 所给出的那样。当 $p=p_0$ 时 $\acute{K}\grave{K}$ 有一零值。(f) 在两个频率上 $P4KP$ 的振幅相对距离的图，这是用 Jordan 和 Anderson(1974)的地球模型 B1 按(9.67)算得的。标出了这个模型中的 A 点和 B 点，并注意其超过 A 点产生最大振幅。观测到的典型的 $P4KP$ 具有约 1 秒的周期，上半部的图是以 Buchbind(1972)和 Anderson(1972)发表的观测值为基础的直方图。计算曲线中的最大值确出现在观测数据比较多的那些距离上

这里我们用 K 作为流体核中的 P 波，所以 $\grave{P}\grave{K}$ 是透射系数（很容易从补充 9.6 给出的广义的 $\grave{P}\grave{P}$ 中得到），$\acute{K}\grave{K}$ 是内反射，$\acute{K}\acute{P}$ 是另一个透射系数。$P4KP$ 射线理论的走时曲线表示在图 9.25 b 中，新奇的是相位的观测值（在短周期 WWSSN 仪器上是很充分的，所以对应用所期望的经典射线理论其频率成分是足够高的）仅和后一分支有关。更新奇的是这些观测值主要地是在超过这后一分支“尾端”的距离上，即在截止点 A 以外，而 A 表示几何射线向外可达到的极限点。在相应于图 9.25 b 所示两个射线到达（即走时的两个分支）处的两鞍点附近，研究 P 值处的 $\grave{P}\grave{K}\cdot(\acute{K}\grave{K})^3\cdot\acute{K}\acute{P}$ 可以很好地对此现象的解释加以理解。对于频率为 $\frac{1}{2}$ 赫、2 赫，系数的乘积画在图 9.25 c 中，并且也画出了当频率趋于无限时的极限情况。当在 254.6 秒时临界的射线参量是显然的，而超过这个值时其振幅在极限情况下为零。对刚好掠过地核的地幔射线，临界值是射线参量 p_d。然而，对有限的频率，甚而当 $p>p_d$ 时，能量可顺着这个广义射线传送。这个现象称为隧道效应（引自量子力学中的现象，量子力学中有一相似的理论），并且在图 9.25 d 中给出了进一步的描述。因为有因子 $(\acute{\xi}_m+\grave{\xi}_m)\pi_m^{(2)}(r_{CMB})$，所以当 p 增加并超过 p_d 时，$\grave{P}\grave{K}$ 在数值上变得很小。用(9.62)和 $\pi^{(1)}$、$\pi^{(2)}$ 的 Wronski 行列式，则这个因子的量级为 $[\pi_m^{(1)}(r_{CMB})]^{-1}$。在转折点以下，$\pi^{(1)}$ 和 $\pi^{(2)}$ 两者都以指数增加，所以我们考察的这个因子肯定是指数衰减的。在数值上，$\acute{K}\acute{P}$ 也有类似于 $[\pi_m^{(1)}(r_{CMB})]^{-1}$ 的行为。然而，$\acute{K}\grave{K}$ 是 1 的量级。刚巧，在核-幔边界的情况下在非常接近于 $p=240$ 秒时（即对 p_d 的左边）$\acute{K}\grave{K}$ 有一个零点，而当 p 增加到接近于 p_d 时，$\acute{K}\grave{K}$ 从零迅速增加。我们必须计算的正是这个反射系数的立方，$(\acute{K}\grave{K})^3$ 的迅速增加超过了 $p_d<p$ 范围上短周期部分 $\grave{P}\grave{K}\cdot\acute{K}\acute{P}$ 的衰减，这在图 9.25 c 中以断续线和浅色线给出，实际上它在隧道效应范围内有其最大值。在计算(9.67)时对 Γ 的选择可采用如图 9.25e

所示。更简单地可采用从 $p \sim 240$ 秒到 $p \sim 265$ 秒的实轴（因为 $\acute{K}\grave{K}$ 中的零点在左边给出了自然的锥形线，在右边为一指数的锥形线，如图 9.25 c 所示）。最后，图 9.25 f 所表示的是在不同距离处对 $P4KP$ 的线积分(9.67)的计算结果。确实，这表明，在周期范围 $\frac{1}{2} \sim 2$ 秒间有最强的到达波，并且它的确位于射线理论的截止点 A 以外。这效应并不小，因为波的到达可以看得见，而从理论上却解释为在 20° 距离处（即约 2000 公里）进入“禁”区。Fuchs 和 Schulz(1976)曾指出在地壳结构中有一高速层时，对于体波此隧道效应也可能是显著的。

下面我们来研究 SKS 波和有关的多重波 $SKKS$，$SKKKS$ 等，并简化表示成 $SmKS$，m 为不同的整数。这些 SV 波是些极好的例子，它说明若快速介质位于某内界面以下时（在地幔基底的 S 波速度小于地核顶部的 P 波速度），当这些波和这个间断面相互作用时可能发生什么情况。Choy(1977)曾对这些震相利用了 Langer 近似式，对复数 p 也对实数 ω 求积分，给出了时间域上的合成地震图。

对 SV 波，首先我们来看一个震源，它不同于在本章内至今我们已考虑过的各向同性的 P 波源。可以得到显解的一个实用的源是这样的剪切位错，其走向为 ϕ_s，倾角为 λ，俯角为 δ 以及强度(即地震矩)为 $\mu A\bar{u} = M_0(\omega)$。对这样一个源，我们得到其辐射图案和几何扩散公式为(4.85)及(4.89)式。我们现今的目标是进而改进这个近似式，其水平分量为

$$u_{\Delta}^{SV}(r, \Delta_0, \phi, \omega) \sim \frac{\mathscr{F}^{SV}(-i\omega M_0(\omega)(-\cos j)\exp(i\omega T^S)}{4\pi[\rho_s \rho(r) \beta_s^5 \beta(r)]^{1/2} \mathscr{R}^S(r, r_s)}. \tag{9.68}$$

[这里出现了因子 $-\cos j(r)$，因为(4.89)给出了在 $\hat{\boldsymbol{p}}$ 方向上的振幅面我们要求的是在 Δ 增加的方向上的水平分量。] 从我们以前关于 P 波的经验，我们知道

$$\frac{i\omega}{\alpha_s^4}\int_\Gamma \omega^2 p\pi^{(1)}(r_s)[\alpha(r)\xi(r)\pi^{(1)}(r)]Q^{(2)}_{\omega p-\frac{1}{2}}(\cos\Delta_0)dp$$

$$\sim\left[\frac{\rho_s}{\rho(r)\alpha_s^5\alpha(r)}\right]^{1/2}\frac{\cos i}{\mathscr{R}^P(r,r_s)}\exp(i\omega T^P).$$

所以相应的 SV 的结果可写成

$$u_\Delta^{\lambda SV}(r,\Delta_0,\phi,\omega)=\frac{i\omega M_0(\omega)i\omega}{4\pi\rho_s\beta_s^4}$$

$$\times\int_\Gamma \omega^2 p\mathscr{F}^{SV}\sigma^{(1)}(r_s)[\beta(r)\acute{\eta}(r)\sigma^{(1)}(r)]Q^{(2)}_{\omega p-\frac{1}{2}}(\cos\Delta_0)dp. \tag{9.69}$$

此式代表在震源处向下行的 SV 波，而在(r,Δ_0)处被接收到为向上行的 SV 波。仅仅按照这个描述，我们可写出(9.69)中大多数被积函数因子。其余的因子仅仅给出归一化形式，对此利用经典射线理论是完全合适的。因此，(9.69)中的 $\mathscr{F}^{SV}$ 可由(4.85)给出为(p,ϕ)的函数：

$$\mathscr{F}^{SV}(p,\phi)\sim[\sin\lambda\cos 2\delta\sin(\phi-\phi_s)$$

$$-\cos\lambda\cos\delta\cos(\phi-\phi_s)](1-2\beta_s^2p^2/r_s^2)$$

$$+[\cos\lambda\sin\delta\sin 2(\phi-\phi_s)$$

$$-\sin\lambda\sin 2\delta(1+\sin^2(\phi-\phi_s))]\frac{\beta_s^2p}{r_s}\left(\frac{1}{\beta_s^2}-\frac{p^2}{r_s^2}\right)^{1/2}. \tag{9.70}$$

由于 (9.70) 来源于射线理论，它仅是近似的。然而，当射线的转折点正好在震源的层位以下时，对体波它有相当高的精度，这种情况对于核震相是适合的。尽管将 (9.70) 代入 (9.69) 给出了两个不同的被积函数，$\mathscr{F}^{SV}(p,\phi)$ 沿 Γ 的那些在数值上有重要的被积函数的部分可能随着 p 如此缓慢地变化，以致实际上是一常数并可移到积分之外(也见补充 9.10)。

如果从震源辐射的波，其波长和断层破裂面的空间尺度相比是非常之大，则断层活动的有限长度可对远场的地震波产生显著的影响。这是第十四章中的课题，并且在补充 14.1 中对我们介绍的理论给予了必要的修正。

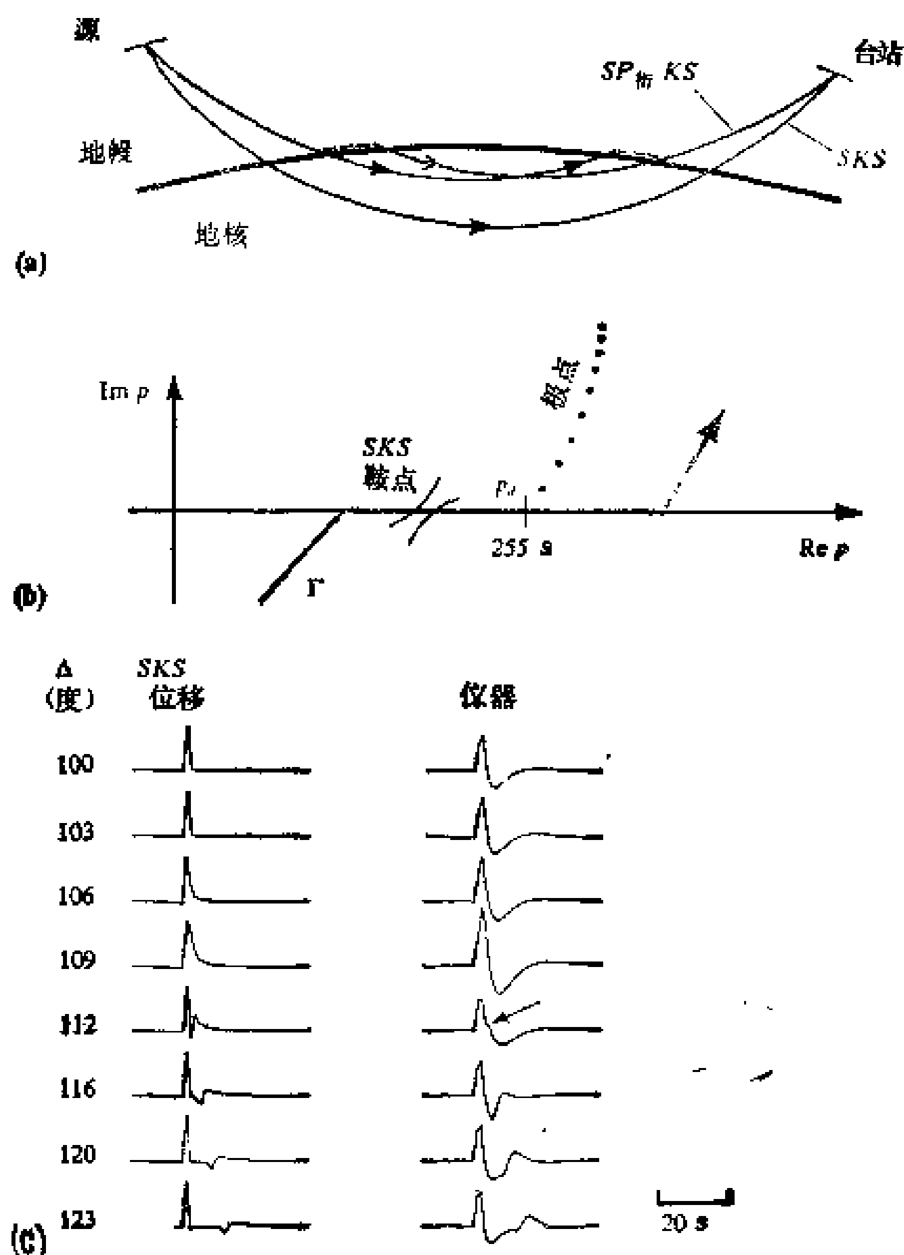


图 9.26

如果在超过100°的距离上观测到 SKS，则射线以一个慢度入射到核-幔边界上，此慢度容许入射波和在地幔基底的衍射的 P 波相耦合。我们将此震相标为 $SP_{衍}KS$，表示在（a）中。该路径上的衍射部分可在 K 支的任何一端发生。在（b）中表示的是（9.71）的积分路径，同时每逢这 SKS 的鞍点位于从 p_d 发出的诸衍射极点的左边时，$SP_{衍}KS$ 的影响将是明显为。（c）左图：在 Gilbert 和 Dziewonski（1975）的地球模型 1066 B 中，依（9.71）算出的脉冲响应。右图：在和长周期世界标准地震台网的仪器（15—100）（$T_s=15$ 秒，$T_g=100$ 秒；见 10.3.3 节）褶积后的脉冲响应。箭头表示 $SP_{衍}KS$ 的出射，这个震相的强烈影响可在超过112°时 SKS 的尾波中见到(引自 Choy，1977)

在 (9.69) 中我们得到了"入射波"的表达式，而 $SmKS$ 波是由此入射 P 波衍生的。因此，对于 SKS 有

$$u_{\Delta}^{SKS}(r,\Delta_0,\phi,\omega)=\frac{i\omega M_0(\omega)i\omega}{4\pi\rho_s\beta_s^4}$$

$$\times\int_{\Gamma}\omega^2 p\mathscr{F}^{SV}\sigma^{(1)}(r_s)\grave{S}\grave{K}\cdot\acute{K}\acute{S}[\beta(r)\hat{\eta}(r)\sigma^{(1)}$$

$$\times(r)]Q^{(2)}_{\omega p-\frac{1}{2}}(\cos\Delta_0)dp, \qquad (9.71)$$

这里的 Γ 表示在图 9.26 b 中。Choy(1977) 用 Gilbert 和 Dziewonski (1975) 的地球模型 1066 B 研究了 (9.71)。对足够大的 Δ_0，和 SKS 相对应的在实 p 轴上的鞍点可移到发源于 $p=p_d$ 的各衍射极点连线的左边。沿 Γ 求积分的效应则获自衍射极点以及鞍点的贡献。因此，(9.71) 自然而然地包含了由图 9.26 a 所描述的震相 $SP_{\text{衍}}KS$。Choy 也完成了 (9.71) 对 ω 的积分，他的一些结果表示在图 9.26 c 中。显然，当 P 沿地幔基底衍射时可能是显著的，甚至是在和长周期的世界标准地震台网 (WWSSN) 地震仪褶积之后。

补充 9.8

散射系数的极点

在补充 9.6 中得到的 16 个 P-SV 系数都有同样的因子 (1/D)，这里

$$D=(b\grave{\xi}_1+c\acute{\xi}_2)(b\grave{\eta}_1+c\acute{\eta}_2)+(a-d\grave{\xi}_1\acute{\eta}_2)(a-d\acute{\xi}_2\grave{\eta}_1)p^2/r_1^2.$$

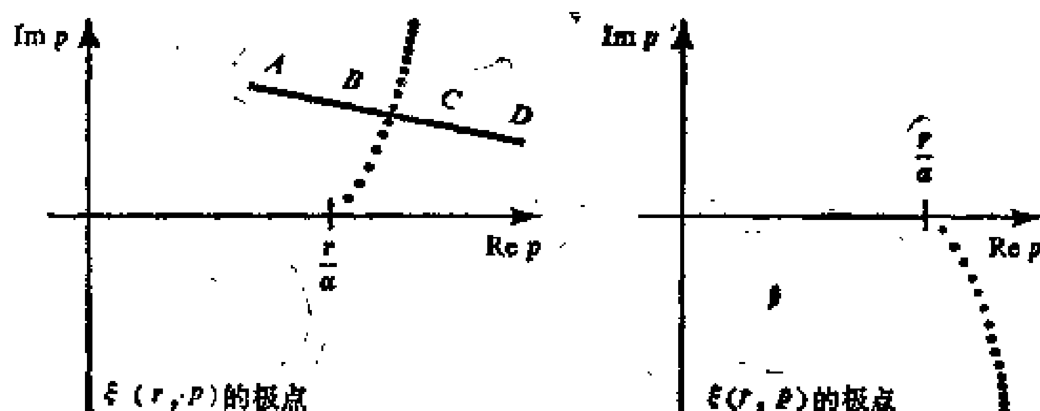
D 的零点 (当 p 变化时) 则为散射系数的极点，在复 p 平面中若路径 Γ 发生变形时必须给以特殊的考虑。

事实上，在实 p 轴上 D^{-1} 有 Stonely 极点，正如我们在平面波理论中所得到的一样 (见 (5.55) 之后的讨论)。更重要的是，D^{-1} 具有一串极点且其性质类似于我们在求解 Lamb问题中所遇到的那些分支切割。幸好，D^{-1} 的极点串的位置大约和在 D 中出现的四个量 $\grave{\xi}_1$，$\acute{\xi}_2$，$\grave{\eta}_1$、$\acute{\eta}_2$ 的极点串的位置相同。我们对符号的选择是为了强调这四个量和均匀介质平面波理论中出现的垂直慢度 $\xi=\alpha^{-1}\cos i$ 及 $\eta=\beta^{-1}\cos j$ 的相似性。[在平面波散射系数 (5.39) 中出现的 $\alpha^{-1}\cos i$ 和 β^{-1}

$\cos j$ 是由于波函数 $e^{\pm i\omega\xi t}$ 和 $e^{\pm i\omega\eta t}$ 的垂直微分而来。在 (9.62) 中我们已将它推广到有转折点的波，发现必须区分下行波和上行波的垂直慢度。]

对射线参量的实数值，$\grave{\xi}$ 和 $\acute{\xi}$ 是复数共轭的。如果 $p<r/\alpha$，则应用于 (9.62) 的 WKBJ 理论给出 $\grave{\xi}\sim(1/\alpha^2-p^2/r^2)^{1/2}\sim\acute{\xi}$。当 p 近似于 r/α 时，$\grave{\xi}$ 和 $\acute{\xi}$ 的 Langer 近似式 (9.66) 是必不可少的。当 $r/\alpha<p$ 时，$\pi^{(1)}$ 和 $\pi^{(2)}$ 成指数增大，但 $\pi^{(1)}+\pi^{(2)}$ 却是指数减小。由此得出 $\pi^{(1)}\sim-\pi^{(2)}$ 以及 $\grave{\xi}\sim-\acute{\xi}\sim-i(p^2/r^2-1/\alpha^2)^{1/2}$。

更一般的是，这可能表明 $\grave{\xi}$ 和 $\acute{\xi}$ 是 p 的解析函数，其奇异点的位置如前两图所示。在 r/α (r) 附近这一串极点离开实 p 轴。$\acute{\xi}$ 的这些极点是 $H^{(1)}_{\omega p}$ (ωr) 的零点[见 (9.66)]，并且它们位于因要求 $r=r(\gamma,\ p)$ 为实数而给出的线（称为 Stokes 线）附近。离开奇异点，则 $\acute{\xi}\sim(1/\alpha^2-p^2/r^2)^{1/2}$。例如，对像下图所示的 AB 线，这个近似式可能是准确的。若当趋近于奇异点的连线时，则近似式不能用——如果 BC 位于或接近于一串极点之一则根本不能用。在穿过奇异点连线之后，则 $\acute{\xi}\sim-(1/\alpha^2-p^2/r^2)^{1/2}$ 并且发现其符号发生了变化，该平方根给出了横切分支切割的现象。对于 $\grave{\xi}$，因为 $ABCD$ 没有穿过奇异点的连线，则 $\grave{\xi}\sim(1/\alpha^2-p^2/r^2)^{1/2}$ 对整个路径是准确的，并且在 B 和 C 之间没有经历跳跃。

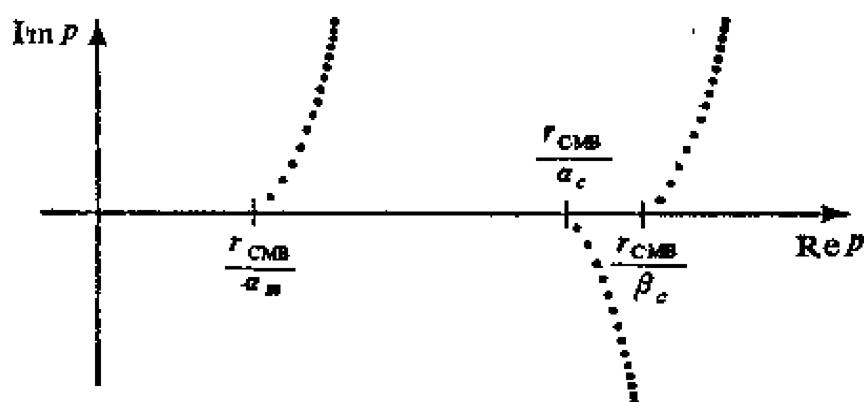


在第三象限中，也有 $\acute{\xi}$ 的极点，而在第二象限中有 $\grave{\xi}$ 的极点，它们是由于这里所示的原点（甚而 $\grave{\xi}$ 和 $\acute{\xi}$ 在 p 中）的映像而得到的。

和第一象限中 $\acute{\xi}$ 的极点交织在一起的是 $\acute{\xi}$ 的零点。因为 $\acute{\xi}$ 的极点

和零点两者均处于同一条广义线上，且沿此线 $\acute{\xi}$ 经历了振幅的迅速变化。因此，在第一象限中 $\acute{\xi}$ 的有理函数沿这同一条线也有极点和零点。地震学中的散射系数是几个垂直慢度的典型的有理函数，每一个都是建立在不同的速度剖面上($\grave{\xi}_1$，$\acute{\eta}_2$ 等)。

对于核-幔边界，$\alpha_m=\alpha_2>\alpha_c=\alpha_1>\beta_m=\beta_2$ 和 $\beta_1=0$。于是分母 D 变成 $b^2\grave{\xi}_c+bc\acute{\xi}_m-d(a-d\grave{\xi}_c\acute{\eta}_m)\acute{\xi}_m p^2/r^2_{CMB}$ D^{-1} 的极点位于 $\grave{\xi}_c$、$\acute{\xi}_m$ 和 $\acute{\eta}_m$ 的极点附近，如下图所示。



和核-幔边界相联系的散射系数 $\grave{P}\hat{K}$，$\acute{K}\grave{K}$，$\grave{S}\grave{K}$ 等的极点。由于 D 是 p 的偶函数，故在第二和第三象限中也有极点，它们得自这里所示的原点的映象。

对 (9.71) 仅只引入 $(\acute{K}\grave{K})^{m-1}$ 而修改了 $SmKS(m=2,3,\cdots)$ 的表达式，以便考虑 $(m-1)$ 次的内反射。图 9.27 表示的是几个这样的射线和一个适当的积分路径。有一个问题是明显的，$S(m+1)KS$ 是在 $SmKS$ 的尾波中到达，因此，在地震图上看到的脉冲形状是由很多多次反射的迭加而构成。Choy(1977)发现，$SKKS+SKKKS+SKKKKS+\cdots$ 的收敛性是很慢的，甚至在发生 SKS 的临界距离（~62°）以外几千公里的距离上亦如此。然而，它们是一个重要的多次反射系统，因为它们对液核最外部的速度是敏感的。Choy 还发现，在此区域内 1066 B 模型的速度需要适当加以修正，在图 9.28 中对于 1066 B 地球模型绘出了合成地震图与观测曲线之间的对比，但在地核最外部 200 公里内具有一绝热的速度梯度。

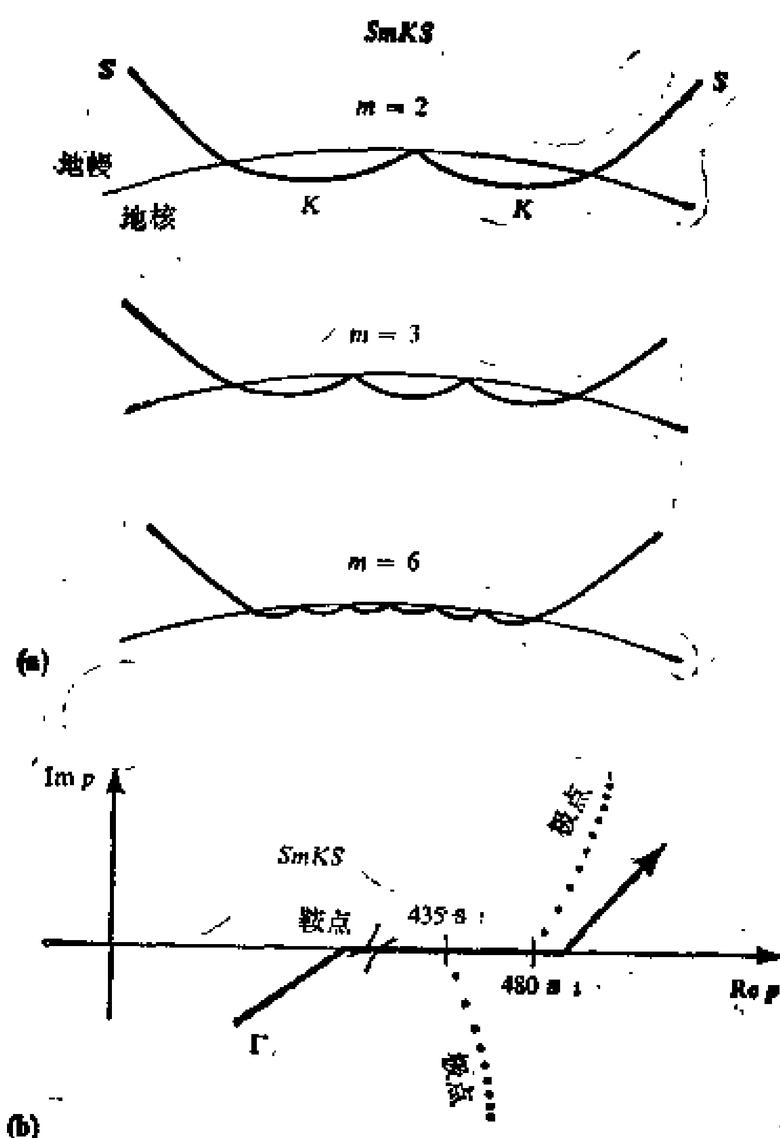


图 9.27

SKKS，*SKKKS* 等位于 *SKS* 的尾波之中。(a) 当 *K* 的支数增加时，这些多次反射的转折点愈来愈高。将因子 $(\acute{K}\grave{K})^{m-1}$ 引入(9.71)中，则得到了 *SmKS* 的表达式。(b) 从 $p=435$ 秒左右向下有一极点串（和在液核顶部的 *P* 波转折点相关），同时从 $p=480$ 秒左右向上也有一极点串（地幔基底的 *S* 波转折点），此二者对所示的积分路径产生了影响

当快速介质位于间断面以下时（如果速度不随深度如此快地减低，则转折点不会在下面的介质中出现），那么总是要产生象 *SmKS* 这样的多次反射级数的缓慢收敛问题。这对地球中的内

界面是很经常的情况，由多次反射共同构成的波称为相干首波(Červený and Ravinda, 1971)。在图9.29中给出了其射线系，且其实例多见于海洋沉积层中、成层地壳中(Hill, 1971 a,b)、甚而可能于上地幔中、当然还有核震相中。维持这些射线的介质，经典上称之为耳语廊(Whispering gallery) (Rayleigh, 1910)。如果接收点的位置取在近于临界距离上，则多次反射系的收敛性可能会是很差的。

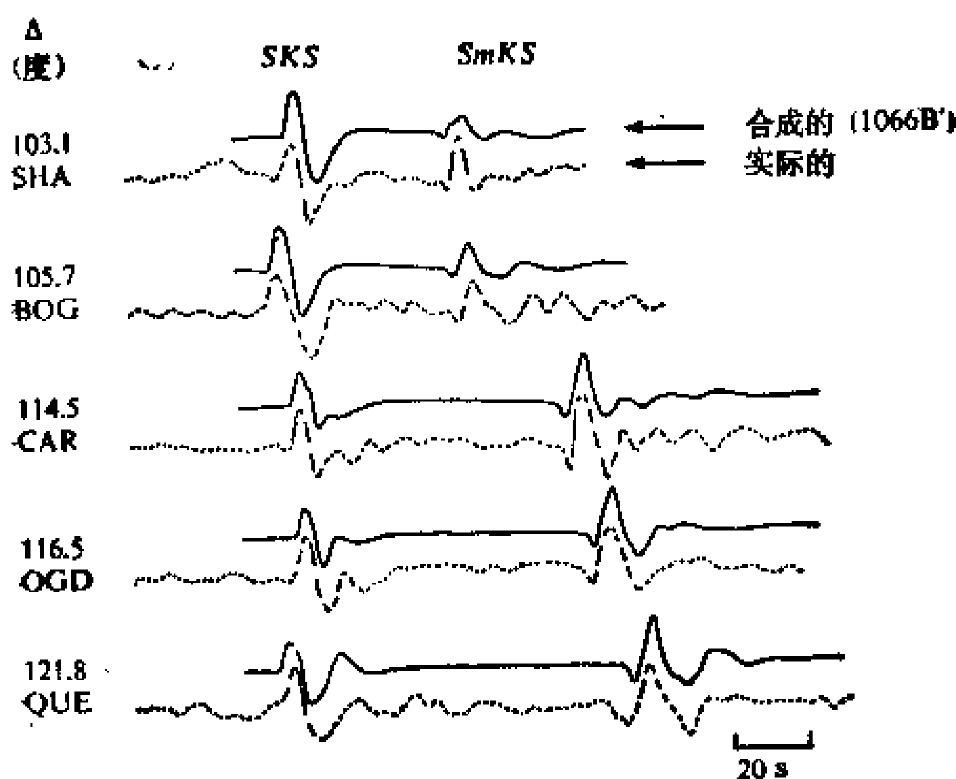


图 9.28

对1973年7月21日斐济深震，合成地震图（用1066 B模型计算，但以Jeffreys给出的速度代替液核最外部200公里处的速度加以修正)和观测地震图之间的对比。注意到 SKS 的脉冲形状随距离的变化（可能）是由于 $SP_{衍}KS$ 的原因。还注意到，对于 $SmKS$ 中相干的多次反射，在合成地震图和观测地震图之间具有令人满意的一致性。Choy将 $m=2$ 到 $m=15$ 相加以取得这些合成地震图，并且发现有一个符合 $SmKS$ 数据要求的绝热外核（类似Jeffreys的核）(引自Choy, 1977)

Cormier和Richards(1977)曾表明，克服困难的一个好办法

是将所有的多次反射一起考虑在内直接计算此表示式。他们研究的地球物理问题实际是这样的P波问题，P波穿过地球的外液核和内固核、并且在内核和外核的内界面上（其半径为r_1）出现相干首波。图 9.30 a 中给出了PKP的走时曲线，它也有$PKiKP$的一条分支CD（从r_1反射）；$PKIKP$的一条分支DF（在r_1以下为一单个的透射支）；和$PKIIKP$的一条分支。$PKiKP$中反射系数的原有符号为$\grave{K}\acute{K}$，它和穿过r_1的透射符号相类似。

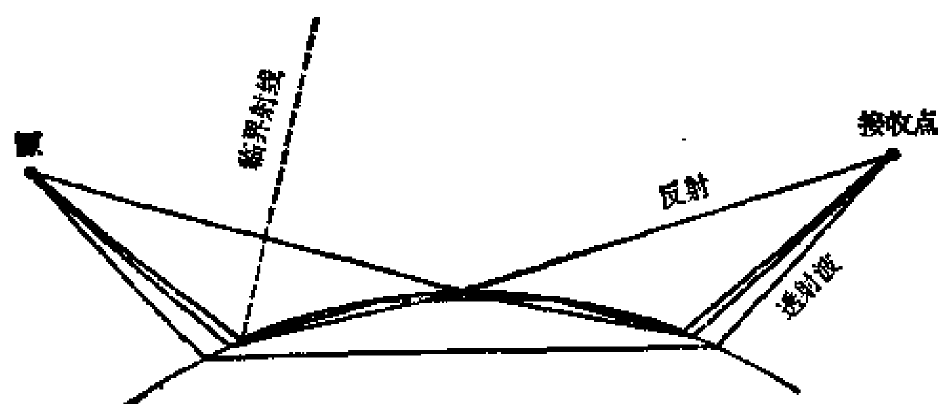


图 9.29

两介质间一内界面，快速介质在下边。对位于临界射线以外的接收点，在源和接收点之间有无穷个射线路径。由此多次反射之射线族构成的波是相干首波。图中也示出了反射射线。当接收点移向临界射线时，所有射线路径的走时将趋于共同的极限。这里我们给出了弯曲的内界面和直的射线。然而，相干首波可在非均匀介质（具有弯曲射线）之间的内界面上形成，即对图 9.27 a 所示的射线迭加而成。快速介质的最上部分在这里起波导作用，其效应类似于在一耳语廊中所得到的效应

因此，在图 9.29 中所示的整个射线族以下式描述：

$$\grave{K}\acute{K}+\grave{K}\grave{I}\cdot\acute{I}\acute{K}+\grave{K}\grave{I}\cdot\acute{I}\grave{I}\cdot\acute{I}\acute{K}+\cdots=\grave{K}\acute{K}+\frac{\grave{K}\grave{I}\cdot\acute{I}\acute{K}}{1-\acute{I}\grave{I}}. \tag{9.72}$$

这个几何级数的求和类似于我们先前叙述过的在平面波理论中的多次反射问题(9.18)—(9.19)。

对$\grave{K}\acute{K}$，$\grave{K}\grave{I}$，$\acute{I}\acute{K}$，$\acute{I}\grave{I}$的每一个在推导中曾假定散射到下部介质中的能量仅仅是下行波的能量。事实上，当固层 1 上面有液层 2 时，从补充 9.6 得

$$\grave{K}\acute{K}=\frac{[\rho_1(1-2\beta_1^2p^2/r_1^2)^2\grave{\xi}_2-\rho_2\grave{\xi}_1+4\rho_1\beta_1^4(p^2/r_1^2)\grave{\xi}_2\grave{\eta}_1\grave{\xi}_1]\pi_2^{(2)}}{[\rho_1(1-2\beta_1^2p^2/r_1^2)^2\acute{\xi}_2+\rho_2\grave{\xi}_1+4\rho_1\beta_1^4(p^2/r_1^2)\acute{\xi}_2\grave{\eta}_1\grave{\xi}_1]\pi_2^{(1)}},\tag{9.73}$$

对固核的P波波函数，在这里仅仅通过$\grave{\xi}_1$表现出来，确实，对下行波这是合适的垂直慢度。但如图 9.29 所见到的，这个下行波($\pi_1^{(2)}$)很快就转向成为一个上行波($\pi_1^{(1)}$)，因为在内界面以下不远处即为转折点。因此，当一P波从液核向下入射时，对其下部介质的波函数代之以$\pi_1^{(1)}+\pi_1^{(2)}$是合适的，因为就是这个波函数正确地描述了贯穿整个液核的幅度。如果在固核中使用这个新的波函数，则需修正反射系数$\grave{K}\acute{K}$，且其固有符号为$\grave{K}(\check{I})\acute{K}$。满足内界面上的边界条件，我们得到

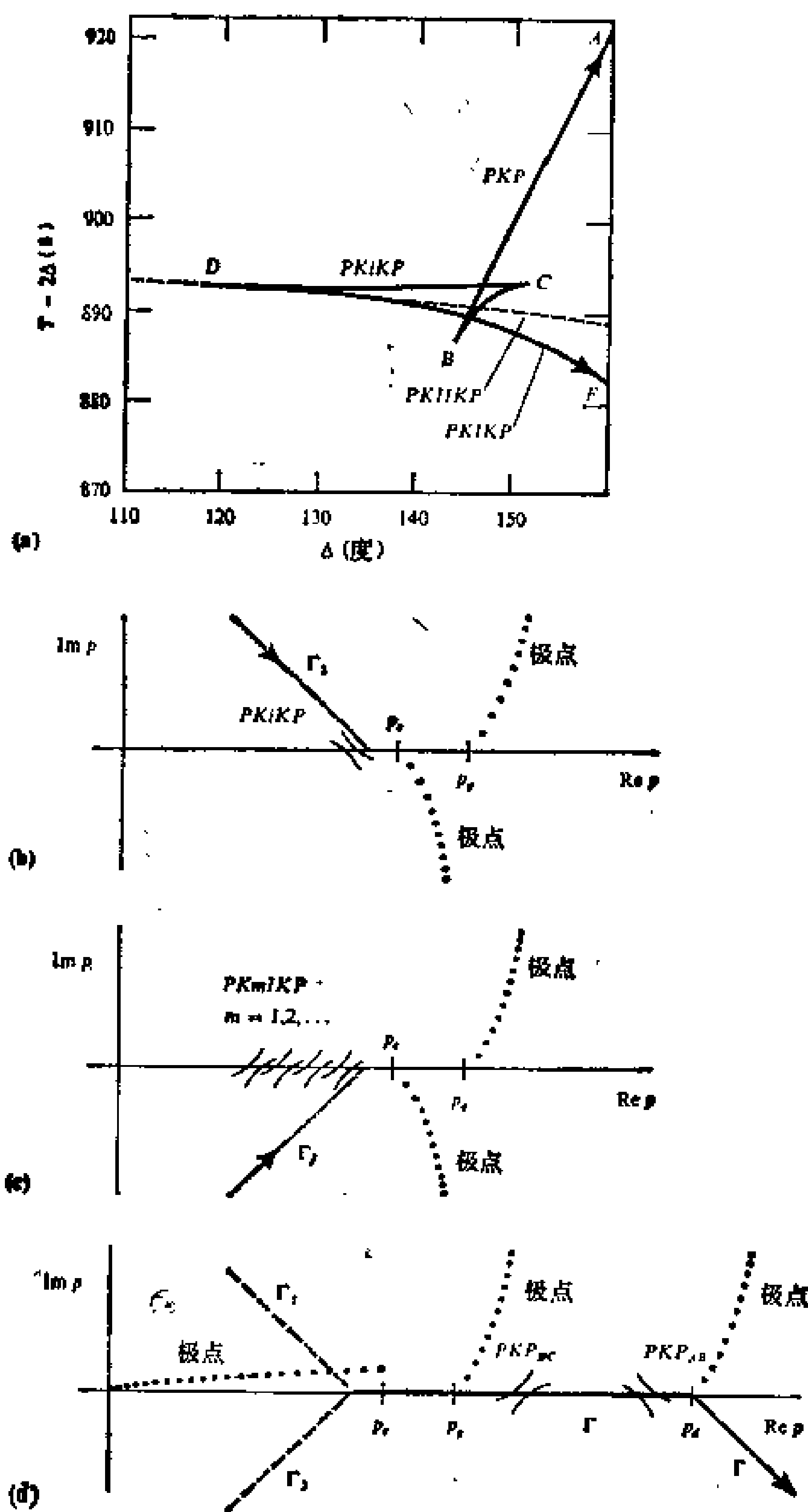
$$\grave{K}(\check{I})\acute{K}=\frac{[\rho_1(1-2\beta_1^2p^2/r_1^2)^2\grave{\xi}_2-\rho_2\check{\xi}_1+4\rho_1\beta_1^4(p^2/r_1^2)\grave{\xi}_2\grave{\eta}_1\check{\xi}_1]\pi_2^{(2)}}{[\rho_1(1-2\beta_1^2p^2/r_1^2)^2\acute{\xi}_2+\rho_2\check{\xi}_1+4\rho_1\beta_1^4(p^2/r_1^2)\acute{\xi}_2\grave{\eta}_1\check{\xi}_1]\pi_2^{(1)}},\tag{9.74}$$

其中
$$\check{\xi}_1\equiv\frac{1}{-i\omega(\pi_1^{(1)}+\pi_1^{(2)})}\frac{d}{dr}(\pi_1^{(1)}+\pi_1^{(2)}).\tag{9.75}$$

我们的这个新的反射系数$\grave{K}(\check{I})\acute{K}$具有两个重要特性。第一，经某些代数运算之后，它可表成

$$\grave{K}(\check{I})\acute{K}=\grave{K}\acute{K}+\frac{\grave{K}\grave{I}\cdot\acute{I}\acute{K}}{1-\acute{I}\grave{I}},\tag{9.76}$$

因而这个单个的系数解释了图 9.29 中出现的所有射线。将$\grave{K}(\check{I})\acute{K}$展开成(9.72)左边的一些项，即为虹霓展开式（有时称为 Debye 展开式）之一例，如此命名是因为在虹霓理论中出现有与此类似的展开。(事实上，空气中水的折射率和地核相对地幔的折射率相似，在地震学中和虹的相似现象是$PKKP$的焦散。)当界面以下的介质比上面的慢时，作虹霓展开往往是恰当的，这是因为在下面的介质中产生的多次反射将不会相互干涉。一个例子是$PCP+PKP+PKKP+\cdots$，每一个透射波都可分开进行研究。然而，当下面的介质较快时，作这个展开则往往是不合适的。



920
910
900
890
880
870
T - 2Δ (秒)
A
PKP
D
PKiKP
C
B
PKIIKP
PKIKP
F
110
120
130
140
150
Δ (度)
(a)
Im p
Γ_1
PKiKP
极点
p_e
p_g
Re p
极点
(b)
Im p
极点
PKmIKP
m = 1,2,...
p_c
p_d
Re p
Γ_2
极点
(c)
Im p
Γ_1
极点
极点
极点
PKP$_{BC}$
PKP$_{AB}$
p_e
p_e
Γ
p_d
Re p
Γ_2
Γ
(d)

图 9.30

$\grave{K}(\check{I})\acute{K}$ 第二个重要特性是关于在复 p 平面中极点的位置。以前，对于 $\grave{K}\acute{K}$，有和 $\grave{\xi}_1$ 相关的极点系，且它趋向于向下进入第四象限中(补充 9.8)。但定义 $\acute{\xi}_1$ 的新比例，刚好在实 p 轴之上、在 O 与 $r_1/\alpha_1(r_1)$ 之间有一些极点和零点串，并且正是在这里找到了 $\grave{K}(\check{I})\acute{K}$ 的极点。

由具有地震矩 $M_0(\omega)$ 的一个点剪切位错产生的 P 波通过内核时的表达式，现可写成

$$u_r^{PKP}(r,\Delta_0,\phi,\omega)=\frac{-i\,\omega\,M_0(\omega)i\,\omega}{4\,\pi\rho_s\alpha_s^4}$$
$$\times\int_\Gamma\omega^2 p\mathscr{F}^P\acute{\pi}^{(1)}(r_s)\acute{P}\grave{K}\cdot\grave{K}(\check{I})\acute{K}\cdot\acute{K}\acute{P}$$
$$\times[\alpha(r)\acute{\xi}(r)\pi^{(1)}(r)]Q^{(2)}_{\omega p-\frac{1}{2}}(\cos\Delta_0)dp. \qquad (9.77)$$

这里的辐射图案是从(4.84)得到的，$\mathscr{F}^P$ 通过下式依赖于走向 ϕ_s，倾向 δ 和倾角 λ：

$$\mathscr{F}^P=\sin\lambda\sin 2\delta+[\cos\lambda\sin\delta\sin 2(\phi-\phi_s)$$
$$-\sin\lambda\sin 2\delta(1+\sin^2(\phi-\phi_s))]\alpha_s^2p^2/r_s^2$$
$$+2[\sin\lambda\cos 2\delta\sin(\phi-\phi_s)$$
$$-\cos\lambda\cos\delta\cos(\phi-\phi_s)]\frac{\alpha_s^2 p}{r_s}\left(\frac{1}{\alpha_s^2}-\frac{p^2}{r_s^2}\right)^{1/2}. \qquad (9.78)$$

称(9.77)为广义的 PKP 波是正确的，因为它说明了由于 P 波在核幔内界面上向下透射一次和向上透射一次所产生的所有的压缩波震相。对于远在内核之上有转折点的P波，则(9.77)中的因子 $\grave{K}(\check{I})\acute{K}$ 近似为 $+1$，并且内核的影响是可以忽略的。甚至它

广义的 PKP。(a) PKP 的走时曲线以及在内核和(或)外核边界上有关的反射和透射。(9.77) 中的数值积分是从描述干涉波的单项中分离出 $PKiKP$ 的贡献之后加以处理的。因此，(9.77)中的 $\grave{K}(\check{I})\acute{K}$ 通过(9.76)分开成两项。(b) 依(9.77)中的 $\grave{K}\acute{K}$，对路径 Γ_1 进行积分。(c) 依(9.77)中的 $(\grave{K}\check{I}\cdot\acute{I}\acute{K})/(1-\acute{I}\check{I})$，对路径 Γ_2 进行积分。在每一情况下，都有趋向于向下进入第四象限的极点 (p_C 是临界射线参量，它相当于在固核顶部具有转折点的射线；p_E 是掠射射线的射线参量，这条射线在液核底部有转折点)。(d) 时余下的路径，两个被积函数被组合在一起成为一项，它比例于 $\grave{K}(\check{I})\acute{K}$。和 $\grave{\xi}_1$ 相关的极点已被和 $\acute{\xi}_1$ 相关的极点所取代。对 p_C 的右部，$\grave{K}(\check{I})\acute{K}$ 趋向于 $+1$，因而(9.77)定量地表示了 PKP 的 AB 和 BC 分支

还说明了在近于142°处 PKP 中的焦散。如图9.30 b，c，d 所示，假若被积函数可分成两部分并沿分开的路径求积分，则当P值较低时，干涉首波可正确地给以定量表示。

用等价于(9.77)的表达式，Cormier 和 Richards(1977)已计算了 Dziewonski 等(1975)的参量化的地球模型中的 PKP。他们的结果在图9.31中，并和图9.32中的观测数据进行了对比。

显然，对越来越复杂的体波已经建立了类似(9.77)的被积函数。因为相应于(9.58)—(9.59)的传播矩阵可用封闭的形式写出，所以甚至对地壳和上地幔的分层影响是能够解释的。用这个方法，可能计算漏能模式以及同一时间窗内到达的其它震相。例如，我们来考虑一SV波，当其射线参量接近于770秒/弧度，并从下面入射到壳-幔内界面上时将会发生的情况。这是接近临界值的情况，此时P波刚好在 Moho 界面以下水平传播，到达地表一接收点的各种可能的射线如图9.33所示，这包含了耳语廊效应。还知道，地壳能够维持漏能模式，它叫作PL模式，在这个模式中，P波能量在 Moho 界面以下随深度指数衰减但SV波的能量是向下辐射的。相应的基频的震相其慢度(射线参量)仅仅略高于$SP_{箭}$的慢度(见图9.33 e)，所以这个漏能模式也可能由图9.33中入射的SV波激发。这已被 Oliver(1961)标记成剪切-耦合PL，Chander 等(1968)以及 Poupinet 和 Wright(1972)给出了这个震相一些最突出的例子并讨论了对此震相如何才能有效地激发。Frazer(1977)已说明怎样才能求得一个单个的被积函数来描述图9.33中的全部震相加上地壳中的多次反射以及剪切-耦合PL波，他曾对实数p和实数ω作了积分，得到了合成的记录曲线部分，如图9.34所给出的。从 Moho 界面所受的边界条件来讨论散射到地幔中的波，他对下行波SV使用了波函数$\sigma^{(2)}$，而对P波使用了$\pi^{(1)}+\pi^{(2)}$。这类似于图9.29—9.32中处理耳语廊现象的方法。他用 Moho 界面和表面之间的传播矩阵以及施加在自由表面上的边界条件，考虑了地壳中的混响。Frazer 可以

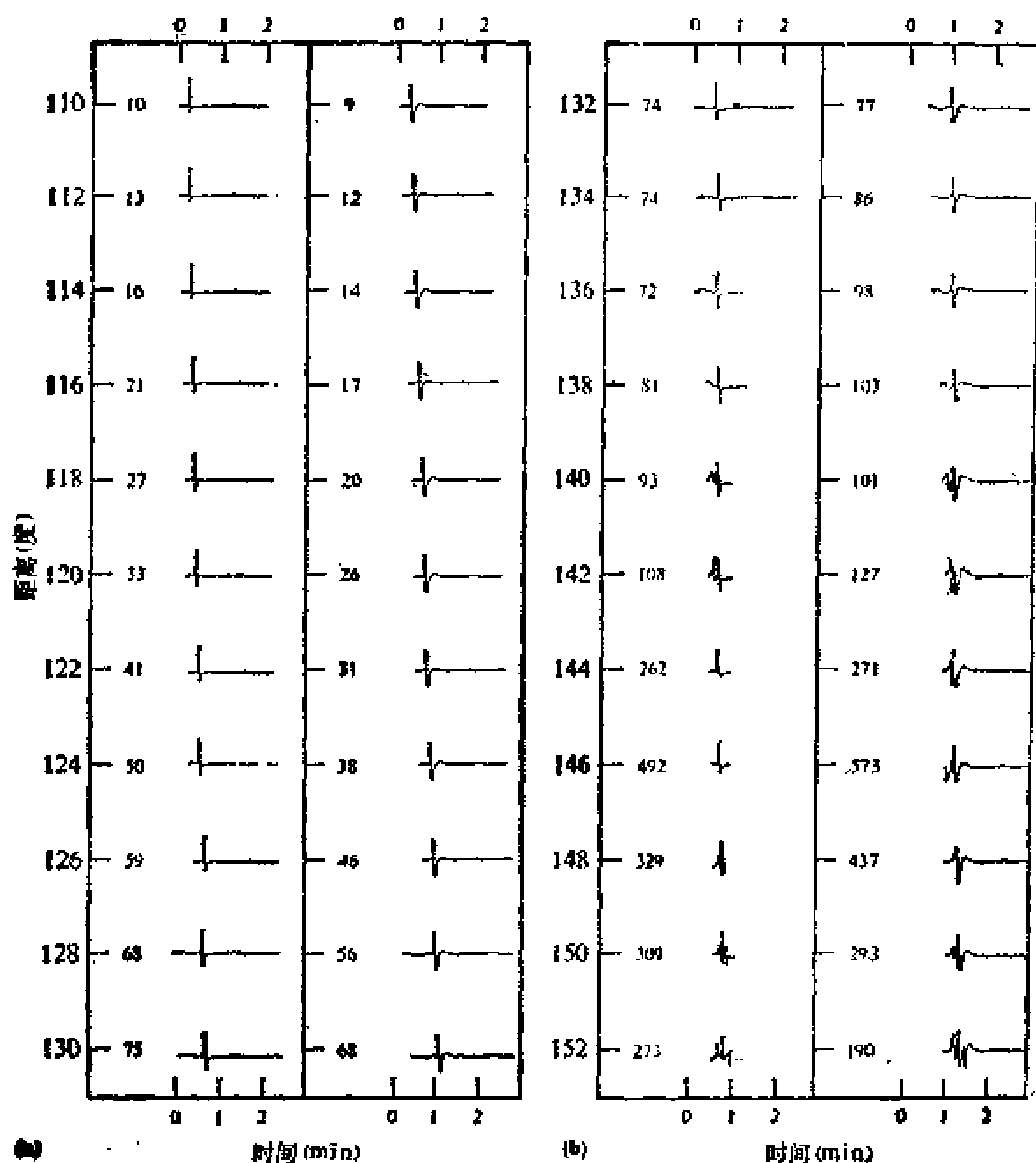


图 9.31

(a)和(b)的左图：*PKP* 的脉冲响应，这是对 Dziewonski 等(1975)的参量化地球模型(PEM)通过(9.77)算出的。(a)和(b)的右图：对15—100（长周期）秒的世界标准地震台网垂直向仪器的响应褶积后的脉冲响应。响应左边的数值表示随距离连续增加时其相对的振幅。注意在穿过120°附近的临界点时波形不变。临界点的位置仅只影响振幅。先到的长周期震相在134°—140°中是明显的，并且在143°处和 *PKP*(图 9.30 a，点 *B*) 的焦散有关。在138°—152°中的复杂脉冲是如图 9.30 a 所示的全部到达波之间互相干涉的结果（引自 Cormier and Richards, 1977)

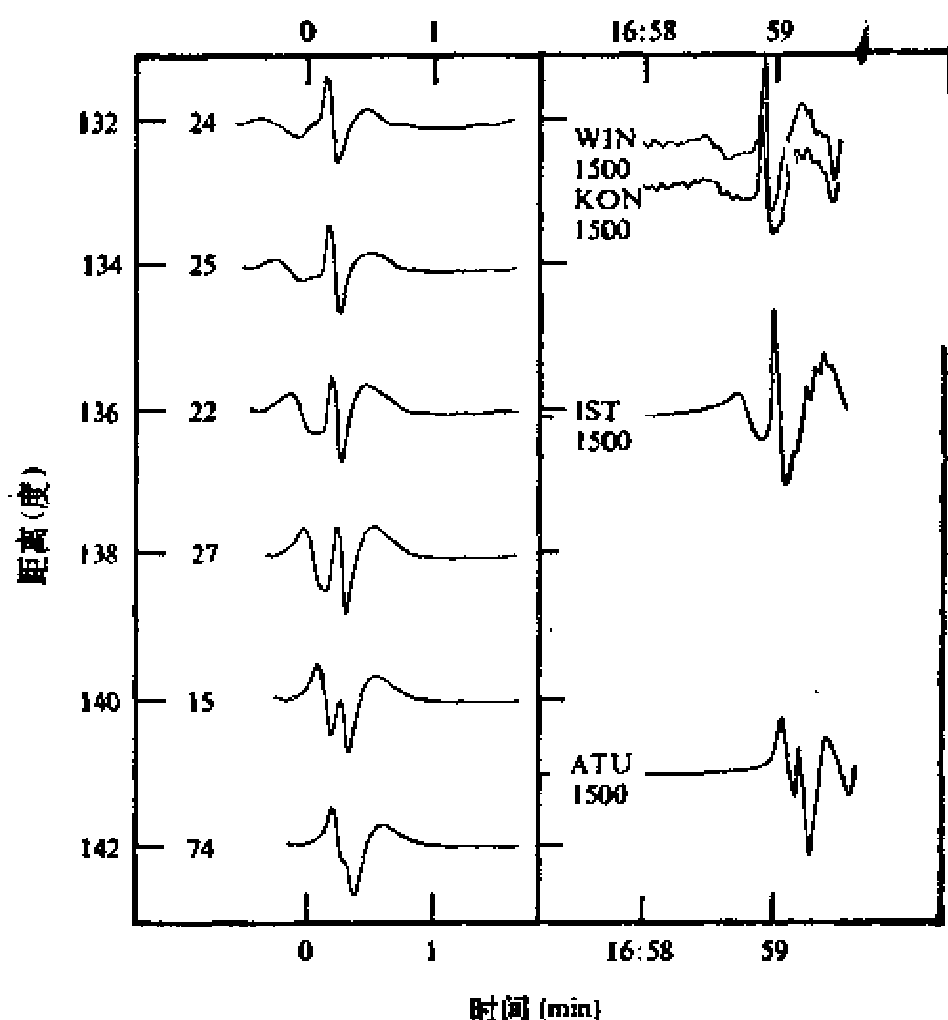


图 9.32

对 1964 年 7 月 9 日一次地震，合成地震图(左边所示)和观测图(右边所示)之间的对比(引自 Cormier and Richards, 1977)

证明突出的剪切-耦合 PL 波要求一个取向合适的源以及地幔中接近 650 公里的深度处有一异常高的剪切速度梯度。因为在实际地震图中不包含有 $SP_{衍}$ 震相，如同在图 9.34 中合成图那样，Frazer 推断，P 波速度在 Moho 界面以下必然随深度而减小。如果它减小得相当快 $(d\alpha/dr > \alpha/r)$，则水平行走的射线将折射向下，图 9.33 的耳语廊是不存在的，而对在 Moho 界面以下散射的 P 波，只要 $\pi^{(2)}$ 就够了。

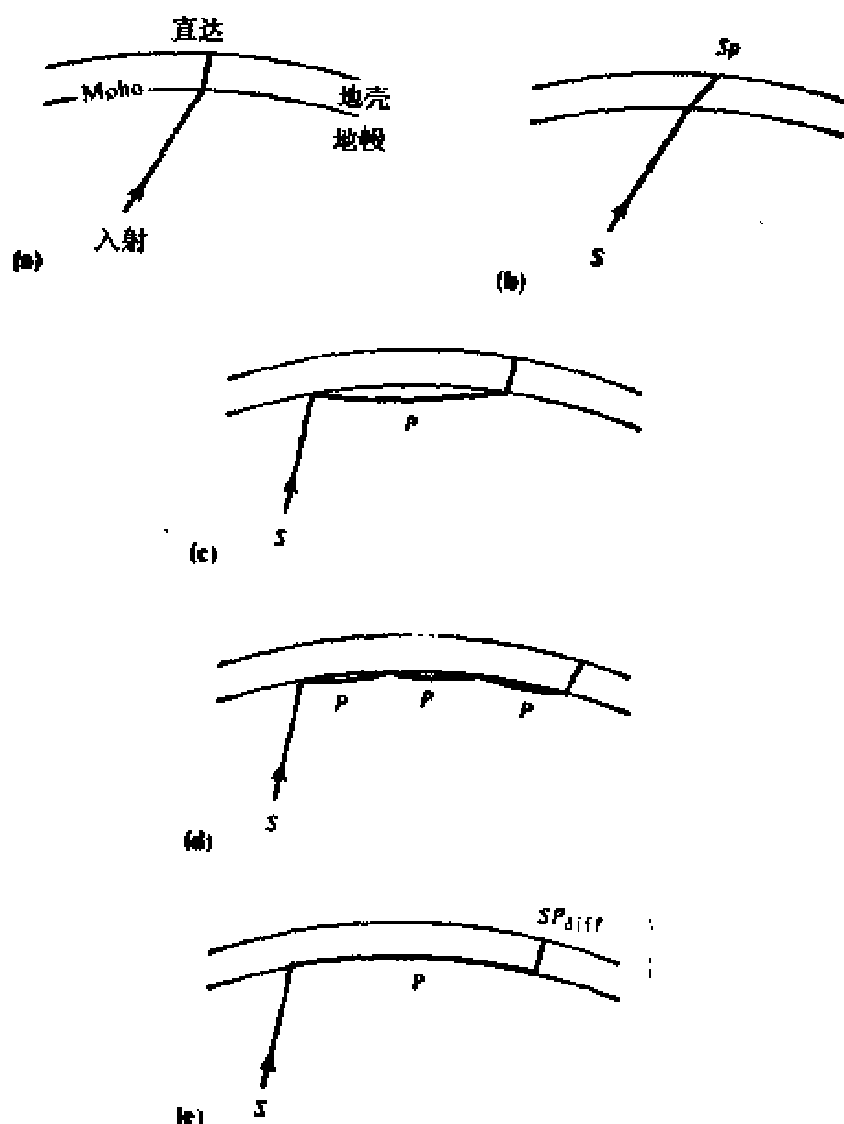


图 9.33

SV 以某一角度入射到 Moho 界面上，其射线路径接近于地幔顶部形成的沿水平向传播的 P 波路径。(a) 直达 S 波（地壳中的SV）。(b) 在地壳内以 P 传播的波，这个波的到达标以 S_p。它稍早于直达 S 波而到达，并已由 Jordan 和 Frazer (1975) 详细地描述过。(c) 包括了地幔中如 P 波那样的单支（地壳中的路径可能为 P 或 S)。(d) 地幔中 P 波的三支。(e) 地幔中 P 的支数可无限地增加，直到极限情况（在射线参量的临界值处）射线路径成为水平的。Frazer (1977) 将地表上有关的到达波标记为 $SP_{衍}$。它包括了通过地壳时迭加在一起的 P 和 S 射线，并且实际上它包括了如 (c) 和 (d) 的整个射线族，形成了一个相干首波。对一给定的点源和一给定的接收点，(a)—(e) 所有的射线路径可能和地壳中的混响一起出现，尽管在一般情况下，每一特定的射线将具有略为不同的射线参量

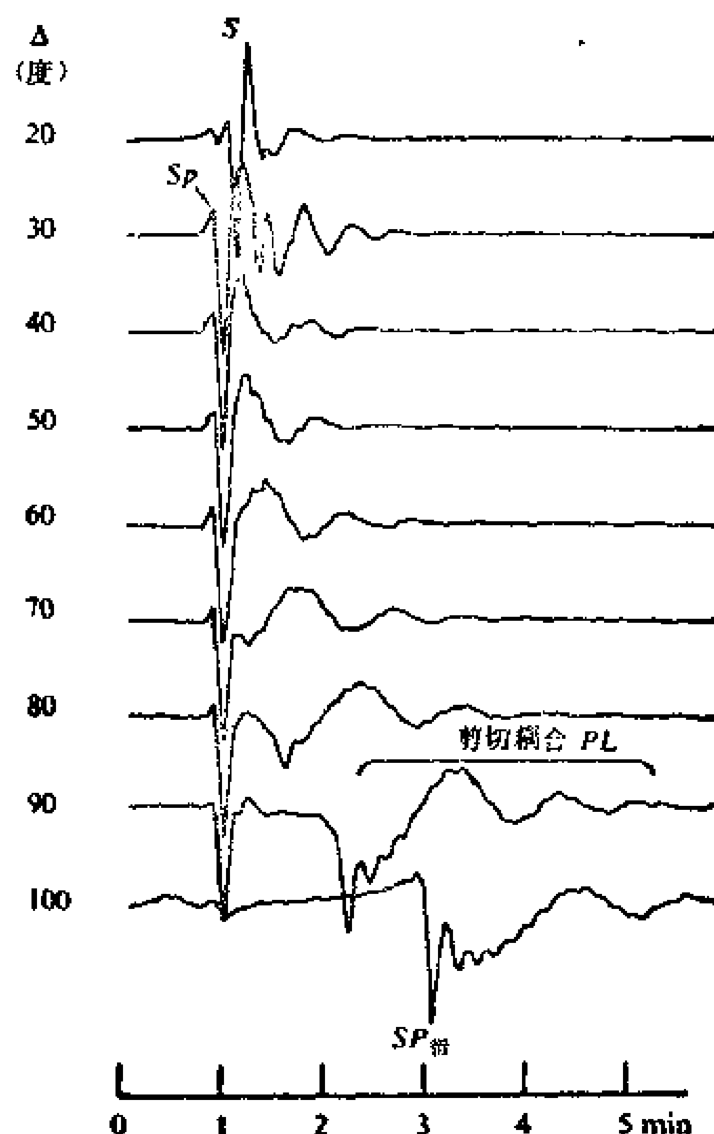


图 9.34

表示震相成分的部分记录，对地壳层上部自由表面上一接收点，这些震相组成了复杂的 SV 到达。在地幔中主要的 SV 路径上，在震源和接收点之间有一单个的转折点。将恰在 Moho 界面以下的 P 波速度取为常数，这就形成了一个很有效的耳语廊，由较大的 $SP_{折}$ 的到达可看到这一点。这里计算的是运动的水平分量，在不同距离 Δ 处的波形经过时移，以便将初至波对齐（引自 Frazer，1977）

9.6 不同方法之间的对比

虽然我们这里所提到的理论的不同部分若干时间以来已为人

们知悉，只是在过去的几年中，我们为求解实际结构中精确的体波脉冲形状所做的努力，已开始取得了比经典射线理论更大的成功。我们已发现将它们分成三种计算方法是方便的：(i) 对无转折点的广义射线的 Cagniard 反演，(ii) 保持全部多次反射的双重积分（对实慢度和实频率），(iii) 对非均匀介质中广义射线（可能有转折点）的双重积分（对实的或复的慢度以及对实频率）。从第三种方法我们已得到了 WKBJ 地震图，且在实际中这种解具有 Cagniard 反演的某些特性。虽然这些大概是目前地震学中正在使用的主要方法，但在某些应用上，它们可能或是被简正振型（如第八章中所述）的直接求和所代替，或是被 Alekseyev 和 Mikhaylenko (1976) 方法所代替。在后一方法中，对运动方程应用了空间水平变换，只剩下对深度和时间的偏微分方程。对很多水平波数的值，这是由有限差分图解求得的，然后计算了其反空间变换（对水平波数的数值积分）以给出合成的部分记录。

应当认识到，在竖向非均匀介质中，波的传播理论仍是一个研究领域，至今还不清楚我们所强调的这些主要方法其中哪一种对给定的问题是适宜的。因而，在每一方法中，使用者必须对如何运用一种特定方法做一些仔细地选择。本章的后一部分中，我们将简要地叙述每一方法的成功和失败以及使用者在研究过程中所必须作的选择。

首先，我们注意到 Cagniard 方法和 Fuchs 方法对平面均匀层已经有了发展。在球形地球中它们的应用需要一些预备性的讨论，这在补充 9.9 中已给出。而且两种方法的每一种，必须在如何以一成层模型来逼近给定的非均匀地球模型的方式上做出主要地选择。实际上粗糙的分层显著减少了计算的费用，但却损失了精度。要决定什么样的层厚度是适宜的，当然这取决于所要求的精确结果的频率范围。

对宽频带脉冲形状，Cagniard 方法和 WKBJ 地震图有其固有的优点，因为响应（除褶积之外）是在时间域计算的。当脉冲

振幅随时间迅速变化时，这一变化的细节用沿 Cagniard 路径在空间上相近的一些点上采样的方法很容易进行研究。

如果对很多不同的距离计算脉冲形状，则 Fuchs 方法和 Scholte 方法有一固有的优点，因为同样的积分路径可适用于很多不同的距离，而对每一距离，Cagniard 路径（和 WKBJ 地震图的等效路径）必须被重新确定［应当认识到，所谓“Cagniard 方法”我们指的是把很多单个点的作用汇集起来的一种方法。例如，Wiggins 和 Helmberger (1974) 已给出了计算的细节。Fuchs 的反射法也由其最初的公式被扩展了。例如，Kind (1978) 修正了这方法，使其在源上部和源下部处理层内的混响成为可能。他还能使衰减、面波和漏能模式等效应结合起来。利用 (9.58) 的解和补充 9.6，推广 Fuchs 方法进而去处理非均匀层内所有的多次反射是可能的。而所谓“Scholte 方法”，大体上适用于第 9.5 节中汇总的几个方法的整个范围，它是以复射线参量和实频率的积分为基础的。这里的这个方法改进了 WKBJ 近似式，有时称之为“全波理论”。］

补充 9.9

地球展平变换和近似式

在 7.2 节和 9.2 节中我们说明了如何求得和利用运动应力向量

$$\begin{pmatrix} u_\phi \\ \tau_{\phi z} \end{pmatrix}$$

以求解

$$\frac{d}{dz}\begin{pmatrix} u_\phi \\ \tau_{\phi z} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 1/\mu(z) \\ k^2\mu(z)-\omega^2\rho(z) & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_\phi \\ \tau_{\phi z} \end{pmatrix}. \quad (1)$$

这是 SH 波的方程，求解此方程的矩阵法已高度发展了，特别是当介质是以大量均匀平面层近似时。举例来说，反射法已作出了这个近似式。

然而，我们现在的兴趣是

$$\frac{d}{dr}\begin{pmatrix} W \\ T \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{1}{r} & \frac{1}{\mu} \\ \frac{\mu(l-1)(l+2)}{r^2}-\omega^2\rho & -\frac{3}{r} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} W \\ T \end{pmatrix}, \tag{2}$$

在球面几何中，此式等价于（1）。我们的兴趣还在于相应的 P-SV 方程。幸而，Andrianova 等（1967）以及 Biswas 和 Knopoff（1970）已求得了（2）的变换，它严格地给出了方程（1）。因而，反射法在球面几何中可不以近似的形式应用（不是以很多薄层代替随深度变化的 $\rho(z)$ 和 $\mu(z)$，并也不截断其积分 $\int_0^\infty dk\int_0^\infty d\omega$ 的区间）。然而，对 P-SV 问题，球波动方程和笛卡尔波动方程之间的变换不可能作得很精确，因而引入了新的近似式。

首先，我们将描述 SH 变换。为了方便，和球形介质有关的量利用下标 s，如 μ_s、ρ_s、β_s，而对展平的成层介质（即和 z 有关）中的量用下标 f。给定剖面有 μ_s、ρ_s 及序数 l，我们欲将对

$$\begin{pmatrix} W \\ T \end{pmatrix}$$

的方程（2）变换成对

$$\begin{pmatrix} u_\phi \\ \tau_{\phi z} \end{pmatrix}$$

的方程（1）。

新的深度变量 z 由下式定义：

$$e^{-z/a}=\frac{r}{a}, \tag{3}$$

其中 a 为任意方便的半径（通常取为整个地球的半径）。新的速度剖面由下式定义：

$$\alpha_f(z)=\frac{a}{r}\alpha_s(r),\qquad \beta_f(z)=\frac{a}{r}\beta_s(r). \tag{4}$$

新的因变量和密度由下式定义：

$$\begin{pmatrix} u_\phi(z) \\ \tau_{\phi z}(z) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} (a/r)W \\ -(r/a)^3T \end{pmatrix},\quad \rho_f(z)=\left(\frac{r}{a}\right)^5\rho_s(r), \tag{5}$$

现在可将（2）表成下式：

$$\frac{d}{dz}\begin{pmatrix} u_\phi \\ \tau_{\phi z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1/\mu_f \\ \frac{(l-1)(l+2)}{a^2}\mu_f - \omega^2\rho_f & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \mu_\phi \\ \tau_{\phi z} \end{pmatrix}. \tag{6}$$

显然，如果新的水平波数定义为

$$k^2 = (l-1)(l+2)/a^2. \tag{7}$$

则对 (1) 的变换是完全的。

(3) 和(4) 的一个令人满意的特性是沿球形介质中射线的走时和相应的展平问题中的走时近于相等。因此，从(9.21)得

$$T_s = \int \frac{dr}{\beta_s(1 - p_s^2\beta_s^2/r^2)^{1/2}}$$

$$= \int \frac{dz}{\beta_f\left[1 - \frac{\left(l + \frac{1}{2}\right)^2\beta_f^2}{\omega^2 a^2}\right]^{1/2}} \quad \left(用\ l + \frac{1}{2} = \omega p_s\ 和(3)\ 和(4)\right). \tag{8}$$

而从(9.20)得

$$T_f = \int \frac{dz}{\beta_f\left[1 - \frac{(l-1)(l+2)\beta_f^2}{\omega^2 a^2}\right]^{1/2}} \quad (用\ k = \omega p_f\ 和(7)). \tag{9}$$

事实上，如果射线参量的变化很小，则 (8) 和 (9) 是相同的，因为 $\left(l + \frac{1}{2}\right)^2 = l^2 + 1 + \frac{1}{4}$ 而 $(l-1)(l+2) = l^2 + l - 2$。因此，变换(3)和(4)保持着波传播的运动学的性质。而变换(5) 则严格地保持着在两介质中波传播的动力学性质。

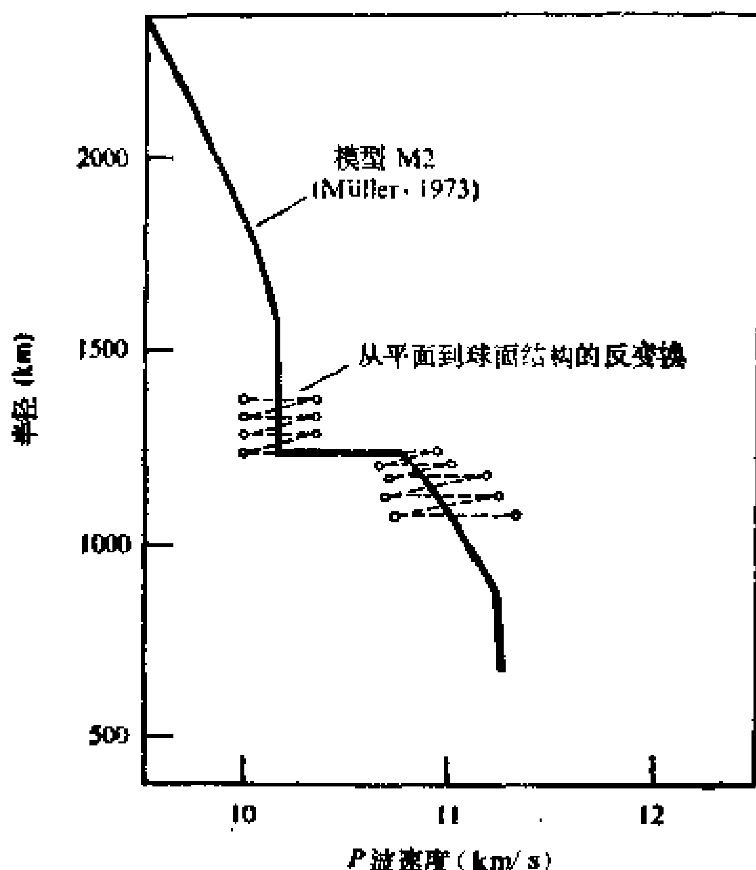
转向 P-SV 问题，我们似乎应当能将(9.56)严格地变换成(5.60)。显然，因为对 P-SV 波，它们仍保持其运动学特性，所以人们利用同样的变换(3) 和(4) 处理 SH。然而，Chapman(1973，1974)已发现，对因变量和密度，要得到一个将严格保持 P-SV 的动力学特性的变换是不可能的。他描述了类似于(5) 的各种变换的影响，并且，如果将得自依赖于 z 的介质的波解用来导出依赖于 r 的介质的解，Chapman 已求得由此而引起的误差的渐近性质。总之，这些误差是 ω^{-1} 的量级，有趣的是此误差和用 Langer 近似式中第一项导出的误差有同样的量级，这就是我们用 (9.65) 和 (9.59) 去求解球面波动方程

(9.56)的原因。因此，虽然 Langer 近似式没有专门地利用地球展平变换，但它引入的误差（在低频处）可能和球面几何中对 P-SV 波引进 Cagniard 方法及 Fuchs 方法中的展平误差有同样的大小。由于这些原因，对某些问题而言，球面波动方程（9.56）的数值积分可能是不可避免的。

一旦已经作了运动学变换(3)和(4)，则 Cagniard 和 Fuchs 方法将以均匀叠层代替依赖于 z 的剖面。我们来看看下列这点是有意义的，即一旦所作的变换回复到球面几何中时这个分层将会如何表现。对 P 波剖面，我们由(4)求得

$$\alpha_s(r)=r\alpha_f/a, \tag{10}$$

因此在每一层中 α_s 是正比于 r 的(α_f 是分段常数)。这里的图中给出了一个例子，可以看到，甚至当最初的速度剖面是均匀的时候（即接近 1500 公里半径），在已变换的介质中精细的分层仍是需要的。事实



实线给出 Müller(1973)球模型 M 2 中内核和(或) 外核边界附近的 P 波速度。虚线给出了反变换结构，它等价于平面均匀叠层(引自 Müller, 1977)

上，(10)的速度梯度是精确的，因为对这个梯度，射线和局部垂线之间的夹角是不变的。即 $di/dr=0$，从具有特定速度剖面(10)的(9.24)可以看出这一点。通过任意给定的层，射线与局部垂线将有相同的夹角，这是我们可预计的运动学特性，在均匀平面叠层中它也是对的。由此得出，沿着图内非均匀层中的射线没有转折点出现。在 Cagniard 方法和 Fuchs 方法中，由于非均匀叠层内不同射线之间的干涉，则 9.5 节中和转折点附近波函数有关的全部现象必定会出现。

如果衰减很强烈，这意味着 $Q^{-1}\gg1$，但这些波是传播了很多个波长而衰减的，所以 Fuchs 和 Scholte 方法的原理实际没有变，被定义的速度剖面本身是复杂的[见(5.88)]。然而，Cagniard 方法和 WKBJ 地震图不容易适应由于某种原因引起的衰减，除非使用以经典射线理论为基础的专门方法。

不同的方法，在问题的处理上差别极大，被合成的波在转折点附近受到地壳结构的影响。正是这种体波似乎具有很大的地球物理意义，因为速度剖面的异常特性似乎对其射线路径的底部接近异常结构的体波影响是最强烈的。换一种说法：包含某些速度异常最大信息的波是这样一种波，它在异常附近消耗的时间最长。因此，它们将是在异常的深度处水平行走的波(即在那里有其转折点)。对这些问题，Cagniard 和 Fuchs 方法是不同的，因为前者是以广义射线为基础的(保留几百以上是不实际的)，而后者是在规定的深度范围内和规定的慢度范围内 ($dT/d\Delta$)，包含了所有的多次反射。这些方法在图 9.9 中作了对比。

按照 Scholte 方法，处理转折点的计算和窄角度的反射问题没有差别。然而，很重要的是要能够精确地计算垂直波函数。正是这个事实表现出 WKBJ 地震图对掠射的入射问题变得不准确。不管所用的是 Langer 近似式还是运动方程的数值积分，用内插速度(在地球模型中)的精确方法必然对计算的脉冲形状产生一些影响。最普通地是将地球模型中不同深度的密度值以及 P 波和 S

波的速度列成表，但是地球物理学家没有关于如何求得中间深度处这些值的一致方法。通常是用线性内插，或用规律 ar^b（在一给定的层内，a 和 b 为常数）。地球展平变换和在 Cagniard 与 Fuchs 方法中使用的均匀平面迭层一起是另一种内插形式（见补充 9.9 中的图）。直到作为地球模型之基础的不同的内插规律的影响完全定量化以前，对一个特殊的问题，要确定哪一种计算体波地震图的方法是最合适的，也许是不可能的。

补充9.10

矩张量和广义射线

对一个用二阶矩张量客观描述的地震点源，关于面波和地球的简正振型将如何激发已给出了专门的结果。这里我们给出相应的体波激发公式。

当我们根据几何射线理论得到(4.91)的辐射图案时，对求得体波的激发我们已作了初步探讨。用离源角 i_ξ(对 P 波)或 j_ξ(对 S 波)描述射线的离源方向，则对 P 波、SV 波和 SH 波其关键因子可写成为

$$(P)\quad \gamma\cdot\dot{\mathbf{M}}\cdot\gamma-\sin^2 i_\xi[\cos^2\phi\dot{M}_{xx}+\sin 2\phi\dot{M}_{xy}+\sin^2\phi\dot{M}_{yy}-\dot{M}_{zz}]$$
$$+2\sin i_\xi\cos i_\xi[\cos\phi\dot{M}_{xz}+\sin\phi\dot{M}_{yz}]+[\dot{M}_{zz}],\qquad(1)$$

$$(SV)\quad \hat{p}\cdot\dot{\mathbf{M}}\cdot\gamma=\sin j_\xi\cos j_\xi[\cos^2\phi\dot{M}_{xx}+\sin 2\phi\dot{M}_{xy}+\sin^2\phi\dot{M}_{yy}$$
$$-\dot{M}_{zz}]+(1-2\sin^2 j_\xi)[\cos\phi\dot{M}_{xz}+\sin\phi\dot{M}_{yz}],\qquad(2)$$

$$(SH)\quad \hat{\phi}\cdot\dot{\mathbf{M}}\cdot\gamma=\sin j_\xi\left[\frac{1}{2}\sin 2\phi(\dot{M}_{yy}-\dot{M}_{xx})+\cos 2\phi\dot{M}_{xy}\right]$$
$$+\cos j_\xi[\cos\phi\dot{M}_{yz}-\sin\phi\dot{M}_{xz}].\qquad(3)$$

这些公式用了第四章的符号，这里将它们进行整理以表明和矩张量元素一定的组合的关系。在建立广义射线的理论时，在该理论中和特定的射线路径有关的体波的解是以对射线参量的积分给出的。表示式(1)、(2)或(3)的其中之一将成为被积函数中的一个因子。对Cagniard 方法，对 9.2 节中给出的反射法，对 WKBJ 地震图以及还对(因为可能修正，下面要讲到)9.6节中叙述过的全波理论法，这一点将是正确的。这些方法的共同点是都要确定所感兴趣的射线路径究竟是离源向上还是向下。为说明广义 **M** 的步骤，我们将利用对 SH 的全波理论

并且着眼于 $S+ScS$ 波(在地核的影区中变成 $S_{衍}$)。因此，在频率域中我们可写成

$$u_{\phi}^{S+ScS}(r,\ \Delta_0,\ \phi,\ \omega)=\frac{-i\omega}{4\pi\rho_s\beta_s^4}\int_{\Gamma}\omega^2 p(\hat{\phi}\cdot\dot{M}\cdot\gamma)\sigma^{(1)}(r_s)$$
$$\times\grave{S}\acute{S}\sigma^{(1)}(r)Q^{(2)}_{\omega p-\frac{1}{2}}(\cos\Delta_0)dp. \quad (4)$$

看一下(9.64)或(9.69)即能够写出这个表示式来。$\grave{S}\acute{S}$ 是 ScS 的反射系数(对 SH)，并且 Γ 是非常类似于图 9.23 c 所表示的一个路径。这里我们的兴趣是在于(4)中和震源有关的因子，为得到它和射线参量的关系，我们注意到(1)—(3)可写成

$$(P)\qquad \gamma\cdot\dot{M}\cdot\gamma=(p\alpha_s/r_s)^2[\cos^2\phi\dot{M}_{xx}+\sin 2\phi\dot{M}_{xy}+\sin^2\phi\dot{M}_{yy}$$
$$-\dot{M}_{zz}]+2(p\alpha_s^2/r_s)\varepsilon\xi_s[\cos\phi\dot{M}_{xz}+\sin\phi\dot{M}_{yz}]+[\dot{M}_{zz}]. \quad (5)$$

$$(SV)\qquad \hat{p}\cdot\dot{M}\cdot\gamma=(p\beta_s/r_s)\varepsilon\eta_s[\cos^2\phi\dot{M}_{xx}+\sin 2\phi\dot{M}_{xy}+\sin^2\phi\dot{M}_{yy}$$
$$-\dot{M}_{zz}]+(1-2\beta_s^2p^2/r_s^2)[\cos\phi\dot{M}_{xz}+\sin\phi\dot{M}_{yz}], \quad (6)$$

$$(SH)\qquad \hat{\phi}\cdot\dot{M}\cdot\gamma=(p\beta_s/r_s)\Big[\frac{1}{2}\sin 2\phi(\dot{M}_{yy}-\dot{M}_{xx})$$
$$+\cos 2\phi\dot{M}_{xy}\Big]+\beta_s\varepsilon\eta_s[\cos\phi\dot{M}_{yz}-\sin\phi\dot{M}_{xz}]. \quad (7)$$

符号 ξ_s, η_s 代表在震源处计算的垂直慢度(例如 $\xi=\alpha^{-1}\cos i=(\alpha^{-2}-p^2/r^2)^{1/2}$)，而 ε 是 $+1$ 或 -1 是根据震源处射线是向下还是向上而定。将(7)代入(4)，我们找到对于计算是方便的如下的方案。

计算并储备两个基本解，

$$SH_1(\Delta_0,\ \omega)=\int_{\Gamma}\sin j_s f(p,\ \omega)dp,$$
$$SH_2(\Delta_0,\ \omega)=\int_{\Gamma}\cos j_s f(p,\ \omega)dp, \quad (8)$$

对我们目前的问题而言，上式中的

$$f(p,\ \omega)=i\omega(4\pi\rho_s\beta_s^4)^{-1}\omega^2p\sigma^{(1)}(r_s)\grave{S}\acute{S}\sigma^{(1)}(r)Q^{(2)}_{\omega p-\frac{1}{2}}(\cos\Delta_0),$$

$\sin j_s=p\beta_s/r_s$, $\cos j_s=\beta_s\eta_s$。给定任意矩速率张量 $\dot{M}$，为得到记录剖面，我们可将频谱 $\left[\frac{1}{2}\sin 2\phi\ (\dot{M}_{yy}-\dot{M}_{xx})+\cos 2\phi\dot{M}_{xy}\right]$ 乘以 $SH_1(\Delta_0,\ \omega)$，并且将频谱 $[\cos\phi\dot{M}_{yz}-\sin\phi\dot{M}_{xz}]$ 乘以 $SH_2(\Delta_0,\ \omega)$，进而通过对实频率求积分而反演到时间域中。这个练习可以很快地做出。对一具有一定走向、倾向、倾角、以及对 $M_0(t)=\mu A\bar{u}$ 有一定

时间函数的剪切位错，如果我们事先确定 $\dot{M}$ 是适宜的，则我们甚而可建立一个更简单的数值程序。在此情况下，我们组成了 $\dot{M}_0(t)*SH_1(\Delta_0, t)$ 和 $\dot{M}_0(t)*SH_2(\Delta_0, t)$。在递归滤波被用来对典型和长周期地震仪产生影响之后，这两个记录剖面在下图中给出。这种方法的优点是，在一给定距离 Δ_0 上的地震图仅由下图中在那个指定距离上所示的两个地震图的线性相加而给出。此线性和中的系数是走向、倾向、倾角以及从源到接收点的方位的函数。所以很容易检验各种断层面解的影响。用 $\left[\frac{1}{2}\sin 2\phi(M_{yy}-M_{xx})+\cos 2\phi M_{xy}\right]/M_0$ 和 $[\cos\phi M_{yz}-\sin\phi M_{xz}]/M_0$ 以及如补充 4.4 中 $\boldsymbol{M}$ 的分量可详细地给出两个系数。

如果我们不考虑 SH，而是考虑一离源的 P 波，则储备三个基本类型的解是必要的：

$$P_1(\Delta_0, \omega)=\int_\Gamma \sin^2 i_\xi f(p, \omega)dp,$$

$$P_2(\Delta_0, \omega)=\int_\Gamma 2\sin i_\xi \cos i_\xi f(p, \omega)dp,$$

$$P_3(\Delta_0, \omega)=\int_\Gamma f(p, \omega)dp.$$

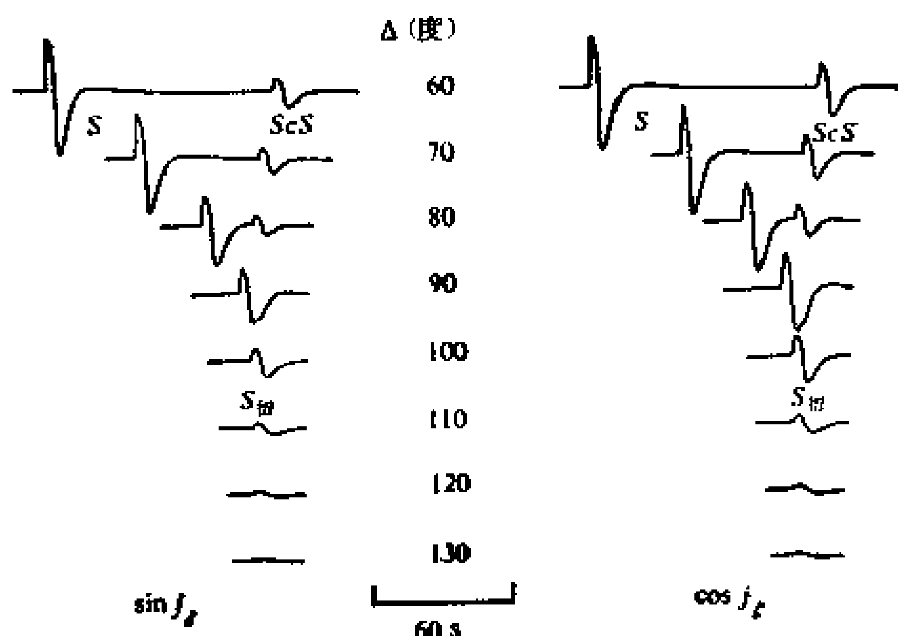
如果是一爆炸源，仅仅需要 P_3 解。对一离源的 SV 波，一般情况我们必须研究两个基本解：

$$SV_1(\Delta_0, \omega)=\int_\Gamma \sin j_\xi \cos j_\xi f(p, \omega)dp,$$

$$SV_2(\Delta_0, \omega)=\int_\Gamma (1-2\sin^2 j_\xi)f(p, \omega)dp.$$

我们刚刚给出的这个基础的讨论隐含着这样一个假定，即在震源深度 r_s 处计算垂直波函数，WKBJ 近似式是精确的。如果我们已给出了像（ ）的正式推导，这个假定将是很清楚的。这将要求这样的一般程序，即依据位移和牵引力分量(Hudson, 1969)的不连续性写出等价于 $\boldsymbol{M}$ 的源，并通过对频率、水平距离和方位(7.4节)的变换计算辐射波的激发。其中 r_s 处的垂直微分是必要的，在变换平面的结果将(如 WKBJ 法可用）类似于对 P 乘以正或负的 $i\omega\xi_s$，对 S 乘以正或负的 $i\omega\eta_s$。这是因为垂直波函数具有如 $\exp(\pm i\omega\int\xi dr)$ 这样的相位因

子。因此，很明显，我们为避免(4)的严格推导而取一主要的短切割，而且代之以WKBJ理论可能给出的形式写出这个表示式，只要它还有可能重新产生我们在第四章中得到的那种辐射图案。

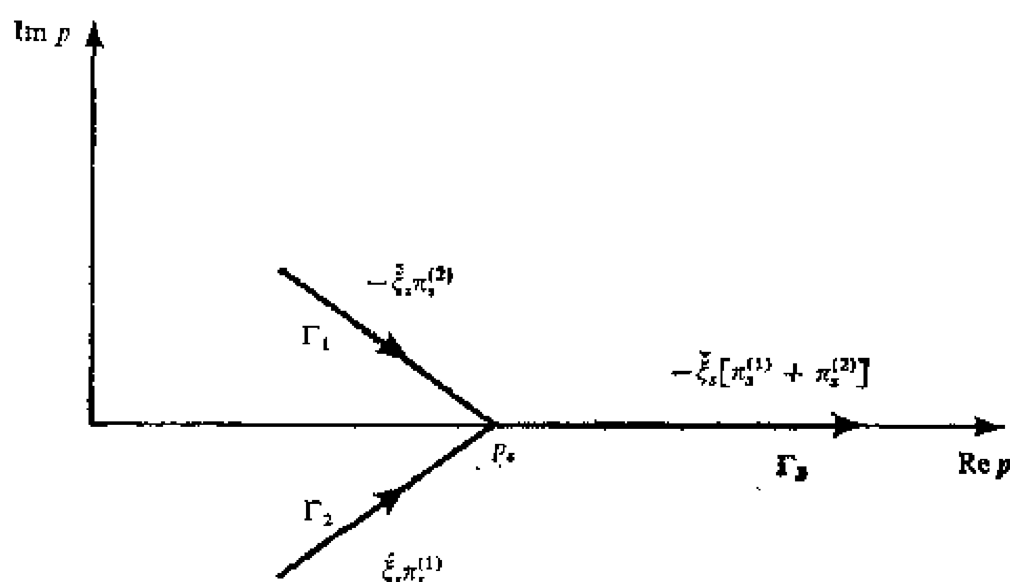


$S+ScS$ 波(偏振为SH)的两个记录剖面。计算是对 PEM-C 地球模型(Dziewonski et al., 1975)进行的，并对15—100秒的长周期地震仪并且对以持续时间为4秒的线性斜坡函数作用的地震矩 $M_0(t)$ 进行了修正。左边的记录剖面利用了被积函数和 $\sin j_\xi$ 的函数关系，右边则利用了 $\cos j_\xi$ 的函数关系。请注意，与 $\cos j_\xi$ 有关的 ScS/S 的振幅比比起与 $\sin j_\xi$ 有关的该振幅比大。其原因是 ScS 的鞍点比起 S 的鞍点发生在低得多的射线参量处。对 $\sin j_\xi$ 有一相应的效应，而 $\cos j_\xi$ 对鞍点的位置相当的不敏感

对离源后陡峭地向下或向上的波，虽然WKBJ理论将是精确的，而对近于水平方向离源的射线，使用更精确的方法是必要的。对这样的射线同时出现了两个不同的问题。第一，在(5)—(7)中对 $\varepsilon\xi_s$(或 $\varepsilon\eta_s$)的WKBJ近似式可能是不精确的。第二，在复 p 平面中积分路径的选择是复杂的，因为需要考虑射线离源向上和向下两者的波函数。利用如(9.66)那样的一致渐近近似式，第一个问题很容易解决。(注意，向下去的射线要求 $\varepsilon\xi_s=\acute{\xi}_s$，这是因为在转折点以上 τ_s 是增加的，$\acute{\xi}_s$ 有一增加的相位，而向上去的射线要求 $\varepsilon\xi_s=-\acute{\xi}_s$。对第二个

问题，其解被分解成三个不同线积分的计算，其方式和在耳语廊问题求解中所使用方式非常相似(见图9.30 b，c，d)。在临界射线参量的情况下，源的深度本身就是转折点，此射线参量为 $p_s=r_s/\alpha_s$。对复射线参量平面中这个点的左边，如图中上面所表示的，我们可通过被积函数中具有 $\xi_s=\check{\xi}_s\pi_s^{(1)}$ 的路径 Γ_2 来计算离源向下的波，而用 Γ_1 (具有 $\xi_s=-\check{\xi}_s\pi_s^{(2)}$)计算离源向上的波，两个被积函数在接近 p_s 的一点结合在一起了。然而，向右，在 Γ_3 上，被积函数呈指数衰减，它定量地表示出从震源深度 r_s 向上至震源层内转折点的深度所具有的能量隧道效应，从转折点的深度可进一步向上传播，但能量损失相对较小。

最后注意到，在用一力偶系统建立的体波表达式中，$\dot{M}_{ij}$ 刚好需要有五个不同分量的线性组合。[从(1)和(2)我们看到，对 P 和 SV，只需要有三个关于矩张量元素的不同组合，对 SH，两个进一步的组合在(3)中是显然的。]我们在第七章中得到的远场回波公式(7.147)—(7.150)也可以用这同样的五个关于 $\dot{M}_{ij}$ 的线性组合写出来。因而，在离源的每一方位上，对于 $\boldsymbol{M}$ 的六个独立分量，在最好的情况下可希望只得到(从远场资料)五个线性约束条件。



复射线参量平面上，离源向上的射线其路径为 Γ_1；离源向下的射线其路径为 Γ_2；对组合的被积函数其路径为 Γ_3，它定量地表示了从源深度向上的隧道效应。所涉及的每一路径都表明了对震源深度 r_s 处的波函数和广义垂直慢度

建议进一步阅读的文献

Abramovici, F. Numerical seismograms for a layered elastic solid. *Bulletin of the Seismological Society of America*, **60**, 1861-1876, 1970.

Budden, K. G. *Radio Waves in the Ionosphere*. Cambridge University Press, 1961.

Bullen, K. E. *An Introduction to the Theory of Seismology* (3rd ed., Chaps. 7 and 8 for ray theory). Cambridge University Press, 1963.

Chapman, C. H., and R. A. Phinney. Diffracted seismic signals and their numerical solution. *In* B. A. Bolt (editor) *Seismology: Body Waves and Sources* (Methods of Computational Physics, Vol. 12). New York: Academic Press, 1972.

Coddington, E. A., and N. Levinson. *Theory of Ordinary Differential Equations* (Chap. 6 for asymptotic solutions). New York: McGraw-Hill, 1955.

Dey-Sarkar, S. K., and C. H. Chapman. A simple method for the computation of bodywave seismograms. *Bulletin of the Seismological Society of America*, **68**, 1577-1593, 1978.

Felsen, L. B., and N. Marcuvitz. *Radiation and Scattering of Waves*. Engelwood Cliffs, New Jersey: Prentice-Hall, 1973.

Fuchs, K. The reflection of spherical waves from transition zones with arbitrary depth-dependent elastic moduli and density. *Journal of the Physics of the Earth*, **16**, special issue, 27-41, 1968.

Fuchs, K., and G. Müller. Computation of synthetic seismograms with the reflectivity method and comparison of observations. *Geophysical Journal of the Royal Astronomical Society*, **23**, 417-433, 1971.

Heading, J. *An Introduction to Phase Integral Methods*. London: Methuen and Co., 1962.

Helmberger, D. V., and S. D. Malone. Modeling local earthquakes as shear dislocations in a layered half space. *Journal of Geophysical Research*, **80**, 4881-4888, 1975.

Nussenzveig, H. M. High-frequency scattering by an impenetrable sphere. *Annals of Physics (New York)*, **34**, 23-95, 1965.

Wait, J. R. *Electromagnetic Waves in Stratified Media*. New York: MacMillan, 1962.

Wasow, W. *Asymptotic Expansions for Ordinary Differential Equations* (Pure and Applied Mathematics, Vol. 14). New York: Interscience, 1965.

Wiggins, R. A., and D. V. Helmberger. Synthetic seismogram computation by expansion in generalized rays. *Geophysical Journal of the Royal Astronomical Society*, **37**, 73-90, 1974.

问　　题

9.1 a) 给出了如图 9.1 和 9.2 所描绘的广义射线和求解 (9.5) 的 Cagniard 路径 $p=p(\tau)$，证明，在$(n+1)$层中首波行走的距离L为

$$L=\frac{d\tau}{dp}\bigg|_{p=1/\alpha_{n+1}}.$$

b) 证明，在 $p=1/\alpha_{n+1}$ 附近和在 $p=1/\alpha_{n+1}$ 的右边，对 Cagniard 路径上的一些点，

$$\xi_{n+1}=-i\left[\frac{2}{L\alpha_{n+1}}(\tau-t_h)\right]^{1/2},$$

其中 t_h 是首波到达时间，

$$t_h = \frac{r}{\alpha_{n+1}} + \text{和}\left(\frac{1}{\alpha_{n+1}}\right).$$

从(5.38)和(5.39)可证明

$$\grave{P}\acute{P}_n = \frac{A - \xi_{n+1} B}{A' - \xi_{n+1} B'},$$

其中

$$A = A(p) = bF\,\xi_n - a(a + d\,\xi_n\eta_{n+1})p^2,$$
$$B = cF - d\,\eta_n(a + d\,\xi_n\eta_{n+1})p^2,$$
$$A' = bF\,\xi_n + aGp^2,$$
$$B' = cF - d\,\eta_n G p^2,$$

a, b, c, d, F, G 是按(5.38)采用的，下标 n 和 $n+1$ 现在分别用来表示恰在边界之上和恰在边界之下所计算的各个量。注意，对于在接近 $1/\alpha_{n+1}$ 的 Cagniard 路径上的 p, A, B, A', B' 是实数。

c) 在 $t=t_h$ 附近得到函数 $\psi(t)$(见(9.7))。于是利用

$$\frac{2}{\pi t^{1/2}} * [(t-t_h)^{1/2}H(t-t_h)] = (t-t_h)H(t-t_h)$$

(一斜坡函数)给出对一在距离 R_s 处、压力为单位阶梯函数的源，其首波的压力响应近似为

$$\left(\frac{1}{rL^3}\right)^{1/2}\frac{R_s}{\alpha_{n+1}}\Big[(\grave{P}\grave{P})_1\cdots(\grave{P}\grave{P})_{n-1}\frac{AB'+A'B}{\xi_1 A'^2}(\acute{P}\acute{P})_{n-1}\cdots$$
$$\cdots(\acute{P}\acute{P})_1\Big]_{p=1/\alpha_{n+1}} \times (t-t_h)H(t-t_h).$$

这是一个渐近的结果，当 $t\to t_h$ 时是成立的，并且这是波阵面展开式中第一项的一个例子。

这里首波的初动具有我们根据第六章所预计的典型的脉冲形状，也就是说它是从源辐射出的脉冲对时间的积分。

9.2 对成层介质中一特殊的射线路径，射线参量的两个函数对于计算和射线有关的脉冲形状往往是有用的，此两函数为时间(p)和距离(p)。我们定义时间(p)为从源到接收点沿射

线取的走时，其中接收点的位置是可变的（但具有固定的深度），同时定义距离(p)简单地为在源和接收点之间测得的水平距离（即平面成层时的水平跨距以及球面几何中的角Δ）。因此，对图 9.1 b 中的广角反射，

$$时间(p)=\frac{Th_1-d_1}{\alpha_1\cos i_1}+\frac{2Th_2}{\alpha_2\cos i_2}+\cdots+\frac{2Th_n}{\alpha_n\cos i_n}+\frac{Th_1-d_2}{\alpha_1\cos i_1},$$

同时，

$$距离(p)=(Th_1-d_1)\tan i_1+2Th_2\tan i_2+\cdots$$
$$+2Th_n\tan i_n+(Th_1-d_2)\tan i_1.$$

a) 当接收点的位置是变化的时（在固定的深度上），证明

$$p=\frac{d(时间)}{d(距离)}$$

（即射线参量为走时曲线的梯度）。

b) 证明 Cagniard 路径(9.5)由下式给出：

$$\tau=pr+时间(p)-p距离(p).$$

接下去我们将提出一些关于广角反射的近似计算及关于射线参量平面中有关特性的一些问题。

c) 证明 $d\tau/dp=r-距离(p)$

注意，假如这是连接源和接收点的实际射线的值（即距离$(p)=r$的解），对射线参量 p_0，则有 $d\tau/dp=0$。

d) 证明 $d^2\tau/dp^2=-d(距离(p))/dp$，因而对平面成层介质中的一次反射而言，$d^2\tau/dp^2$ 总是负的。

e) 根据

$$\tau=t_{反}+(p-p_0)\frac{d\tau}{dp}+\frac{(p-p_0)^2}{2}\frac{d^2\tau}{dp^2}+\cdots,$$

其中 $t_{反}$ 是广角反射的射线到时，确实可看到当实 τ 一直增加到 $t_{反}$ 时，在 $p=p_0$ 处 Cagniard 路径 $p=p(\tau)$ 必须以直角离开实 p 轴。

f) 对接近 $t_{反}$ 的时间，证明

$$\frac{dp}{d\tau}\sim\frac{1}{(t_{反}-\tau)^{1/2}}\frac{1}{\left(2\frac{d}{dp}距离\right)^{1/2}}\qquad \tau<t_{反},$$

$$\sim\frac{i}{(\tau-t_{反})^{1/2}}\frac{1}{\left(2\frac{d}{dp}距离\right)^{1/2}}\qquad \tau>t_{反}.$$

g）对 $t_{反}$ 附近的时间，在阶梯响应

$(2/\pi)\int_0^t\psi(\tau)/(t-\tau)^{1/2}d\tau$（见(9.7)）的近似计算中，用 $\tau=t_{反}$（即 $p=p_0$）时它们的值代替 $\psi(\tau)$ 的所有缓慢变化的因子，并将 $t^{-1/2}$ 和仅有的快变因子 $dp/d\tau$ 进行褶积就足够了。

对 $t_{反}$ 附近的时间，从(f)得到 $1/t^{1/2}*dp/dt$ 为

$$\left(\frac{1}{2\frac{d}{dp}距离}\right)^{1/2}\left[i\pi H(t-t_{反})-\ln\left(\frac{|t-t_{反}|}{t_{反}}\right)\right].$$

用这个结果得到广角反射的阶梯函数响应为

$$R_s\left[\frac{1}{\xi_1}\left(\frac{p}{\tau\frac{d}{dp}距离}\right)^{1/2}(\grave{P}\grave{P}_1)\cdots(\grave{P}\grave{P})_{n-1}(\acute{P}\acute{P})_{n-1}\cdots(\acute{P}\acute{P})_1\right]_{p=p_0}$$

$$\times\left[\mathrm{Re}(\grave{P}\acute{P}_n)H(t-t_{反})-\frac{\mathrm{Im}(\grave{P}\acute{P}_n)}{\pi}\ln\left(\frac{|t-t_{反}|}{t_{反}}\right)\right].$$

（请回顾，R_s 是这样的距离，在此距离上来自源的入射波是一单位阶梯压力。假定 R_s 并非大到足以安置校正接收器于层 1 之外。）

h）第五章中的几何射线理论已给出单位阶梯函数响应为

$$\frac{R_s}{\mathscr{R}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi})}H(t-T(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi}))\times 引起内界面上能量损失的因子,$$

其中 $T(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi})$ 是在 $\boldsymbol{\xi}$ 处的源和 $\boldsymbol{x}$ 处的接收点之间的走时，$\mathscr{R}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi})$ 是几何扩散函数。显然，$T(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi})=t_{反}$。用问题 4.3 中的方

法证明

$$\mathscr{R}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi})=\xi_1\left(\frac{r}{p}\frac{d}{dp}\text{距离}\right)^{1/2}.$$

(提示：源和接收点两者均在层 1 之内。)

i) 由于广义射线的透射系数全部为实数，并且仅有 $\grave{P}\acute{P}_n$ 是复数，用(h)的结果和问题(6.14) 的结果给出近似的阶梯函数响应的另一种推导，此响应我们曾在(g)中用 Cagniard 方法的近似式得到。

9.3 证明在传播矩阵 $\boldsymbol{P}(z_m, z_n)$ 中的表值(在均匀平面层组成的介质中，对 SH 波或对 P SV 波，z_m 和 z_n 可能被几个不同的层隔开)没有 ξ_m 与 ξ_n 或任意其它垂直慢度的分支切割。

在公式 (9.16) 中概括了图 9.1 b 所示的点 (r, z_0+d_2) 处总压力的 Fourier 变换的精确表达式［即具有所包含的所有的多次反射及源(9.1)］。证明仅在 p 平面内的被积函数的分支切割是和 ξ_{n+1}，η_{n+1} 及 $J_0(\omega pr)$有关的。［这个结果使路径变形的讨论变得相当方便。注意到由(9.2)用 Laplace 变换给出的、仅在 Moho 界面上的广义一次反射，其相应的被积函数具有相当多的分支切割。］

9.4 a) 对球对称介质中的一个深震源，证明，水平离开的射线是具有最大射线参量的射线。证明这个射线相应于走时曲线 $T=T(\Delta)$上的偏转，因而它对应于 $dp/d\Delta$ 的零值，所以几何扩散的一般表达式(9.44)是不能用的。

b) 在一具有深度剖面 $\alpha(r)$的球对称的地球模型中，考虑一点源 S 位于半径 r_s 处。假定，由 S 水平离开的射线在 p 处(半径 r，离 S 的距离为 Δ)被接收到。在此情况下，证明在 p 处的几何扩散由下式给出

$$\mathscr{R}(P,S)=r\left(\frac{\sin\Delta\cos i(r)}{[1-\xi(r_s)]}\right)^{1/2},$$

其中 $\xi(r)$是归一化的速度梯度，即 $r/\alpha(r)(d\alpha/dr)$。(提示：用

$\delta r_s/\delta i(r)$表示的话，$\mathscr{R}^2(S,P)$是什么？怎样才能从 $r_s/\alpha(r_s)=p$ 给出 $\delta r_s/\delta i(r)$？）

9.5 在WKBJ理论中，将 $\omega\alpha^{-1}\cos i$ 看成垂直波函数并且在从某参考深度开始所行走的垂直距离上对这个量求积分，从而给出了垂直波函数的相位。在此意义上，根据入射波 $g_n^{(2)}$ 和反射波 $g_n^{(1)}$，在值 $r>r_p$ 处解释两个波之和 $g_n^{(1)}(r)+g_n^{(2)}(r)$，并证明从转折点的"反射"发生了 $\pi/2$ 的相位超前。

9.6 在 $r>r_p$ 的深度范围内，如果WKBJ近似式被用于

$$P(r,\omega)=g^{(1)}_{\omega p-\frac{1}{2}}(r)Q^{(2)}_{\omega p-\frac{1}{2}}(\cos\Delta),$$

证明 p 的相位沿着 $r(\sin i)/\alpha(r)=p$ 的路径变化最快。

9.7 对于 $\boldsymbol{R}_l^0$ 和 $\boldsymbol{S}_l^0$，联系到WKBJ近似式，证明，用(9.60)和(9.61)近似表示的 $\pi^{(l)}$ 和 $\sigma^{(l)}$，具有穿过锥体中水平面的能通量率守恒的性质，此锥体在地球中心处具有立体角 $\sin\Delta\delta\Delta\delta\phi$。

9.8 证明，在球状地球上，在距离为 Δ 时对具有走时 T 的体波，其群速度为 Δ/T。还证明，对体波反射 ScS，当 $\Delta\to 0$ 时，群速度趋于零，但相速度$(d\Delta/dT)$趋于无穷。

9.9 总的来说，在焦散点附近，地震波的典型的和频率有关的性质以及和距离有关的性质最可能是什么？

第十章　测震学原理

10.1　基本仪器

地震科学赖以建立的数据是地面运动的记录，因此我们就从论述什么是地面位移谈起。地下一个质点，在时刻 t_0，位于一个惯性参考系里的笛卡尔坐标 $\boldsymbol{x}=(x,y,z)$处。在时刻 t，该质点的坐标则为同一坐标系中的 $\boldsymbol{u}+\boldsymbol{x}=(u+x,\ v+y,\ w+z)$。位移 $\boldsymbol{u}=\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},t)$即为地的位移。在时刻 t_0，位于地的 $\boldsymbol{x}$ 处，并对随时间变化的 $\boldsymbol{u}$ 作出响应的仪器即地震计。若该仪器能记录地面运动，则常称为地震仪。

采用一固定在惯性参考系里的传感器，便能测量地球的运动。利用从类星体来的无线电信号，并用长基线干涉测量技术测量地运动，即是一个实例。这在大地测量中正成为一种重要的方法。然而，现有的地震计和地震仪都是与地球相连的。地震波接收器与波在其中传播的物体一起运动。而且，通常报导的大部分地震运动所采用的参考系，事实上不是惯性系，而是每 24 小时稳定旋转一周的参考系。观测者在地震期间与物体一起运动，这使测震学在实验方面与物理科学的大多数其它分支完全不同。

目前采用的测量地震运动的基本方法有两种。最常用的一种是根据惯性原理，摆式地震计就是惯性传感器。另一种方法是根据一小部分地球的形变，应变计或应变地震计就是这种传感器。

看来今后根据角动量守恒进行测量的方法会得到发展。陀螺仪能测量地球上某一点的刚体转动。假设陀螺仪的高速轮悬挂于一个平衡的无摩擦的方向架系中，以致它能完全自由地围绕重心运动。若无外来的扭矩，陀螺仪的角动量方向在惯性参考系中会

保持不变，这使它能测量与地球相连的方向架系的转动。也就是说，陀螺仪的另一有用的特性——扭矩作用下的进动，可用来检测转动。这样的装置通常用于惯性导航，在地震学中应用于较为完整地描述地球运动。然而，目前其工艺上的灵敏度和稳定性尚不足以提供有用的地球物理测量结果。

10.1.1 摆式地震计

如图 10.1 所示，摆式地震计由一个通过并联的弹簧和阻尼器与地球的一点相连的重锤M构成。假设整个运动被限制在x方向，则用$u(t)$表示惯性参考系中的地球运动，用$\xi(t)$表示重锤M相对于地球的运动。对弹簧施加一个与伸长$\xi-\xi_0$成正比的力，对阻尼器施加一个与重锤和地球之间的相对速度$\dot{\xi}(t)$成正比的力。用k和D表示这些比例常数，运动方程由下式给出：

$$M\frac{d^2}{dt^2}[\xi(t)+u(t)]+D\frac{d\xi(t)}{dt}+k[\xi(t)-\xi_0]=0. \quad (10.1)$$

把相对于平衡位置ξ_0的位移$\xi(t)-\xi_0$写作$\xi(t)$，我们得到

$$\ddot{\xi}+2\varepsilon\dot{\xi}+\omega_s^2\xi=-\ddot{u}, \quad (10.2)$$

式中$2\varepsilon=D/M$，$\omega_s^2=k/M$。

上述方程表明，用$\xi(t)$及其时间导数(可测量的)的线性组合，能重现地球运动加速度$\ddot{u}$。对极迅速的地球运动，(10.2) 左边的第一项占支配地位，这时$\ddot{\xi}$几乎等于$-\ddot{u}$。换言之，对快速运动，由记录$\xi(t)$重现的是地动位移$-u(t)$。对很慢的运动，第三项占支配地位，$\omega_s^2\xi$项几乎等于$-\ddot{u}$，因而对缓慢运动，记录$\xi(t)$重现加速度$\ddot{u}(t)$。灵敏度正比于T_s^2，这里$T_s=2\pi/\omega_s$是无阻尼摆的周期，ω_s是相应的无阻尼角频率。

摆式地震计对于正弦地位移$\exp(-i\omega t)$的响应可写成$X(\omega)\times\exp(-i\omega t)$。$X(\omega)$称为频率响应，它能完整地描述摆的特性。当$u(t)=\exp(-i\omega t)$和$\xi(t)=X(\omega)\exp(-i\omega t)$时，由式(10.2)得到

$$X(\omega)=\frac{-\omega^2}{\omega^2+2i\varepsilon\omega-\omega_s^2}.$$

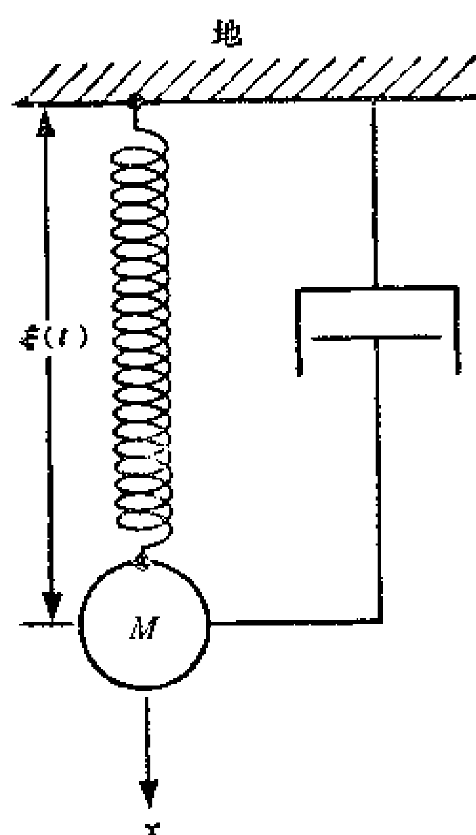


图 10.1
摆式地震仪由并联的弹簧和阻尼器悬挂起来的重锤组成

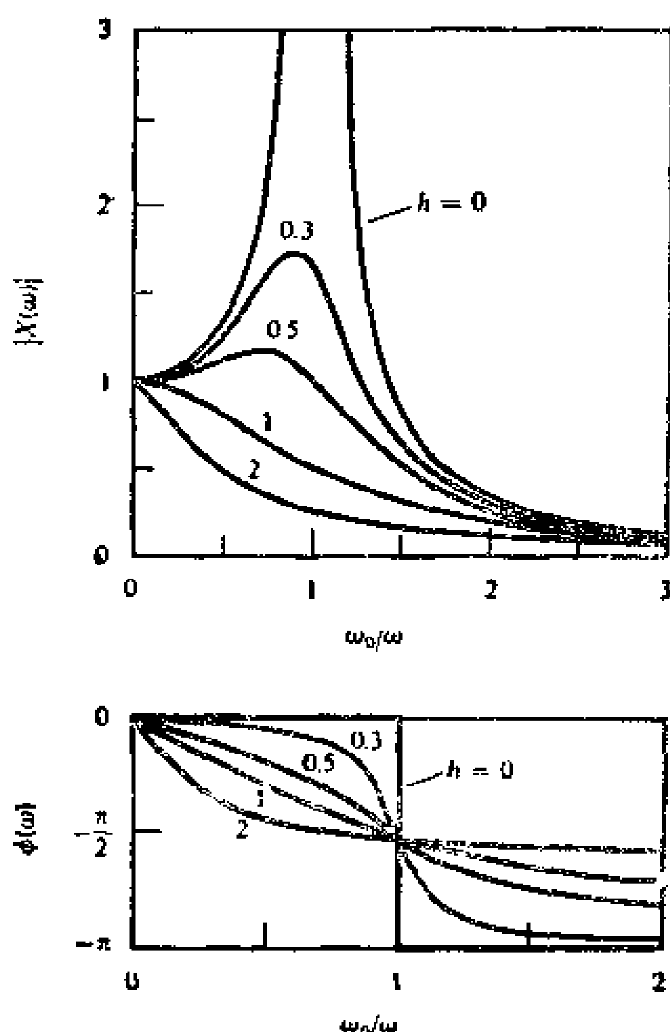


图 10.2
根据式(10.3)所得的摆式地震计的振幅响应 $|X(\omega)|$ 和相位延迟 $\phi(\omega)$

用 $X(\omega)=|X(\omega)|e^{i\phi(\omega)}$，定义振幅响应为 $|X(\omega)|$，相位延迟为 $\phi(\omega)$，则可求出

$$|X(\omega)|=\frac{\omega^2}{\sqrt{(\omega^2-\omega_s^2)^2+4\varepsilon^2\omega^2}}$$

和

$$\phi(\omega)=-\arctan\frac{2\varepsilon\omega}{\omega^2-\omega_s^2}+\pi. \tag{10.3}$$

若 $\omega\gg\omega_s$，则 $|X(\omega)|\to1$，$\phi(\omega)\to\pi$。也就是说，这个摆真实地记录位移，但符号相反。符号的差别通常通过在记录图上适当地表示地运动的方向来消除。图 10.2 表示 $|X(\omega)|$ 和(10.3)式中

不带 π 项的 $\phi(\omega)$。这些曲线用 $h=e/\omega_s$ 作为参数来表示；h 是阻尼常数，等于 Q 值(阻尼振荡器的品质因子)倒数的二分之一。

摆式地震计的性能，也可用其对脉冲加速度为 Dirac δ 函数即 $\ddot{u}(t)=\delta(t)$ 时的响应 $f(t)$ 加以完整的描述。由式(10.2)可知，$f(t)$ 满足

$$\ddot{f}+2e\dot{f}+\omega_s^2 f=-\delta(t). \tag{10.4}$$

对式(10.4)两边求 Fourier 变换，并令

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\exp(i\omega t)dt=f(\omega), \tag{10.5}$$

我们有

$$f(\omega)=\frac{-1}{-\omega^2-2ie\omega+\omega_s^2}.$$

由于 $f(\omega)=X(\omega)/\omega^2$，频率响应可通过 Fourier 变换由脉冲响应得到，也可以反过来，由频率响应得到脉冲响应。根据(10.5)的逆变换，

$$\begin{aligned} f(t)&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\exp(-i\omega t)d\omega}{\omega^2+2ie\omega-\omega_s^2} \\ &=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\exp(-i\omega t)d\omega}{(\omega-\omega_1+ie)(\omega+\omega_1+ie)}. \end{aligned} \tag{10.6}$$

式中 $\omega_1^2=\omega_s^2-e^2$。若把 ω 扩展到复 ω 平面上，则发现，由于 $e>0$，被积函数的极点总是位于下半平面。这时，对 $t<0$，沿实轴的积分可由沿上半平面中无限半圆的积分代替。因为因子 $|\exp(-i\omega t)|=\exp(+\mathrm{Im}\{\omega t\})$，后一积分为零。因此，

$$f(t)=0,\quad t<0. \tag{10.7}$$

对 $t>0$，若 $\omega_s>e$，则极点留数的贡献给出

$$f(t)=\frac{-1}{\omega_1}e^{-et}\sin\omega_1 t, \tag{10.8}$$

而若 $\omega_s<e$，则

$$\begin{aligned} f(t)=\frac{-1}{2\sqrt{e^2-\omega_s^2}}\{&\exp[-(e-\sqrt{e^2-\omega_s^2})t] \\ &-\exp[-(e+\sqrt{e^2-\omega_s^2})t]\}. \end{aligned} \tag{10.9}$$

在 $\omega_s = \varepsilon$ 的特定情况下，两公式都给出：

$$f(t) = -te^{-\varepsilon t},\quad t>0. \tag{10.10}$$

若地震计是亚阻尼的($\omega_s \gg \varepsilon$)，则脉冲响应会表现出不希望有的阻尼振荡。另一方面，若是过阻尼的($\omega_s \ll \varepsilon$)，则式(10.9)中的指数衰减常数之一 $\varepsilon - \sqrt{\varepsilon^2 - \omega_s^2}$ 接近 $\frac{1}{2}(\omega_s^2/\varepsilon)$，对较大阻尼，响应会延迟得较长。出于这些原因，在临界阻尼 $\omega_s = \varepsilon$ 附近，可得到最理想的结果。

地震计对任意地面加速度 $\ddot{u}(t)$ 的响应 $\xi(t)$，可由这个加速度和脉冲响应 $f(t)$ 的褶积得到：

$$\xi(t) = \int_0^\infty \ddot{u}(t-\tau) f(\tau) d\tau, \tag{10.11}$$

这就是(10.2)的通解。

10.1.2 稳定的长周期摆

由于低频处摆对加速度的灵敏度正比于其固有周期的平方，因而许多年里，设计一种稳定的长周期摆，一直是测震学中最重要的问题，直至 LaCoste 在 1935 年发明了零长弹簧，才解决了这问题。理论上，LaCoste 弹簧可以稳定地达到无限长的周期。

通常，当弹簧拉伸时，所加载荷 f，通过模量 K，正比于伸长量 $l-l_0$，其中 l 是实际长度，l_0 是已知的初始长度，因此零长弹簧是张力正比于实际长度的一种弹簧。在绕零长弹簧时，必须扭转弹簧钢丝，并绕成螺线，这样，由于线圈尺寸有限，即使在无载荷时，弹簧仍有残余张力。载荷很小时，此残余张力会使弹簧长度保持不变。直至载荷增加到一定限度，弹簧圈才开始分开，其长度 l 随着载荷成正比地增加，即 $f=kl$。

检验一弹簧是否为零长弹簧的一种简便又精确的方法如下：把此弹簧垂直悬挂起来，并挂一重物，使弹簧伸长到某一新的平衡长度 l。让弹簧垂直地在该平衡位置附近振荡，并测出其周期 T。对任一遵循 Hooke 定律的弹簧，很容易就可以证明：$T=$

$2\pi[(l-l_0)/g]^{1/2}$，从这公式就可得到 $l-l_0$。若 $(l-l_0)$ 等于 l 的直接测量值，则该弹簧为零长弹簧。

图 10.3 表示如何用这种弹簧测量地面运动的垂直分量。重锤 M 固定于围绕铰接点 B 转动的杆上。零长弹簧的一端通过一根短的软金属丝连接于 A 点，另一端用同样的方法连接于杆上靠近重锤 M 的一点上。A 点沿竖直方向处于 B 点的正上方，两点都固定于地。

以无地面运动时摆的平衡为例。由于施于 M 的重力而产生的围绕 B 点的转矩，等于 $M_g h_1 \sin\phi$，其中 h_1 是杆长，ϕ 是杆与竖直方向的夹角。因为初始长度为零，所以该弹簧的转矩等于 $klh_2\sin\theta$，其中 l 是弹簧长度，k 是弹簧的弹性常数，h_2 是 A、B 间的距离，θ 是弹簧与竖直方向间的夹角。在平衡位置，两个转矩互相平衡：

$$Mgh_1\sin\phi = klh_2\sin\theta.$$

另一方面，由几何学可知：

$$l\sin\theta = h_1'\sin\phi, \qquad (10.12)$$

式中 h_1' 是杆上 B 点到弹簧连接点的距离。因此，平衡条件由下式给出：

$$Mgh_1\sin\phi = kh_1'h_2\sin\phi$$

即

$$Mgh_1 = kh_1'h_2. \qquad (10.13)$$

令人惊奇的是，此条件与 ϕ 无关。换句话说，只要长度和重锤质量选得合适，则不存在回复力，任一重锤位置都处于平衡状态。由此可见，此摆具有无限长的周期。

有很多不同于图 10.3 所示的悬挂重锤和弹簧的方式同样可以达到无限长周期。实际上，因为弹簧长度和铰接位置不精确，铰接点处存在一定的回复力，温度变化使弹簧常数 k 也变化，重力也变化……此外还有其它干扰存在，因而无限长周期是达不到的。按照加利福尼亚理工学院地震实验室 Francis Lehner 的说法，日常观测中能保持的最大周期为 80 秒。标准长周期地震仪通

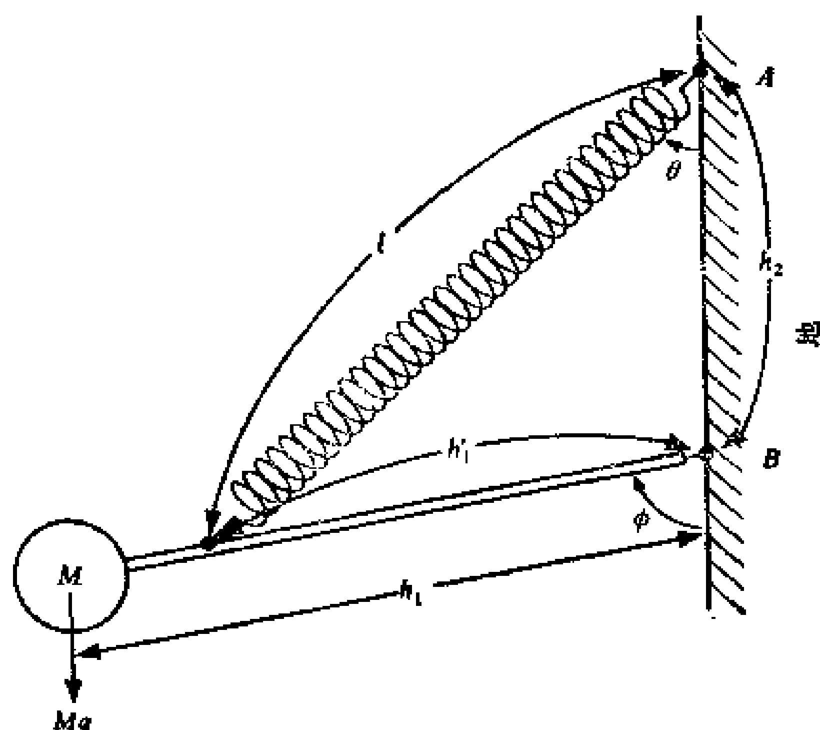


图 10.3

带有零长弹簧的垂直(LaCoste)摆。由于此杆还对重力变化作出响应，该仪器有时称为重力仪

常工作周期为 15—30 秒。

如上所述，摆对长周期加速度的灵敏度正比于摆周期 T_s 的平方。由(10.2)，对加速度渐变量 $-\Delta a$ 来说，我们有

$$\zeta=\frac{\Delta a}{\omega_s^2}=\frac{\Delta a}{(2\pi)^2}T_s^2.$$

例如，若 $T_s \sim 60$ 秒，$\xi=\Delta a \cdot 10^2$厘米。当加速度变化 1 毫伽 ($=10^{-3}$厘米/秒^2)时，摆重锤移动 1 毫米。

稳定的长周期摆作为水平分向地震仪，多年来已为大家所熟知。现有的标准地震仪的长周期水平摆如图 10.4 a 所示。支持重锤与杆顶部和底部的悬丝因重力作用而处于张力状态。这种悬挂方式起初是由 Zollner(1869)设计的，它消除了根据图 10.4 b 设计的其它早期水平摆在支点处的摩擦。对小振幅振荡，摆在离竖直平面 θ 角的平面上运动。该平面中重力的分量是 $g\cos\theta$，因此摆的周期是 $2\pi\sqrt{l/(g\cos\theta)}$，其中 l 是杆长。当杆接近水平方向

($\theta\to\pi/2$)时，振荡周期接近无限大并变得不稳定。标准仪器达到的最大稳定周期约为 30 秒。

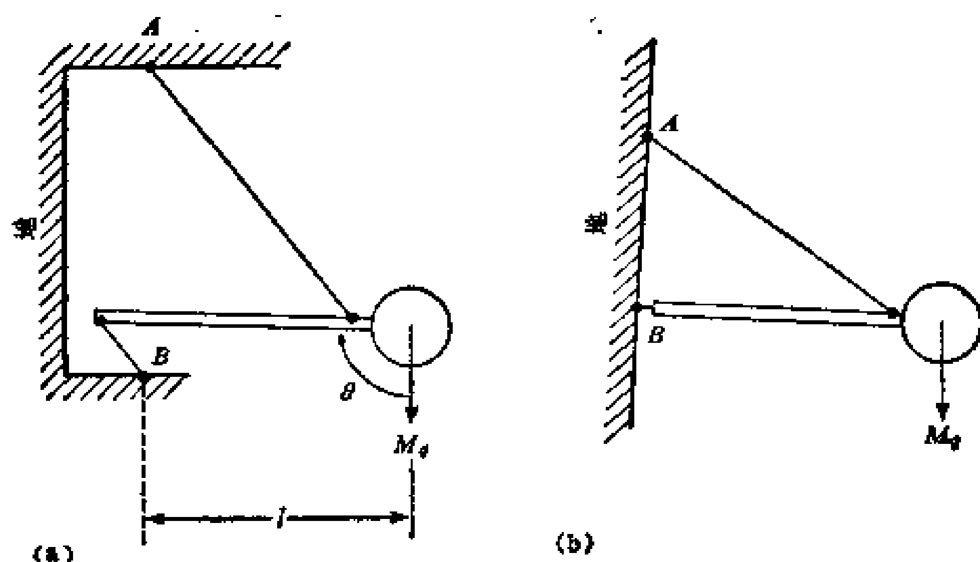


图 10.4

水平摆。(a) Zollner 悬挂。两条悬丝都保持张力状态，以避免悬挂的不稳定。(b) 常称为"花园大门"式悬挂。线段 AB 固定于地，在(a) 和(b) 中都稍偏离竖直线。事实上，在 (b) 和图 10.3 中 B 点上的支点是一钩子，以使该支点处于张力状态

10.1.3 水平加速度的测量

几乎所有摆式地震计的设计都不可能区别地面水平加速度和由于倾斜重力产生的贡献。图 10.5 用一个单摆说明这种情况。当地震计框架倾斜一个量 $\delta\psi$ 时，铰接点受到一转矩，使摆相对于框架运动。该转矩的效果与大小为 $g\sin\delta\psi$ 的水平加速度产生的效果相同。

Farrell(1969) 曾作过最初的尝试，使用陀螺把倾斜和水平加速度的作用分开，但直到现在，大多数地震学家满足于这样一个相当任意的假设，即或者是加速度，或者是倾斜，在一特定信号中居主导地位。Rodgers(1968)详细分析了水平摆(图 10.4)的响应。除了倾斜与水平加速度不能分清外，他论述了关于这种设计

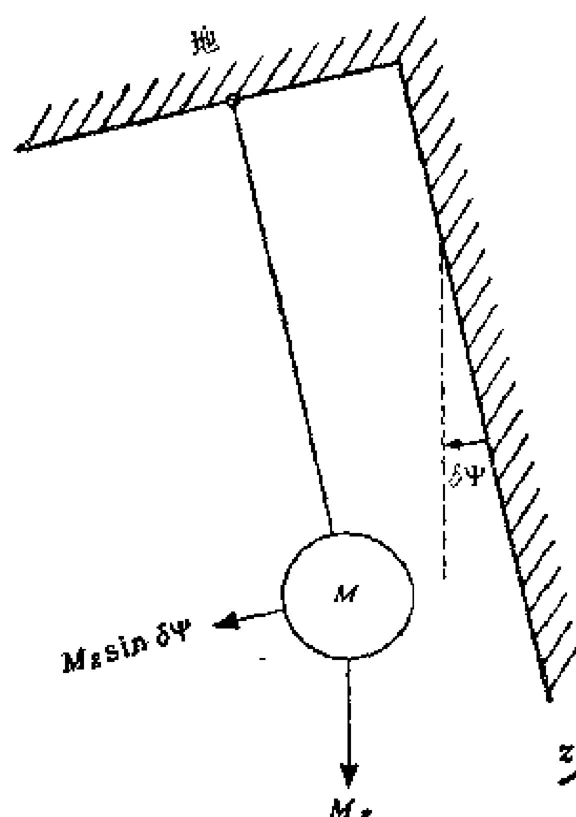


图 10.5
倾斜引起悬挂重锤的视水平加速度

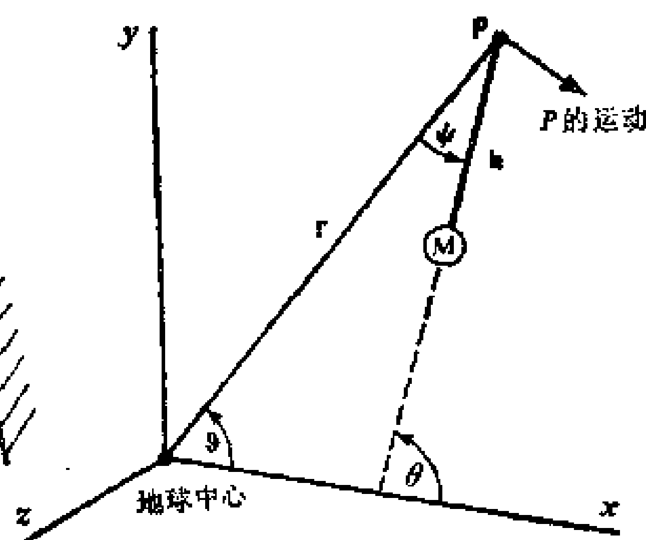


图 10.6
由指向地心的重力引起的摆的运动。这里的笛卡尔轴具有固定在惯性空间的方向

的另一个问题。虽然该仪器最初对垂直于杆的水平加速度（及其倾斜等量）很灵敏，但其响应也受沿着杆的加速度和改变角 θ 的倾斜分量的影响(见图 10.4)。Rodgers 称这些为"参数效应"，因为它们对仪器因有周期的变化起作用。

一般习惯于在重力方向平行于 z 轴的笛卡尔坐标系中考虑地震计摆的运动。实际上，重力是指向地心的。把这点考虑进去的基本结构是 Schuler 摆。它多用于惯性导航，将来可能对地震学也很重要。该结构示于图 10.6，摆铰接在 P 点，为使下面的推导简便起见，设其运动限制在 xy 平面中。摆的运动方程是

$$J_p\frac{d^2\theta}{dt^2}=M\ (\boldsymbol{h}\times\boldsymbol{g})_z-M\left(\ \boldsymbol{h}\times\frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2}\right)_z, \qquad (10.14)$$

式中 J_p 是摆对于 P 点的惯量矩；θ 是测出的摆偏离 x 轴的转动；

M是摆的质量；$\boldsymbol{h}$是相对于P点的重锤位置；$\boldsymbol{g}$是重力加速度；$\boldsymbol{r}$是相对于地心的P点位置。

让我们以P点水平运动（即垂直于向地心的方向的运动）时摆的运动为例。这种情况下，加速度向量的分量$d^2\boldsymbol{r}/dt^2$是$(-r\ddot{\vartheta}\sin\theta, r\ddot{\vartheta}\cos\theta, 0)$，其中$\vartheta$是$\boldsymbol{r}$和$x$轴之间的夹角。其它向量的分量是$\boldsymbol{h}=(-h\cos\theta, -h\sin\theta, 0)$和$\boldsymbol{g}=(-g\cos\vartheta, -g\sin\vartheta, 0)$。式(10.14)现在可写为

$$J_p\frac{d^2\theta}{dt^2}=Mhg\sin(\vartheta-\theta)+Mhr\ddot{\vartheta}. \tag{10.15}$$

由于摆偏离竖直方向的角度ψ等于$\theta-\vartheta$，因此可将上式写为

$$J_p\left(\frac{d^2\psi}{dt^2}+\frac{d^2\vartheta}{dt^2}\right)+Mgh\sin\psi=Mhr\ddot{\vartheta} \tag{10.16}$$

即

$$J_p\left(\frac{d^2\psi}{dt^2}\right)+Mhg\sin\psi=-(J_p-Mhr)\ddot{\vartheta}. \tag{10.17}$$

对于小的ψ，$\sin\psi\sim\psi$，摆的周期T_0由下式给出：

$$\frac{2\pi}{T_0}=\left(\frac{Mgh}{J_p}\right)^{1/2}. \tag{10.18}$$

当$J_p=Mhr$时，水平加速度产生的力为零。这条件等于

$$\frac{2\pi}{T_0}=\left(\frac{Mgh}{Mhr}\right)^{1/2}=\left(\frac{g}{r}\right)^{1/2}, \tag{10.19}$$

这是长度等于地球半径的单摆的周期。相应的周期为84分钟。具有这个周期的摆称为Schuler摆。

若把Schuler摆放在飞机上，它会总指向地心，并不会受水平加速度的影响。若在Schuler摆上安装一加速度计，测量飞行时从地球上一点到另一点的水平加速度，然后相对于时间，对加速度积分两次，则可测量两点间的距离。

为惯性导航研制的仪器有更准确地描述地球运动的内在潜力，比如说区别加速度和倾斜。然而，现代设备的灵敏度尚未达到可以使它有效地运用于地球物理学。

10.1.4 应变和转动的测量

现在谈谈应变地震计（或应变计）。它以图 10.7 a 中表示的办法测量地球上临近两点间的相对位移。P_1处的运动由固定在P_1点的杆传递到 P_1'，测出 P_1' 和 P_2 的相对位置。由于需测的地运动周期实际上比杆中波的固有周期长得多，因此杆本身的应变可忽略不计，可认为该杆是刚性的。

起初，P_1 位于 $\boldsymbol{x}$，P_2 位于 $\boldsymbol{x}+\delta\boldsymbol{x}$。随后，这些点依次分别发生了位移 $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x})$和 $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}+\delta\boldsymbol{x})$，以致 P_2 移到 $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x})+(\delta\boldsymbol{x}\cdot\nabla)\boldsymbol{u}$。（我们采用的是 Lagrange 算子的运动描述法，见 2.1 节。）

P_1' 的位移是 P_1的位移加上由于旋转$\frac{1}{2}\mathrm{curl}\,\boldsymbol{u}$ 产生的附加项（见式（2.2））。对于一级近似，该杆的长度和方向由向量 $\delta\boldsymbol{x}$ 给出，以致 P_2 偏离P_1' 的相对位移是 $\boldsymbol{u}+(\delta\boldsymbol{x}\cdot\nabla)\boldsymbol{u}-\boldsymbol{u}-\frac{1}{2}(\mathrm{curl}\,\boldsymbol{u})\times\delta\boldsymbol{x}$。该向量的第 i 个分量是

$$\delta x_j\frac{\partial u_i}{\partial x_j}-e_{ijk}\left(\frac{1}{2}e_{jlm}\frac{\partial u_m}{\partial x_l}\right)\delta x_k,$$

这可改写为 $e_{ij}\delta x_j$，其中 e_{ij}为应变张量的笛卡尔分量

$$e_{ij}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}+\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right).$$

该结果表明应变计对应变分量确实很灵敏，但对旋转并不灵敏。

事实上，被测量的不是向量 $e_{ij}\delta x_j$，而是P_2P_1和 $P_1'P_1$间的标量差，因此 P_1 只需为杆提供枢点，而杆实际上可以是一根金属丝。转动不予考虑，P_2P_1和 $P_1'P_1$如图 10.7 b 中那样排列成一直线。如式(2.3)所示，P_2P_1' 的长度 $|\delta\boldsymbol{x}+\delta\boldsymbol{u}|-|\delta\boldsymbol{x}|$是 $e_{ij}\nu_i\nu_j|\delta\boldsymbol{x}|$，其中 ν 是沿杆的单位向量。为了确定应变的六个分量，一般需要六个不同的应变计，每一个沿着 ν 的不同方向取向。对地球自由表面附近所作的测量，零牵引力的条件给出应力分量的

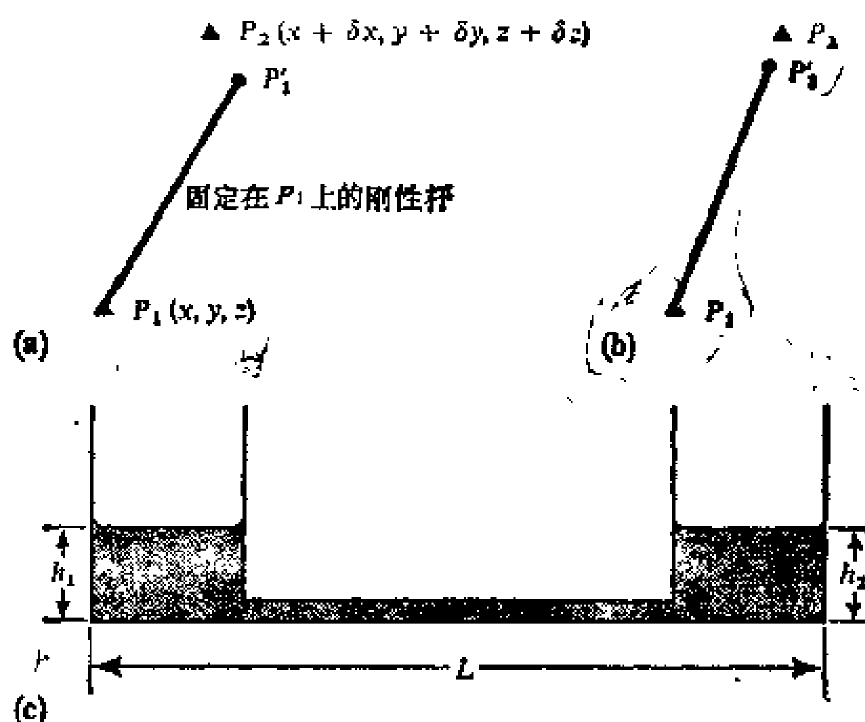


图 10.7

应变和倾斜的测量。(a) 杆 P_1P_1'固定在 P_1，并绕 P_1 旋转。(b) 杆 P_1P_1' 固定在 P_1，但 P_1，P_1'，P_2 有效地共线。为达到这个目的，或使杆以 P_1 点为枢点旋转，或使 $P_1'P_2$ 的传感器为一电容检测器，后者对 P_1，P_1'，P_2排列不整齐的反应不灵敏。(c) 由一连通管连起的两个液体槽组成的倾斜仪监测流体高度 h_1和 h_2，量 $(h_2-h_1)/L$ 的时间变化解释为倾斜。见 Beavan 和 Bilham (1977) 对温度效应的讨论

三个线性的约束条件，从而使得完整地确定应变张量，只需要三个不同的应变计。各种场地影响会使(所测量的)区域应变场发生变化，使之与地球物理意义上的应变场不同。尤其还可能存在由安放仪器的洞穴 (Harrison，1976 a) 以及安放仪器地区中地形所产生的重要影响。

可以用分布在地球表面某一地区的摆式地震仪台阵计算应变和旋转，但实际上，这种性能受到了地球结构浅层不均匀性的限制(Saito，1968)。

在其质心把一重锤悬挂起来，并用弹簧和阻尼器把它和地球耦合，这样就可以做成一个转动传感器。曾尝试过用这种方法，但从未得到有用的结果。

另一种方法是采用陀螺仪。由角动量守恒定律可知，悬挂于其质心的旋转物体，在无外加转矩的情况下，将保持其旋转轴在惯性空间中固定不变。这使我们可能测量相对于一惯性系的地球运动，也就可能用陀螺仪测定 Chandler 晃动和岩石层板块的运动。然而目前一般旋转传感器的灵敏度还未达到能有效地运用于地球物理方面。

作为一种特殊情况，围绕水平轴的转动，地球物理学中称为倾斜。在转动较小的情况下，可用三个分量的向量表示，就这个意义上讲，倾斜与两个水平分量有关。上面已经谈到，目前设计倾斜仪和水平加速度仪所根据的原理，无论如何也不可能区别两种影响。正如 Melchior (1966) 详细描述的那样，摆式倾斜仪已广泛用于测量地球固体潮。除了摆，地球物理学中最通用的是用管子连接两个装满液体的水槽(图 10.7 c)，然后测量水槽的水位差。由于温度在所用液体中的空间变化可能产生干扰信号，若连接水槽的是一个敞口的充了一半液体的槽，而不是封闭的管子，则这种干扰信号会减少。Michelson 和 Gale 在 1919 年采用这种类型的倾斜仪，其水槽间有 500 英尺长，并带有干涉仪，以测量水的高度。他们用这仪器记录了固体潮引起的倾斜。

近年来流行这样的仪器：把液体密封在一块略微弯曲的水平板下，其中留一个可自由运动的气泡，这种仪器可测量较短基线(约 20 厘米)上的倾斜。对气泡位置进行连续监测，若发生倾斜，则产生正比于气泡位移的信号。这种仪器在中加利福尼亚台阵中用来监测可能与圣安德烈斯断层活动有关的地倾斜 (McHugh and Johnston, 1976)。Harrison(1976 b)描述了类似于使用密封在光学平板玻璃下气泡的仪器的工作。若发生倾斜，此平板被重新调平以保持气泡位置。Harrison 用这种反馈作为输出信号，经过三个月的观测，能测定 M_2 潮到 0.5% 左右。然而，短基线倾斜仪对非常局部的场地效应相当灵敏，而对这些效应还不可能确定其数量。若附近的岩石单元是不均匀的，则即便使其总体产生

应变也可能引起局部性的倾斜，这部分地说明了相距很近的短基线倾斜仪为什么不总是给出同样信号的原因。

10.2 地震信号的频率和动态范围

地震学所研究的大部分信号是瞬态的，即正如那些爆炸和天然地震的地震图那样，实际上它们的长度是有限的。对这样一个瞬态信号 $f(t)$，存在着 Fourier 变换 $f(\omega)$，

$$f(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\exp(i\omega t)dt, \qquad (10.20)$$

和

$$f(t)=\int_{-\infty}^{\infty} f(\omega)\exp(-i\omega t)\frac{d\omega}{2\pi}, \qquad (10.21)$$

式中 t 是时间，ω 是角频率。我们定义振幅谱密度为 $f(\omega)$ 的绝对值，并由下式定义相位延迟谱 $\phi(\omega)$：

$$f(\omega)=|f(\omega)|e^{i\phi(\omega)}. \qquad (10.22)$$

(把 ϕ 叫做相位延迟的理由见补充 5.5。) 由于 $f(t)$ 是实的，所以下列关系式成立：

$$\begin{aligned} f^*(\omega)&=f(-\omega), \\ |f(\omega)|&=|f(-\omega)|, \\ \phi(\omega)&=-\phi(-\omega), \end{aligned} \qquad (10.23)$$

式中星号表示共轭复数。

$|f(\omega)|$ 的单位是 $f(t)$ 的单位除以频率的单位($\omega/2\pi$)。例如，用厘米为单位表示地位移 $f(t)$，则 $|f(\omega)|$ 的单位为厘米/赫。最通用的 $\phi(\omega)$ 的单位是 1 个弧度或 1 个圆周(即 2π 弧度)。

另有三种不同的信号，其普通的 Fourier 变换不存在。一种是频率为 ω_n 的正弦振荡的叠加，如太阳、月亮的引力引起的潮汐地球应变。对这种信号，我们用下列方式确定振幅 A_n 和相位延迟 ϕ_n：

$$f(t)=\sum_n A_n \exp(-i\omega_n t+i\phi_n), \qquad (10.24)$$

式中 A_n 的物理量纲与 $f(t)$ 相同。

另一种信号是平稳随机过程，如大气、海洋、某些火山喷发过程、工业活动和交通引起的环境地震地噪声。这些信号既不能用(10.21)，也不能用（10.24）表达，因此必须引入功率谱密度 $P(\omega)$，这是自相关函数 $P(\tau)$的 Fourier变换，定义为

$$P(\tau)=\langle f(t)f(t+\tau)\rangle,$$

式中符号$\langle\ \rangle$表示对时间 t 的平均。

$$P(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} P(\tau)e^{i\omega\tau}d\tau. \qquad (10.25)$$

$P(\omega)$的单位是 $f(t)$的单位的平方除以频率的单位($\omega/2\pi$)。对以厘米量度的位移 $f(t)$，$P(\omega)$的单位是厘米²/赫。$P(\omega)$ 并没有包含与相位有关的信息，这种类型的信号可以表达为白噪声 $w(t)$与权函数 $g(t)$的褶积(第十一章)，

$$f(t)=\int_{-\infty}^{t} w(t')g(t-t')dt', \qquad (10.26)$$

式中 $g(t)$的 Fourier 变换 $g(\omega)$与 $P(\omega)$的关系为

$$P(\omega)=g^*(\omega)g(\omega)=|g(\omega)|^2. \qquad (10.27)$$

若 $g(\omega)$的对数在上半 ω 平面中是解析的，则 $g(\omega)$的相位延迟谱可由$|g(\omega)|$来确定。

必须考虑的最后一种类型信号是非平稳、非正弦的，且在记录的有限长度外具有未知特性。我们把这种信号称为"漂移"，并把这些信号近似为在总体上依赖于时间的某些变化，可用总变化和上升时间来表征这些信号。用线性的趋势性变化对这些信号进行近似，在这种情况下，其变化率将作为参数。

当信号具有一定频率的近似正弦形式时，可根据记录测定振幅。若信号带宽已知，则可以估算出振幅或功率谱密度。同样，若已知谱密度和信号带宽，也可估算出信号振幅。

对于粗略的近似，子波振幅为其振幅谱密度与带宽的乘积。例如，对 $-\omega_0<\omega<\omega_0$，$|f(\omega)|=F$（常数）；对其它 ω，$|f(\omega)|=0$，而对所有 ω，$\phi(\omega)=0$，相应的信号 $f(t)$ 被写为

$$f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\omega_0}^{\omega_0} F\exp(-i\omega t)d\omega$$

$$=2Ff_0\frac{\sin\omega_0 t}{\omega_0 t},$$

式中 $f_0=\omega_0/2\pi$。最大振幅在 $t=0$ 处，并等于 $F\cdot 2f_0$，因为在 $x=0$ 时，$x^{-1}\sin x=1$。同样，对一个带通信号，当其 $\omega_0<|\omega|<\omega_1$ 时，$|f(\omega)|=F$；对其它 ω，$|f(\omega)|=0$；而其中 $\phi(\omega)=0$，则我们得

$$f(t)=2Ff_1\frac{\sin\omega_1 t}{\omega_1 t}-2Ff_0\frac{\sin\omega_0 t}{\omega_0 t},$$

式中 $f_1=\omega_1/2\pi$。最大振幅发生在 $t=0$ 处，且

$$f(t)_{t=0}=F\cdot 2(f_1-f_0), \tag{10.28}$$

这又是振幅谱密度与带宽的乘积。

由对噪声定义的功率谱密度 $P(\omega)$，我们得到

$$P(\tau)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}P(\omega)e^{-i\omega\tau}d\omega, \tag{10.29}$$

这是（10.25）的逆变换。因此

$$P(\tau)\Big|_{\tau=0}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}P(\omega)d\omega.$$

此外，根据定义，

$$P(\tau)\Big|_{\tau=0}=\langle f^2(t)\rangle.$$

因此我们有

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}P(\omega)d\omega=\langle f^2(t)\rangle. \tag{10.30}$$

例如，当 $\omega_0<|\omega|<\omega_1$ 时，$P(\omega)=P$；对其它 ω，$P(\omega)=0$，于是有

$$\langle f^2(t)\rangle = P\cdot 2(f_1-f_0). \qquad (10.31)$$

因此，对一粗略的近似，时间域内的噪声均方振幅等于功率谱密度和带宽的乘积。

根据（10.28）和（10.31），并且已知信号的带宽，就能近似地求出振幅谱密度和振幅的关系以及功率谱密度与均方振幅的关系。

下面研究一下地震信号并考察各种观测结果所涉及的频率和动态范围。每种情况下，我们都将借助于上述四种信号中的一种来表征观测结果。

10.2.1 周期为20秒左右的面波

标准长周期地震仪是一种经典的机械地震仪。对远距离浅震而言，它所记录的最主要信号是周期约为20秒的面波。由于体波的几何扩散比面波强，因此体波振幅较小。周期小于约10秒或15秒的面波由于浅处的不均匀性而散射。面波的衰减在约20秒处最小，因为周期大于25秒的面波在进入软流层时开始失去能量。此外当周期大于20秒时，标准地震仪的放大倍数减小。因此，很自然，Gutenberg和Richter（1936）根据周期为20秒的面波振幅，引入震级标度M_s。（见附录2。）

图10.8表示了作为震中距函数的震级$M_s=3$的浅源地震的面波振幅。曲线是由Richter的表中（1958，p. 346）得到的。最灵敏的长周期地震仪可检测$M_s\approx 3$的远震，这也就是在$\Delta=20°$处，其振幅为100纳米（10^{-5}厘米），在$\Delta=80°$处，其振幅为10纳米。另一方面，最大的地震（$M_s=8\frac{1}{2}$）在$\Delta=20°$处振幅为几厘米，在80°处，则为几毫米。这样大的信号动态范围（10^{-6}至1厘米）对地震仪器和系统提出了更高的要求(见补充11.1)。

如10.1节中所描述的，有三种基本传感器能用于地震学：对加速度灵敏的惯性传感器，测量安置点下边地应变的应变计，能测量旋转的陀螺仪。给出与一个小地震，比如$M_s\sim 3$的20秒

面波有关的加速度值 a，应变 e 和转动 θ 加以说明 对周期为 20 秒的平面 Rayleigh 波，其相速度为 3.5 公里/秒，位移振幅为 0.1 微米，我们有

$$a \sim \left(\frac{2\pi}{20}\right)^2 \cdot 10^{-5}\ \text{厘米/秒}^2 \sim 10^{-6}\ \text{伽} = 10^{-9} g,$$

$$e \sim \frac{2\pi}{3.5 \times 10^5 \times 20} \cdot 10^{-5} \sim 10^{-11},$$

$$\theta \sim e = 10^{-11} \sim 2 \times 10^{-6}\ \text{弧度} \cdot \text{秒} \cdot$$

巨大的爆炸，如地下核试验，也能产生 20 秒的面波，其振幅近似地正比于 TNT 炸药的当量值。坚硬岩石中一百万吨的爆炸粗略地相当于 $M_s \sim 5\frac{3}{4}$，因此最灵敏的长周期地震仪能检测几千吨的远距离爆炸（相当于 $M_s \sim 3$）

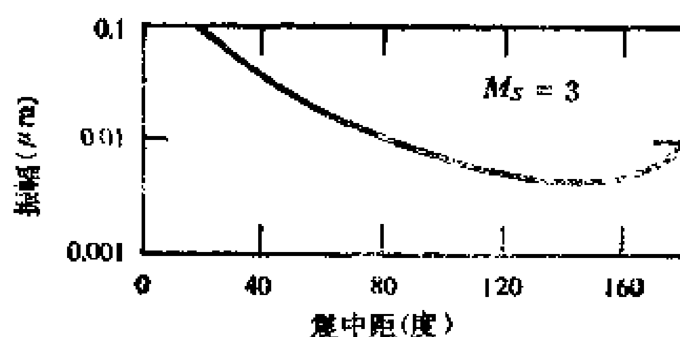


图 10.8

震级 $M_s = 3$ 的浅源地震的面波振幅与震中距的函数关系

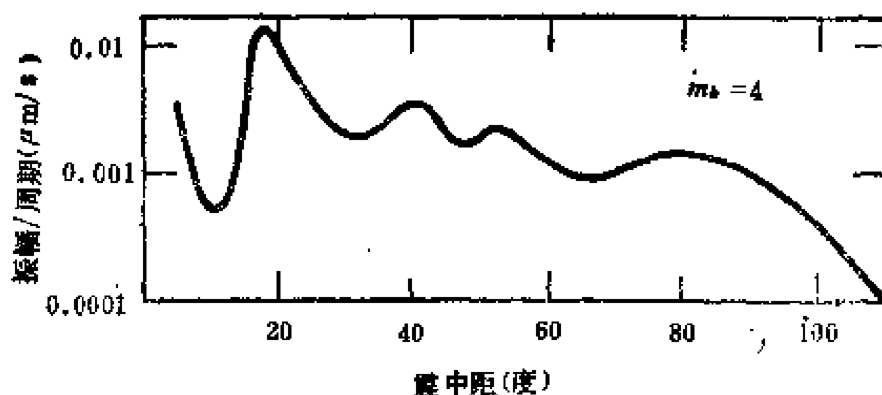


图 10.9

$m_b = 4$ 的浅源地震的 A/T 的值（A＝振幅，T＝周期）与震中距的函数关系

10.2.2 $5^\circ<\Delta<110^\circ$的P波

远震P波信号强度可由确定体波震级m_b的Gutenberg标定曲线（见Richter，1958，p. 688）求得。图10.9表示出作为$m_b=4$的浅源地震的震中距的函数的A/T的曲线，其中A是振幅（单位为微米），T是周期（单位为秒）。该曲线可用于求任一浅源地震的m_b，

$$m_b=\log(A/T)_{观测}-\log(A/T)_{m_b=4}+4,$$

式中$(A/T)_{观测}$是在确定的震中距处（必须已知）A/T的观测值，$(A/T)_{m_b=4}$是对该距离由图10.9所得的值。对$m_b=4$的地震，用标准地震仪记得的P波，T通常约为1秒，在$\Delta=20^\circ$处其振幅约为10纳米；而在$\Delta=90^\circ$处其振幅约为1纳米。用最灵敏的短周期地震仪可以检测这些信号。最大的地震（$m_b\sim8$）在$\Delta=20^\circ$处A/T将为1毫米/秒。对这样大的地震，T可能约为10秒，振幅则在1厘米量级。下面再看一下从10^{-7}到1厘米的大动态范围的要求。

在$T=1$秒时，1纳米位移相当于加速度$4\times10^{-10}g$，并相当于转动和应变约为10^{-12}。

10.2.3 面波和P波振幅谱密度的范围

图10.8和图10.9中，把信号振幅表示为距离的函数。图10.10则把10.2节中定义的在$\Delta=90^\circ$时面波和P波的振幅谱密度表示为频率的函数。

标有震级的实线表示最小可检测事件和最大事件的典型的谱密度。这是借助于实际地球模型（第七章）计算的理论谱，把经验数据画成图，并应用震源的相似律（第十四章，图14.14）得到的。

虚线表示通常研究的每一类型波频谱范围的大致限度。对远震而言，所研究的面波，高频限度相当于周期约为10秒。较短的波或者被后面图10.11所示的高的环境地震噪声所湮没，或者由地表附近强烈的地球横向不均匀性所散射。其效应与路径有关，

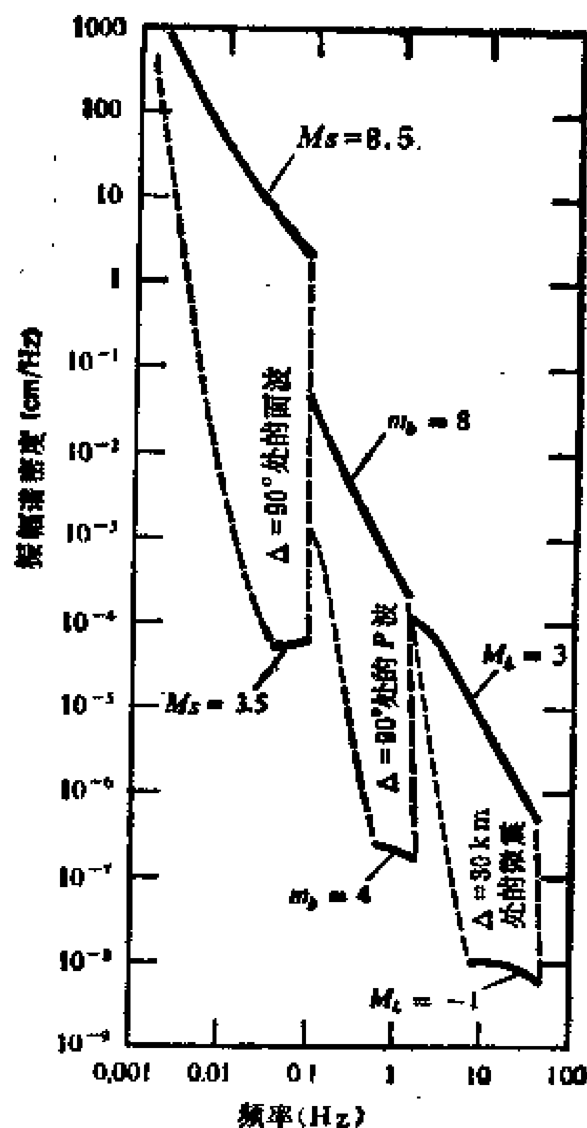


图 10.10

在震中距为 90° 时，面波的振幅谱密度范围相应于 M_s 从 $3\frac{1}{2}$ 到 $8\frac{1}{2}$ 的范围，对在 90° 时的 P 波，则相应于 m_b 从 4 到 8；对震中矩为 30 公里的微震 S 波，则相应于震级 M_L 从 −1 到 3

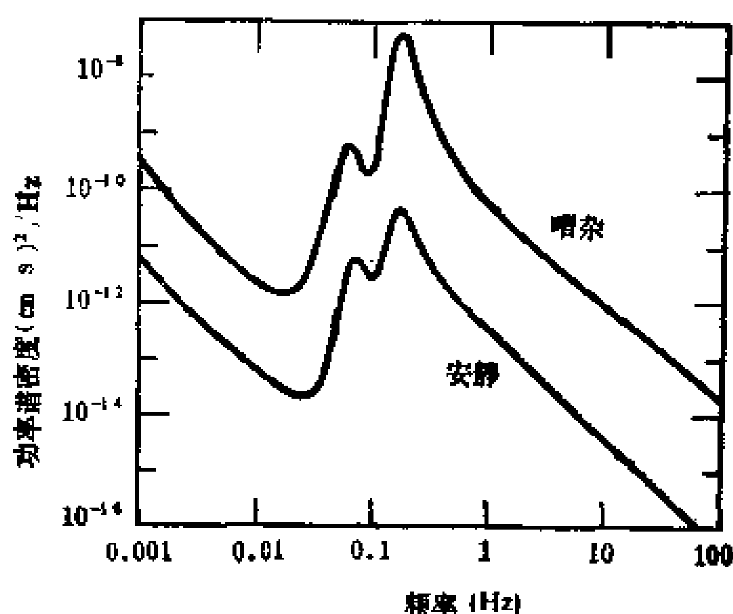


图 10.11

在坚硬基岩上典型台站的嘈杂和安静条件下环境地震噪声的功率谱

经过海洋盆地的路径消除了周期短于 15 秒左右的 Rayleigh 波，而地盾区的路径则把短周期面波传送到很长距离。低频限度则是由通常的地震仪的灵敏度决定的。

对P波，高频限度主要由衰减决定。小地震的低频限度由标准短周期地震仪的特性决定，因为设计这些地震仪是为了压缩下面将予以讨论的高环境噪声的频率范围。对较大地震，展宽频谱范围到较长周期是可能的。

微震信号的频谱范围在下一节中加以讨论。

10.2.4 短震中距的微震波

图 10.10 还表示了在 $\Delta\sim30$ 公里处观测到的微震的S波频率及动态范围。微震通常定义为 $M_L<3$ 的地震，其中 M_L 是最初对南加利福尼亚地方震定义的 Richter 震级。典型的低震级限度是 $M_L\sim-1$，这是由环境噪声决定的。在 $\Delta=30$ 公里处，$M_L\sim-1$ 的位移振幅为 10^{-7} 厘米的量级，其频率高达几十赫。然而其相应的加速度($\sim10^{-6}\,g$)大大高于远震P波和S波的阈值，使

仪器较容易记到它。相应的应变和转动为 10^{-9} 量级。

10.2.5 环境地震噪声

图 10.11 表示两种有代表性的地震噪声功率谱，这是在一远离人类活动的坚硬基岩上的一个典型台站，附近又没有大风时，分别在安静和有噪声两种条件下得到的结果。该图是采用新近的观测值，修正了 Haubrich(1967)发表的曲线后得到的。Pomeroy 等(1969)研制了高增益长周期(HGLP)地震仪，并在全球八个台站上安装了这种仪器。Savino 等(1972)使用这种仪器的记录，发现 30—40 秒间存在噪声功率的极小值，于是在周期长于约 30 秒处，必须对上述曲线作大的修正。

噪声谱的主要特性是约在 0.14 赫和 0.07 赫处有两个峰值。两个峰值都是由于海浪引起的。较小的峰值发生在观测到大部分波的主要频率处，并如 1904 年 Wiechert 最初提出的，这种波是由于海浪对海岸的作用而产生的。Longuet-Higgins 在 1950 年解释，主峰是由于持续的海浪压力产生的，而这些海浪则可能是在风暴发源地区或海岸附近沿相反方向传播的波形成的。这种机制产生了频率为海浪两倍的地震波。Hasselman(1963) 证明了两种理论都定量地解释了地震波和海浪的观测结果。

安放在坚硬岩石上密封机壳里的竖直分向地震仪记录的噪声强度，与地区气象条件和覆盖层深度无关。另一方面，若仪器房很浅，则水平向长周期地震仪，如高增益长周期地震仪会受局部气象条件产生的噪声影响。然而，这种影响随深度很快衰减。若把地震仪放在 100 米深处，噪声功率水平可减少到地表的10%。Sorrells(1971)正确地预言过这种现实中存在的衰减，他使用了以地面风速强度作为平面波传播的风致压力场来模拟噪声源。

图 10.11 中的功率谱是对地面质点速度给出的，其单位是(厘米/秒)^2/赫。把这谱与图 10.10 中的信号水平范围进行比较，就可以看出面波与 P 波范围之间的间隙是由地震噪声的最大峰值引起的。峰值功率密度在频率为 0.15 赫时为 10^{-7}(厘米/秒)^2/

赫。使带宽为此频率的一半，从(10.31)可得质点的均方速度为 1.5×10^{-8}(厘米/秒)^2。于是均方根质点速度约为 10^{-4} 厘米/秒，相应的均方根位移噪声水平约为 10^{-4} 厘米。另外，振幅为 10^{-4} 厘米、带宽为 0.075 赫的信号的振幅谱密度约为 7×10^{-4} 厘米/赫。这就说明了图 10.10 中面波范围和 P 波范围之间存在凹形间隙的原因：凹形间隙的尖端接近于(0.1 赫，10^{-3} 厘米/赫)这一点。

同样，在频率为 0.01 赫处位移噪声水平约为 10^{-5} 厘米，阈值信号的相应振幅谱密度约为 10^{-3} 厘米/赫。这解释了图 10.10 所示的面波信号范围的低频限度。

10.2.6 自由振荡振幅

地震激起的自由振荡振幅随时间而衰减。Benioff 等(1961)得到了其衰减被校正了的 1960 年智利大地震的初始振幅。此测量结果是用应变仪得到的，基阶振型球型自由振荡的起始应变振幅 ${}_0S_2(T=54分)$，${}_0S_5$(20分)和 ${}_0S_{19}$(6 分)分别为 2×10^{-11}，8×10^{-11} 和 2×10^{-9}。

用 LaCoste-Romberg 固体潮重力仪也测出了同一地震的自由振荡。Ness 等 (1961) 所作的功率谱分析展示了振幅为 0.1—1 $\times(10^{-9}g)^2$/(周/小时)，带宽为 1 周/小时的一小部分的谱峰值，因此这些振荡的垂直加速度振幅为 $1/10^{-9}g$。

阿部(Abe, 1970)给出了 1963 年 10 月 13 日千岛群岛地震($M_s=8^1/_4$，地震矩$=7.5\times10^{28}$ 达因·厘米)和 1964 年 3 月 28 日阿拉斯加大地震($M_s=8.3$，地震矩$=7.6\times10^{29}$ 达因·厘米)的初始位移振幅的估计。阿拉斯加地震的 ${}_0S_{10}$ 到 ${}_0S_{14}$ 的初始振幅约为 10^{-2} 厘米。

有一种最灵敏的加速度传感器 (Block and Moore, 1970) 能检测小到 $M_s=6.5$ 的地震的高阶数自由振荡峰值。频率范围为 10—20 周/小时，这些峰值的信号水平约为 $10^{-21}g^2$/(周/小时)。

10.2.7 地球固体潮的振幅，Chandler晃动，板块转动和月震

半周日和周日的地球固体潮是低于 1 周/小时频率范围里的

最大信号。其加速度峰-峰振幅约为 $3\times10^{-7}g$，其应变振幅约为 10^{-7}。

1765 年 Euler 预言了自由章动引起的纬度变化，这以后被称为 Chandler 晃动。Chandler 是马萨诸塞州剑桥的一个商人，他发现晃动周期为 428 天，晃动的振幅约为 0.2 弧秒或 10^{-6} 弧度。

岩石层板块的最快相对转动是太平洋板块相对于南极板块的转动，其速率为 10^{-6} 度/年(Le Pichon, 1968) 或者 2×10^{-8} 弧度/年。

记录到天然月震(种类 A, Latham et al., 1971)的振幅范围为 10^{-8}—10^{-7} 厘米，周期为 1 秒左右，地球的噪声谱(图 10.11)表明，这些谱在地球上不能用远震办法来检测。

10.2.8 震中区的地震运动

图 10.12 显示了由 Page 等(1975) 总结的在三个地震震级范围内，水平向地面加速度的峰值（以重力加速度为单位）与到断层滑动的最近地表痕迹的距离的函数关系。最大值为 1.25 g，是 1971 年圣费尔南多地震(震级 6.6)期间在离断层面 3 公里的岩脊上记录下来的。

图 10.13 中给出了典型的加速度谱密度的曲线，这是在离中等大小地震的断层破裂面8公里处的一个台站上得到的(Temblor 台站记录，在 1966 年 6 月 28 日加利福尼亚帕克菲尔德地震期间所作，$M_s=6.3$，$M_L=5.5$，地震矩 $=1.4\times10^{25}$ 达因·厘米)。该曲线对周期短于 1 秒的部分是从实际记录中得到的，对周期长于 1 秒的部分，是使用合适的位错模型外推得到的。

为了完整描述地震的震源机制，必须得到如图 10.13 所示那样宽的频谱范围。这个要求给地震仪器使用带来了困难。图10.13 表明，主信号的峰值加速度谱密度在 3 赫处为 100 (厘米/秒^2)/赫，这相当于加速度振幅为 0.3 g。另外，在 0.01 赫左右的频谱带宽中所包含信号的加速度振幅约为 $10^{-6}g$。问题是如何把振幅为高频信号振幅百万分之一的低频信号分离出来。因此，线性度

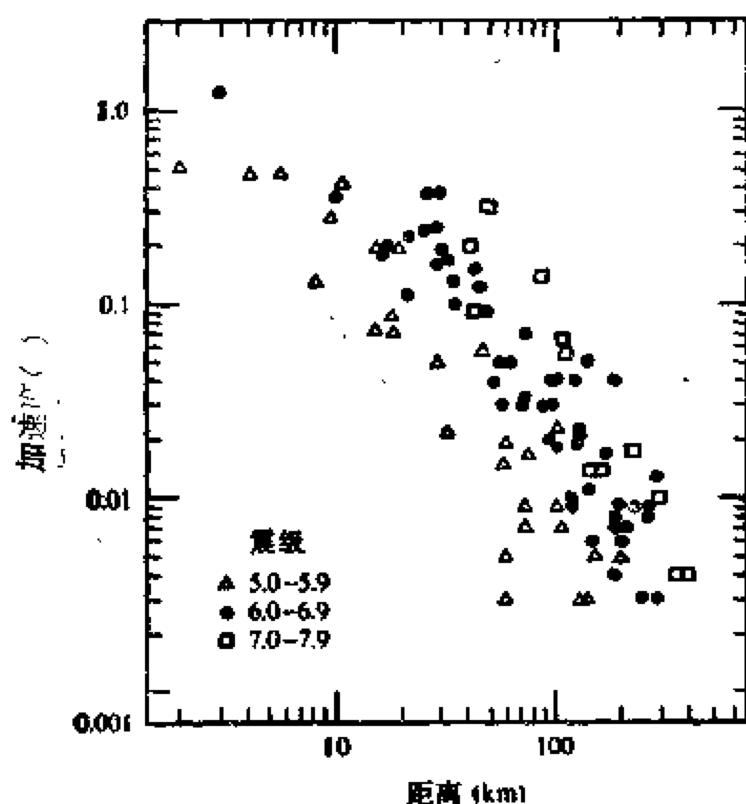


图 10.12
水平向地面加速度峰值(以重力加速度为单位)，是断层滑动的最近地表痕迹的距离的函数。不同记号用以表示不同的震级范围（引自Page et al., 1975)

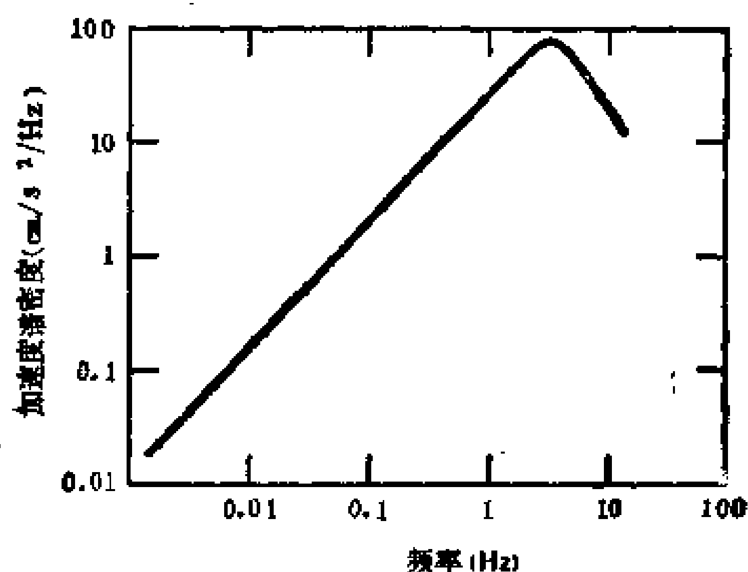


图 10.13
在中等大小地震震中区的加速度谱密度的一个实例

对宽带近场地震实验中的仪器来说，是个重要的技术要求。由于没有一个实际传感器是完全线性的，一小部分高频波将被检波，并表示为假的慢运动，掺杂到长周期信号中。

10.2.9 应变阶跃

灵敏的应变仪经常记录到远震时应变的阶跃式变化(Press, 1965)。图 10.14 表示了作为地震震级和震中距函数的应变阶跃量(Wideman and Major, 1967)。这些阶跃的原因尚不清楚。有些人认为这是直接与震源有关的全球静态形变引起的，另一些人解释为仪器的滞后或解释为与应变仪连接的岩体性质的微小变化。地震波经过后，可能引起岩体连接处的小的永久性位移，雨量也与所观测的某些应变阶跃相对应。日本地壳运动观测台网(1970)观测了有关 1969 年 9 月岐阜地震的应变阶跃。与图 10.14 中所示直线不同，这些数据普遍趋向于和距离的立方成反比关系，就如对无限介质中位错所预言的一样(对方程(4.34)取微分，得到应变)。

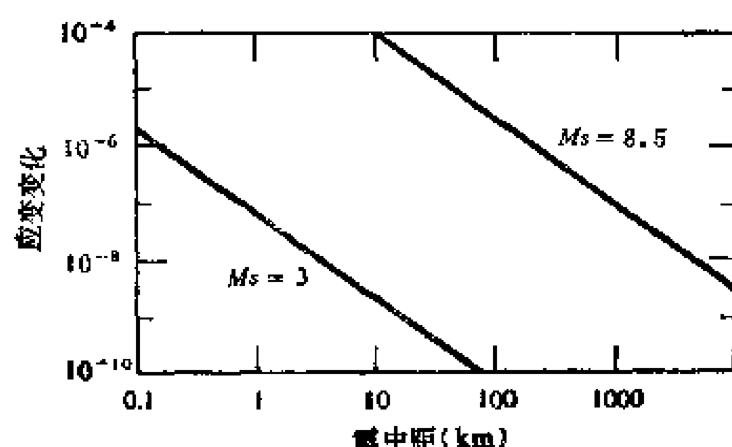


图 10.14

震级为 3 和 8.5 情况下，作为震中距的函数的应变阶跃(引自 Wideman and Major, 1967)

10.3 信号检测

既然已知道地震信号的频率和动态范围，现在再考虑一下地

震传感器的更实际问题。首先，地震计的灵敏度当然必须达到足以能检测出信号。传感器的灵敏度最主要受其耗能元件产生的热噪声的限制。

10.3.1 地震计摆的 Brown 运动

当具有一个自由度的摆(即运动限制在一个方向)，在绝对温度 T(Kelvin 温标)时，与周围空气处于热平衡状态下，此摆具有$\frac{1}{2}kT$(k 是 Boltzman 常数)的平均动能。若它具有较多能量，则会通过加速分子运动使周围空气变热，若它能量较少，空气分子的碰撞会加速摆的运动。

重新回到图 10.1 及式(10.1)和(10.2)，空气分子碰撞所施的力 $e(t)$产生的摆的运动是下式的解：

$$M\ddot{\xi}+D\dot{\xi}+k\xi=e(t). \tag{10.32}$$

用 $e(t)$与前面(10.8)中所得的脉冲响应 $f(t)$褶积，给出解

$$\xi(t)=\frac{1}{M}\int_{-\infty}^{t}e(t')f(t-t')dt'. \tag{10.33}$$

由于单个分子的运动是独立的，不相关的，因此 $e(t)$的自相关应有下列形式：

$$\langle e(t)e(t')\rangle=\sigma^2\delta(t-t'), \tag{10.34}$$

式中 σ^2 由摆的平均动能等于$\frac{1}{2}kT$ 这一条件确定。从(10.33)我们有：

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}M\langle\dot{\xi}^2(t)\rangle&=\frac{1}{2M}\int_{-\infty}^{t}\dot{f}(t-t')\int_{-\infty}^{t}\langle e(t')e(t'')\rangle\dot{f}(t-t'')dt''\\&=\frac{\sigma^2}{2M}\int_{-\infty}^{t}[\dot{f}(t-t')]^2dt'\\&=\frac{\sigma^2}{2M}\int_{0}^{\infty}[\dot{f}(t)]^2dt.\end{aligned}$$

然后，用式(10.7)和(10.8)我们有：

$$\frac{1}{2}M\langle\dot{\xi}^2(t)\rangle=\frac{\sigma^2}{2M}\frac{1}{4e}$$

$$=\frac{1}{2}kT, \tag{10.35}$$

或写成

$$\sigma^2=4MekT.$$

由于摆锤是在力 $e(t)$下以速度 $\dot{\xi}(t)$运动的，所得功率为

$$\langle\dot{\xi}(t)e(t)\rangle=\frac{1}{M}\int_{-\infty}^{t}\langle e(t)e(t')\rangle\dot{f}(t-t')dt'$$

$$=\frac{\sigma^2}{M}\dot{f}(0)$$

$$=4\,ekT. \tag{10.36}$$

这表明，若 $e=0$，则没有热噪声功率。换句话说，若没有损耗的部件，能量不能流入系统，因为流出的和流入的必须平衡。只有阻尼器可以将其动能转换为热，而重锤和弹簧则不能。

为了能更直接地观察到阻尼器产生的噪声，我们将不考虑弹簧计算功率：

$$\langle\dot{\xi}(t)e(t)\rangle=\frac{\langle e(t)\,e(t)\rangle}{2eM}$$

$$=\frac{\sigma^2\delta(0)}{2eM}. \tag{10.37}$$

功率是无限的！但(10.25) 中确定的功率谱密度是有限的。由于 $\delta(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\exp(-i\omega t)d\omega$，我们可以写出

$$\langle\dot{\xi}(t)e(t)\rangle=\frac{\sigma^2\delta(0)}{2eM}$$

$$=\frac{1}{2\pi}\cdot\frac{\sigma^2}{2eM}\int_{-\infty}^{\infty}d\,\omega$$

$$=\int_{0}^{\infty}4kTdf, \tag{10.38}$$

式中 $f=\omega/2\pi$。换句话说，在频带宽为Δf 时阻尼器的可用热功

率是 $4kT\Delta f$。热功率的这种形式与 ε 无关，不仅适用于机械耗能系统，也适用于电耗能系统。例如，摆系统的带宽约为 ε，根据式(10.36) 总噪声功率为 $4\varepsilon kT$，提供功率密度为 $4kT$。电阻 R 的噪声功率可用$\langle V^2\rangle/R$ 来表示，其中 V 是电压。使该功率等于 $4kT\Delta f$，可得众所周知的 Johnson 噪声公式：

$$\langle V^2\rangle=4RkT\Delta f. \tag{10.39}$$

现在考虑一下产生与其 Brown 运动相等的摆运动的地加速度 $\alpha(t)$。由于加速度产生力 $M\alpha(t)$，因此阻尼器的可用噪声功率为：

$$M\langle\dot{\xi}(t)\alpha(t)\rangle=\frac{M}{2\varepsilon}\langle\alpha(t)\alpha(t)\rangle$$

$$=4kT\Delta f$$

或

$$\langle\alpha^2(t)\rangle=\frac{8\varepsilon kT\Delta f}{M}. \tag{10.40}$$

这给出了等于摆的 Brown 运动的地面加速度。采用 $Q^{-1}=2\varepsilon/\omega_s$，其中 $\omega_s/2\pi$ 是无阻尼的摆周期，(10.40) 改写成：

$$\frac{\langle\alpha^2(t)\rangle}{\Delta f}=\frac{\omega_s}{MQ}\cdot 4kT. \tag{10.41}$$

于是，加速度噪声功率密度反比于重锤质量、Q 与摆周期的乘积。

大多数地震仪被置于相应于 $Q=\frac{1}{2}$ 的临界阻尼状态。这样，

$$\frac{\langle\alpha^2(t)\rangle}{\Delta f}=\frac{\omega_s}{M}8kT. \tag{10.42}$$

为了与图 10.11 给出的地面噪声谱相比较，我们计算等于热噪声的地面速度 v 的谱噪声。

$$\frac{\langle v^2\rangle}{\Delta f}=\frac{8\omega_s kT}{(2\pi f)^2M}. \tag{10.43}$$

有意义的是从该图中发现，"观测的"地面噪声谱粗略地表明对于

长于 30 秒的周期和短于 3 秒的周期分别具有相同的 f^{-2} 的频率依赖关系(注意当 $\omega\to 0$ 和 $\omega\to\infty$ 时的渐近性质)。对"平稳的"曲线，具有斜率 f^{-2} 的那些部分相应于

$$\frac{8\omega_s kT}{(2\pi)^2 M}=10^{-17}(\text{厘米/秒})^2\cdot\text{赫}\qquad \text{对于长周期,}$$

$$=10^{-13}(\text{厘米/秒})^2\cdot\text{赫}\qquad \text{对于短周期.}\quad(10.44)$$

令摆周期 $T_s=2\pi/\omega_s$, $kT=4\times10^{-14}$ 尔格，则发现使临界阻尼的摆噪声低于地躁声的要求是由下式给出的:

$$MT_s>5\times10^{3}\text{ 克·秒}\qquad \text{对于长周期}$$

和

$$MT_s>5\times10^{-1}\text{ 克·秒}\qquad \text{对于短周期.}$$

标准长周期地震仪具有约 10 公斤的重锤和 15—30 秒的周期，满足了上述要求。而 Block-Moore(1970) 加速度计，装在严格控制温度的坚硬真空装置(达 10^{-7} 毫米水银柱高)内是它的 10 克的重锤太小而且 1 秒的周期又比较短，不满足上述条件。该仪器的低的热噪声是通过使摆的 Q 提高(200)，并使用电容传感和静电反馈(电子致冷)来达到的。

然而我们注意到 Block-Moore 加速度计即使有这样高的 Q 值，其热功率密度仍稍高于平静时期的地震噪声水平。这是由 Savino 等(1972) 采用 Pomeroy 等(1969) 研制的、装有 10 公斤重锤、周期为 30 秒的摆的仪器所作的记录加以确定的。后一种仪器的低噪声是通过严格的环境控制，即把仪器系统安置在一密封的容器里来达到的。

通常使用的短周期地震计的摆周期为 0.1 到 1 秒，克服热噪声所需的重锤则只是 0.5 到 5 克。而短周期地震计常用的摆锤比这大得多。下一节将证明：这种仪器的传感装置(磁体空隙中一个活动线圈)对较大的信号功率要求较大的摆锤。

Byrne(1961) 详细讨论了摆耦合于电磁换能器，放大器以及电流计时产生的热噪声。

10.3.2 电磁速度传感器

摆相对于地震计框架的运动通常是用图 10.15 所示的电磁速度传感器测量的，与重锤相连的线圈以速度 $\dot{\xi}(t)$ 穿过磁场运动时，在线圈端点就产生电压 $V(t)$。端点间并联电阻 R。设 l 表示磁通量密度 B 的磁场内线圈导线的长度，并假设线圈移动方向，磁场的方向和线圈里电流的方向互相垂直。

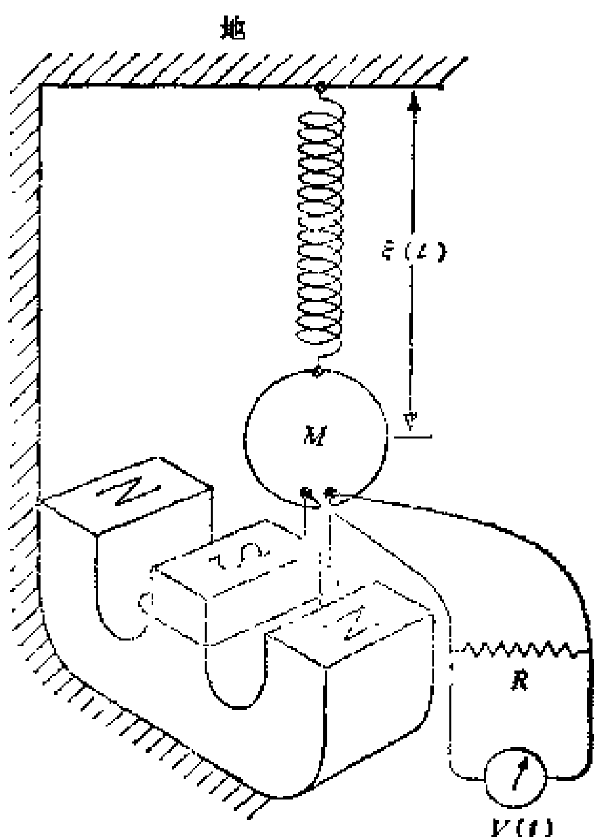


图 10.15

当与摆锤相连的一线圈穿过磁场运动时，跨过线圈端点的电压正比于摆锤与磁体间的相对速度

首先考虑一下摆锤穿过磁场移动所作的机械功。按 Biot-Savart 定律，所受力 F 为：

$$F=IlB, \tag{10.45}$$

式中 I 是线圈里的电流。所消耗的机械功率为

$$F\dot{\xi}=IlB\dot{\xi}, \tag{10.46}$$

此功率必定为电阻 $R+R_0$（R 是并联的，R_0 是线圈的）所消耗，因为这些是此系统中唯一的耗能元件。于是我们得到

$$VI=IlB\dot{\xi}$$

即

$$V=lB\dot{\xi}. \tag{10.47}$$

若把 lB 写作 G，则可发现一有趣的结果：$V=G\dot{\xi}$ 和 $F=GI$。这是有关不可逆热力学的 Onsager 互易定理的特殊情况。

由此可见，

$$I=\frac{G\dot{\xi}}{R_0+R} \tag{10.48}$$

且

$$F = \frac{G^2 \xi}{R_0 + R}.$$

由于存在作用于摆锤的力 F，摆的运动方程为

$$\ddot{\xi} + \omega_s^2 \xi = -\ddot{u} - \frac{G^2}{R_0 + R} \frac{\dot{\xi}}{M}. \tag{10.49}$$

将(10.49) 与带阻尼器的摆的方程(10.2) 比较，可得

$$2e = \frac{G^2}{(R_0 + R)\ M}. \tag{10.50}$$

一般来说，若摆的机械衰减不是零，而是 e_0，则总衰减为

$$e = e_0 + \frac{G^2}{2(R_0 + R)\ M}. \tag{10.51}$$

从(10.48) 可知由摆的运动 $\dot{\xi}(t)$ 在并联电阻中产生的电功率为

$$\langle VI \rangle = R\langle I^2 \rangle = \frac{RG^2}{(R_0 + R)^2} \langle \dot{\xi}^2(t) \rangle. \tag{10.52}$$

为使传感器的感度大，$G^2/(R_0 + R)$ 必须相当大。而从 (10.51) 可发现衰减 e 变大，使摆对地运动的响应不灵敏了。为使 e 保持比较小，不得不增加 M。这就是没有电子放大器的灵敏仪器需要很大重锤质量的原因。

若忽略 e_0，当

$$\frac{e}{\omega_s} = \frac{G^2}{2(R_0 + R)\ M\omega_s} = 1 \tag{10.53}$$

即

$$\frac{G^2}{R_0 + R} = 2M\omega_s \tag{10.54}$$

时，达到临界阻尼。将(10.54) 代入(10.52)，则功率为

$$\langle VI \rangle = \frac{R}{R_0 + R} \cdot 2M\omega_s \langle \dot{\xi}^2 \rangle. \tag{10.55}$$

功率正比于摆质量，反比于摆的周期。为了有效地工作，线圈的内阻不能大于并联电阻很多。对摆质量为 5 公斤，周期为 1 秒的典型地震仪，(10.55) 给出

$$\langle VI \rangle \sim 5 \times 10^3 \times 2\pi \times \langle \dot{\xi}^2 \rangle.$$

最高的地面噪声水平，如建在柔软沉积物上的城市，由交通引起的噪声水平可达$\sqrt{\langle\dot{\xi}^2\rangle}\cong 10^{-2}$厘米/秒。这时，

$$\langle VI\rangle \sim 1 \text{ 尔格/秒}$$
$$= 10^{-7} \text{ 瓦}.$$

这表明，应用由交通噪声引起的地震仪运动产生电的想法是不很实际的。

电磁传感器是在 1914 年由 Galitzin 引入地震学的。他以实验物理学的精确方法对待测震学，并终于澄清了识别远震事件的 P 波和 S 波的问题。他用电流计测量电磁传感器产生的电压。电流计是用纤细的悬丝固定于线圈的质心，将其悬挂在磁场中，通过线圈的电流会对悬丝施加一扭矩。一个镜子与线圈相连，用光记录镜子的偏转。到目前为止这仍然是观测地震学中最常用的地震仪系统之一。

正如(10.55) 所示，该系统的功率灵敏度正比于摆质量。若摆质量很大，正如式(10.50) 所示，用电磁的方法对其振荡施加阻尼是困难的。我们需要一个高的 G 值以得到高增益的地震计。1939 年前，磁体质量很差，可利用的磁通量 B 有限，增加 G 的唯一方法是增加线圈长度 l。Benioff(1932) 的可变磁阻地震仪达到了这一点，他使用一个磁体为摆锤，该摆锤在固定于地震计框架上，在用长导线绕成的两个线圈之间运动，能对周期约为 1 秒的 100 公斤摆锤进行临界阻尼。他的地震仪提供了有关远震距离上短周期体波的有价值的数据。

Rihn(1969) 给出了对质量为 M，周期为 T 的摆进行临界阻尼所必需的磁体体积 V 的估算值；对铝镍钴 V 磁体，V(厘米^3) = $50M$(公斤)/T(秒)。

随着磁体质量的改进，现在已再不需要 100 公斤的摆锤以获得所需要的短周期灵敏度了。Willmore(1960) 总结了电磁传感器的新进展，并提出，对于和电流计直接耦合的系统，摆锤为 5 公斤正合适。他还认为，对于长于 1 秒的摆周期，可采用磁体作

摆锤以使仪器总重量减到最小。

还可以用一个放大器或位移换能器以便进一步减小摆质量。摆质量为 10 克的 Block-Moore 加速度计可在 5 秒周期时探测 1 纳米的位移。Wiechert 的经典摆式地震仪不得不克服笔尖在熏烟纸上滑动产生的摩擦。Wiechert 地震仪的最大摆质量为 17 吨，放大倍数达到 10^4，这与在 5 秒周期所能探测的最小位移大于 10 纳米相对应。

10.3.3 标准观测站地震仪的响应特性

在普通观测站的地震仪，如世界标准地震台网台站上的那些地震仪，电磁换能器线圈的输出电流通过如图 10.16 所示的衰减电路送入灵敏的电流计。V_1 是换能器线圈中感应的电动势，V_2 是电流计线圈中感应的电动势。电流 I_1 和 I_2 可用两个线圈的运动来表示。

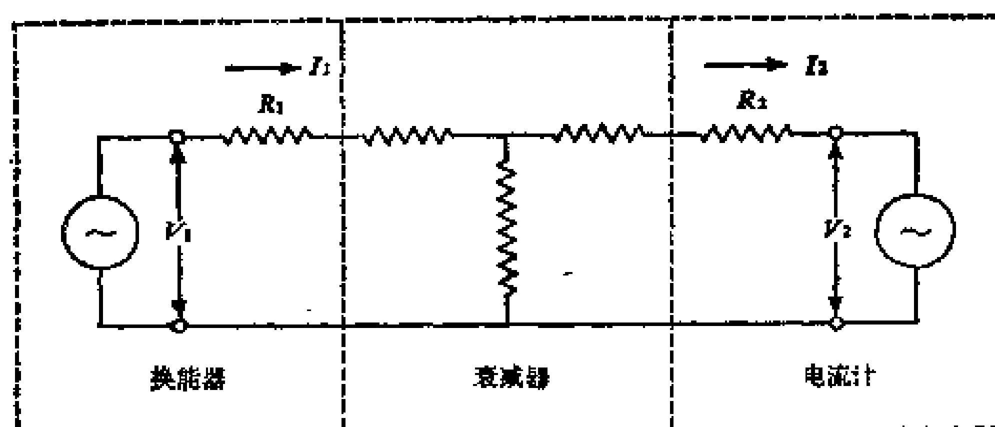


图 10.16
标准观测站地震仪的换能器—记录器电路

另一方面，线圈的运动方程包括由这些电流产生的力项。与一个给定的地运动相应的电流计偏转的完整描述，要求解一个四阶微分方程。Eaton(1957) 曾对这一问题的分析作过历史综述，这里我们将采用获原(Hagiwara, 1958) 对该解所作的简明而实际的描述。

地震计运动 $\dot{\xi}$ 受回复力 $-G_1I_1$ 的影响，其中 G_1 是地震计（线圈和磁体）的电动常数，于是地震计运动方程为

$$\ddot{\xi}+2\varepsilon_{0s}\dot{\xi}+\omega_s^2\xi=-\ddot{u}-\frac{G_1I_1}{M}, \qquad (10.56)$$

式中 ε_{0s} 是地震计的机械阻尼，ω_s 是无阻尼谐振频率，u 是地面运动，M是 (10.2) 中的运动质量。

电流计中电流 I_2 产生一个耦合力矩 G_2I_2，它将使电流计反射镜转动角 ϕ。这里，G_2 是电流计的电动常数，且

$$\ddot{\phi}+2\varepsilon_{0g}\dot{\phi}+\omega_g^2\phi=\frac{G_2I_2}{K}, \qquad (10.57)$$

式中 ε_{0g} 是电流计的机械阻尼，ω_g 是其无阻尼谐振频率，K 是电流计线圈和反射镜的转动惯量。

我们可以认为电流 I_1 为两个分开的电压源所产生的电流的总和：

$$I_1=(V_2=0\text{ 时通过 }R_1\text{ 的电流})+(V_1=0\text{ 时通过 }R_1\text{的电流})$$
$$=I_1|_{V_2=0}+I_1|_{V_1=0}. \qquad (10.58)$$

这里 R_1 是地震计线圈的电阻。若电流计线圈实际上受到阻止而无法运动，V_2 可能保持为零；这样的线圈称为被夹住。同样，$I_1|_{V_1=0}$ 是夹住地震计线圈引起的。由(10.48)我们有

$$I_1|_{V_2=0}=\frac{G_1}{Z_{11}}\dot{\xi},$$

这里 Z_{11} 为电流计被夹住时，V_1 与 I_1 的比。

同样，

$$I_2|_{V_1=0}=-\frac{G_2}{Z_{22}}\frac{d\phi}{dt},$$

其中 Z_{22} 为地震计被夹住时的阻抗 V_2/I_2。这个最终电流部分流过衰减器电路，部分流过地震计线圈，因此

$$I_1|_{V_1=0}=-\frac{\mu_2G_2}{Z_{22}}\frac{d\phi}{dt},$$

式中 $\mu_2=(I_1/I_2)|_{V_1=0}$ 是衰减系数。然后，由(10.58)可得出：

$$I_1=\frac{G_1}{Z_{11}}\dot{\xi}-\frac{\mu_2 G_2}{Z_{22}}\frac{d\phi}{dt}, \qquad (10.59)$$

同样，

$$I_2=\frac{\mu_1 G_1}{Z_{11}}\dot{\xi}-\frac{G_2}{Z_{22}}\frac{d\phi}{dt} \quad 其中\mu_1=\left(\frac{I_2}{I}\right)_{V_2=0}. \qquad (10.60)$$

将(10.59)代入地震计方程(10.56)，则可看到有个附加的阻尼项，且

$$\ddot{\xi}+2e_s\dot{\xi}+\omega_s^2\xi=-\ddot{u}+\frac{\mu_2 G_1 G_2}{Z_{22}M}\frac{d\phi}{dt}. \qquad (10.61)$$

现在 e_s 是地震计的总阻尼，$e_{0s}+\frac{1}{2}G_1^2/(Z_{11}M)$(比较(10.51))。电流计对地震计运动的反应可由(10.61)的最后一项定量表示。

将(10.60)代入电流计方程(10.57)，可得到

$$\ddot{\phi}+2e_g\dot{\phi}+\omega_g^2\phi=\frac{\mu_1 G_1 G_2}{Z_{11}K}\dot{\xi}, \qquad (10.62)$$

其中 e_g 是电流计总阻尼 $e_{0g}+\frac{1}{2}G_2^2/(Z_{22}K)$。

对一给定输入 $u(t)$，可解四阶方程得到地震仪响应 $\phi(t)$。当消去(10.61)和(10.62)中的 $\dot{\xi}$ 时，该方程可解出。我们得到

$$\ddddot{\phi}+2(e_s+e_g)\dddot{\phi}+[\omega_s^2+\omega_g^2+4e_s e_g(1-\sigma^2)]\ddot{\phi}$$
$$+2(e_s\omega_g^2+e_g\omega_s^2)\dot{\phi}+\omega_s^2\omega_g^2\phi=-\frac{\mu_1 G_1 G_2}{Z_{11}K}\dddot{u}, \qquad (10.63)$$

式中

$$\sigma^2=\frac{\mu_1\mu_2 G_1^2 G_2^2}{4Z_{11}Z_{22}MKe_s e_g}=\frac{\mu_1\mu_1(e_s-e_{0s})(e_g-e_{0g})}{e_s e_g}.$$

σ^2 是地震计和电流计间耦合程度的无量纲量量度。当衰减强时，耦合较小，且相对于机械阻尼而言，电磁阻尼较小。当摆周期与电流计周期相等时，耦合对地震仪响应的形状影响最大。根据荻原 (Hagiwara,1958)的说法，虽然这样，若取$\sigma^2<\frac{1}{4}$，则对零耦合响应的最大偏离幅度约为20%，相位约为15°。若忽略该耦合($\sigma^2=0$)，则在(10.61)中的反作用项$\propto(d\phi/dt)$取为零，可以很容

易地计算地震仪的响应函数。取 $u=U\exp(-i\omega t)$，(10.61)的解为 $\xi=\omega^2U\exp(-i\omega t)/[-\omega^2-2ie_s\omega+\omega_s^2]$。由此，把它代入到(10.62)时可得到：

$$\phi=\frac{\mu_1G_1G_2(-i\omega)}{Z_{11}K[-\omega^2-2i\varepsilon_g\omega+\omega_g^2]}\ \frac{\omega^2U\exp(-i\omega t)}{[-\omega^2-2ie_s\omega+\omega_s^2]}. \tag{10.64}$$

若 ω 较大，我们有

$$\phi\sim\frac{\mu_1G_1G_2}{Z_{11}K}\left(\frac{1}{i\omega}\right)U\exp(-i\omega t). \tag{10.65}$$

若 ω 较小，我们有

$$\phi\sim\frac{\mu_1G_1G_2}{Z_{11}K}\left(\frac{\omega^3}{i\omega_s^2\omega_g^2}\right)U\exp(-i\omega t). \tag{10.66}$$

上述公式表明在频率处于 ω_s 和 ω_g 之间时，高频部分的振幅响应峰值随着频率的增加，以 ω^{-1}的速率减小；而对较长周期部分，该峰值随着周期的增大，以 T^{-3}的速率减小。

地震仪灵敏度的绝对值由积 $G_1G_2\mu_1/Z_{11}K$ 来确定，这是容易测定的。例如，若使一恒定电流 I_0 通过电流计线圈，偏转 ϕ 由(10.57)给出：

$$\phi=\frac{G_2}{k\omega_g^2}I_0,$$

从该式可计算 G_2/K。其它的量前面已讨论过。

应用(10.64)也能够容易地计算出相位响应。使 $\phi=|\phi|\times\exp[-i\omega t+i\varphi(\omega)]$，$\varphi(\omega)$ 表示仪器的相位延迟。这里有个小问题，即选择(10.64)的符号或相位为 π 的不确定性。这种选择取决于该仪器是怎样标定的。假定我们正在标定一竖直分向地震仪，并对摆锤施加一向下的脉冲。电流计会往某一方向偏转，这就标为"向上"，这是因为摆锤向下运动相应于向上的地运动。对一脉冲运动，地震仪会按照高频渐近特性(10.65)作出响应。若选择(10.64)—(10.66)给出的符号，响应会如一负的阶跃，因为这是

相应于当 $\omega\to\infty$ 时的 $(1/i\omega)$ 的时间域信号。但是既然现在已把地脉冲"向上"运动时电流计的摆动方向标为"向上"，改变 (10.65) 的符号，则当 $\omega\to\infty$ 时，

$$\phi\sim-\frac{\mu_1 G_1 G_2}{Z_{11}K}U\frac{1}{\omega}\exp(-i\omega t+i\pi/2).$$

(10.64)和(10.66)的符号也必须颠倒。对无限频率，相位延迟是 $+\pi/2$，单调地随频率的降低而减小，在零频率处达到 $-3\pi/2$(参见补充 10.1)。

获原的原始图中的相位值必须加上 π 加以校正，以便与地震图上标地运动方向的这种习惯方法相一致。还请注意，由于他使用了 $\exp(+i\omega t)$，从他的图中得到相位延迟。图 10.17 表示

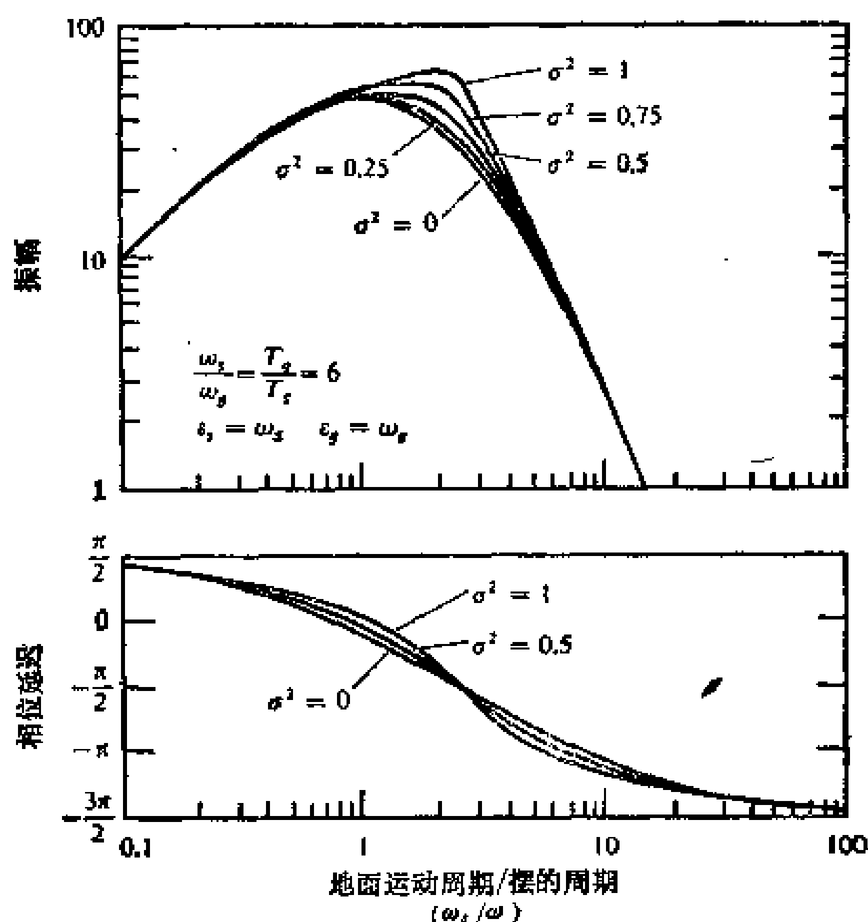


图 10.17

对各种耦合常数 σ^2 的振幅和相位延迟响应（引自 Hagiwara, 1968）

了对各种耦合常数 σ^2，在 $\omega_s/\omega_g=6$ 和 $\varepsilon_s/\omega_s=\varepsilon_g/\omega_g=1$的情况下已校正的相位延迟和振幅响应曲线，这些曲线粗略地应用于世界标准地震台网台站的长周期地震仪中。(这样的地震仪经常被称为"15—100 仪器"。这里的数字分别是地震计固有周期和电流计固有周期，两种都用秒表示。还有一种常见的是 30—100 仪器。一台典型的短周期地震仪配置为 1—0.75。)

10.3.4 长周期的高灵敏度

如(10.66)所示，标准的速度—换能器—电流计系统频率响应的衰减反比于长周期时周期的立方。通过增加摆的周期，大幅度衰减的区域可进一步延伸到更长的周期。在 10.1 节里我们已提到过 LaCoste 摆，它能在周期为几十秒时稳定工作。另一种较新的研究结果是 Benioff 的水银管倾斜仪；它利用了水银的惯性，使水银在由管子连接的两个容器间以长周期振荡。

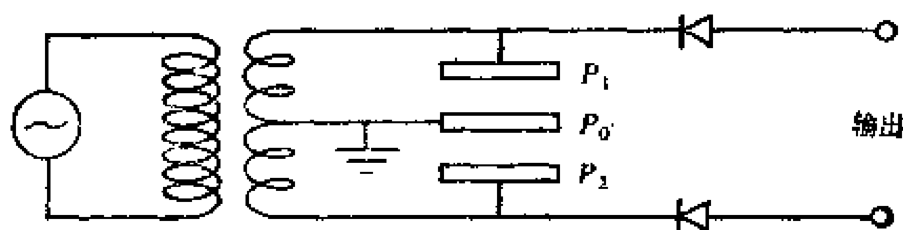


图 10.18
用于 Benioff 应变仪中的位移换能器

为提高长周期部分的灵敏度，有两种根本不同的途径：(1) 采用位移换能器代替速度换能器；(2) 采用应变传感器代替惯性传感器。两种方法都使得低频响应改善成随着周期成比例地变化。在 Benioff 的伸缩仪(1959)里，这两种改进结果被结合起来了。这种伸缩仪成功地记录了 1960 年智利大地震期间地球的自由振荡。

Benioff 使用的位移传感器由夹在固定于框架的两块板 P_1 和 P_2 间的电容板 P_0 组成，P_0 与地震计的运动部分相连接（图

10.18)。P_0的运动方向垂直于板面。一个固定频率振荡器(在 Benioff 的仪器中频率为 5 兆赫，在 Major 等(1964)的仪器中为1.5兆赫)在频率接近而不等于其共同的谐振频率时，驱动两个调谐并联的电感电容电路。电容板 P_0 处于 P_1 和 P_2 之间的中间位置时，输出端的平均电压为零。P_0 的运动使一电路较接近于谐振，而另一电路则不太接近谐振。所产生的电压大小的不平衡几乎正比于 P_0 的位移。输出电压和位移间的关系示于图 10.19。由于较大位移时明显的非线性，较新的位移换能器使用不同的电路。

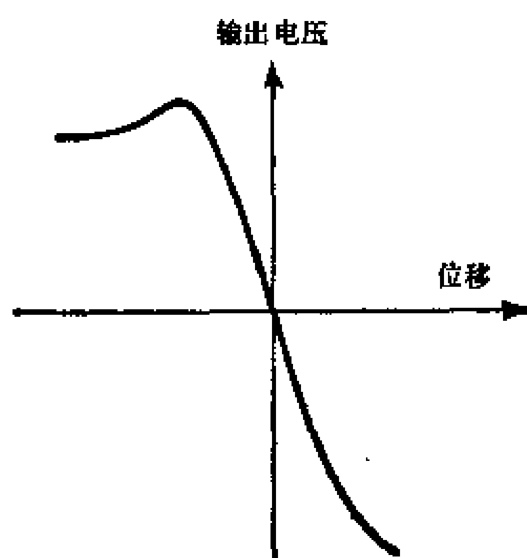


图 10.19
图 10.18 所示位移换能器的响应

图 10.20 所示的新电路工作如下：一个固定频率振荡器［在 Block 和 Moore(1966)仪器中频率为16千赫；在 Stacey 等(1969)仪器中为 3 千赫；在 Buck 等(1971)仪器中为 500 千赫］用具有中心抽头的次级线圈变压器，为电容板 P_1 和P_2提供数量相等极性相反的电压。次级线圈的中心抽头接地。电容板 P_0 处于中间位置时，P_0 相对于地的电压为零。由于并联板组成的电容反比于电容板间的距离，因此 P_0 的电压正比于 P_0 相对于中间点的位移。信号频率是精确已知的，该电压可用调谐放大器很精确测定

（锁定放大器或同步检测器）。Block 和 Moore 成功地将此装置用于他们的加速仪中，而 Stacey 等和 Buck 等则成功地应用于他们的水银管倾斜仪中。

应变地震仪作为长周期波的传感器具有某些超过惯性地震仪的优点。设想一个速度为 c 在 x 方向传播的简谐波。令 x 方向的位移 u 为

$$u=U\exp[-i\omega(t-x/c)],$$

则 x 方向的伸长应变为

$$\frac{\partial u}{\partial x}=i\frac{\omega}{c}U\exp[-i\omega(t-x/c)].$$

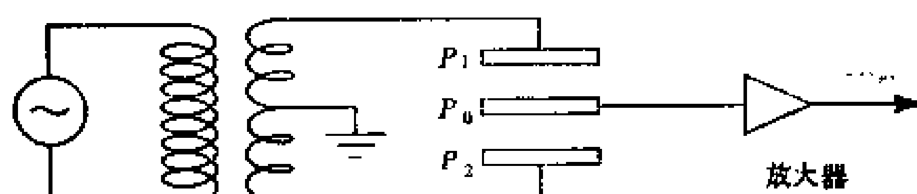


图 10.20

位移换能器。虽然这看来与图 10.18 中那个相似，但它的工作方式不同

若用位移换能器，输出电压就正比于 $\omega U/C$。另外，在周期大于摆周期时，摆相对于地震仪框架的位移，正比于 ω^2U（参见（13.2））。也就是说，正如上面提及的，应变传感器的频率响应比摆的频率响应要好，其改进是，在长周期时，频率响应变成随周期正比增加。

应变仪的另一优点是能记录长期的应变变化，而摆式地震仪除了对由倾斜和重力场变化产生的那些信号响应外，不能对其它零频信号响应。

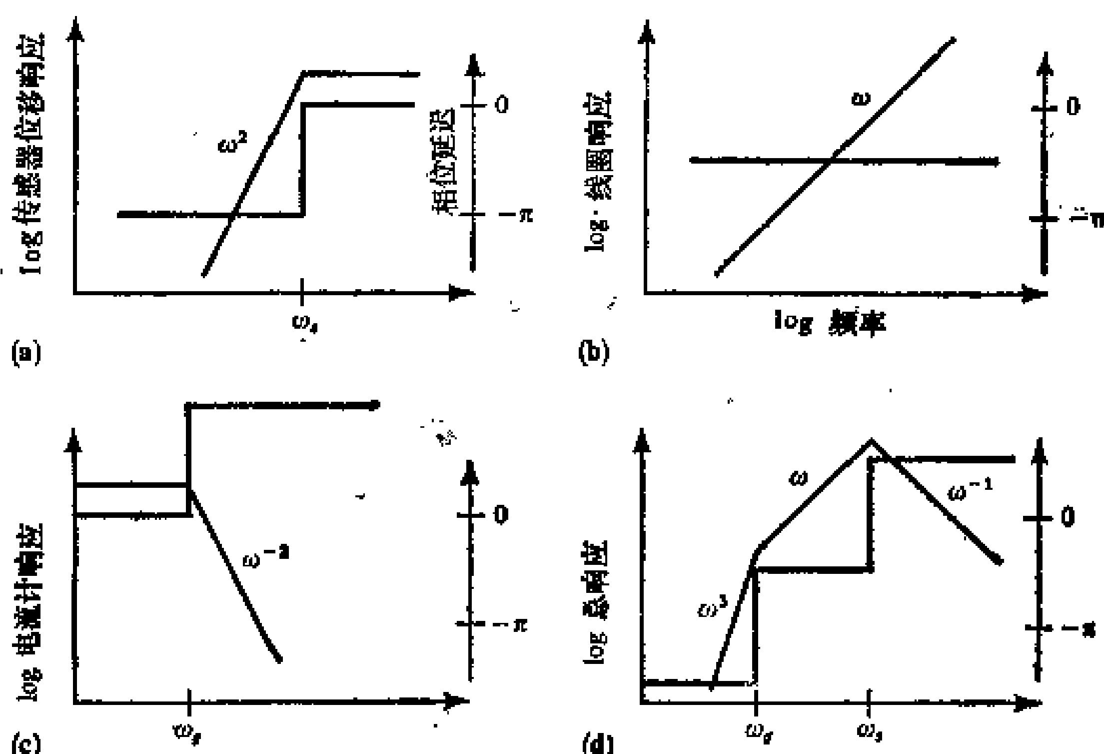
但应变仪的缺点是它把地球也作为仪器的一部分。裂缝、节理、松动的岩石、水及其它具有无法预测的机械特性的脆弱物质，所有这些的存在都会引入不希望有的噪声，并使系统更加非线性，甚至不稳定。

补充 10.1

仪器响应的一般特点

我们已看到如何能把一个记录地震运动的仪器，有效地看作是由几个部分组成的。看一下每个组成部分的频率响应是有益的，若必须得出简单的结果，则可用近似理论。我们将求出不同频率的功率变化的响应，这用双对数图来表示最好。

作为基本惯性传感器的实例，我们考虑弹簧上的重锤和摆两种情况。对这些装置，输出 ξ（图 10.1）具有（10.3）给出的振幅响应 $|X(\omega)|$。$|X(\omega)|$ 正是输出和输入振幅谱的比 $|\xi(\omega)|/|u(\omega)|$ 在高频时，它趋于常数，在低频时正比于 ω^2，因而性质大致如下图中的(a)



(a) 传感器的位移响应的主要特点是：在频率高于 ω_s 时振幅不变，在低于 ω_s 时下降很快（12 分贝/倍频程）。(b) 在全频率范围中线圈响应正比于频率。(c) 电流计响应在低于其固有频率(ω_g)时是常数，在高频时迅速下降。(d) 把前三个对数(响应)曲线相加，在 $\omega_g<\omega_s$ 时，可在低频处看到极迅速的下降。若 $\omega_s<\omega_g$，总响应的形状不变。请注意，对已得的加速响应(即对地加速度的响应)进行二次微分，相当于用 ω^{-2} 乘以 (a)，于是它在低于 ω_s 时是平坦的，在较高频率处按 ω^{-2} 下降

部分所示。

下一个部件可能是线圈，对它而言，$\xi(\omega)$是输入，电流 $I(\omega)$ 是输出。从(10.48)我们看到，因为 $\dot{\xi}(\omega)=-i\omega\xi(\omega)$，该部件的振幅响应谱正比于 ω (图中(b)部分)。

再下一部件可能是电流计，对它而言，$I(\omega)$ 是输入，反射镜角度 $\phi(\omega)$是输出，它还可能用某个与频率有关的常数相乘。我们已对假设作了简化，电流计中的电流正比于地震仪线圈中的电流，而且电流对摆的运动都没有反馈影响(耦合)。从(10.57)可知，电流计响应 $\phi(\omega)/I(\omega)$ 有这样的振幅：在低频处是不变的，在高频处具有 ω^{-2} 的性质(图中(c)部分)。

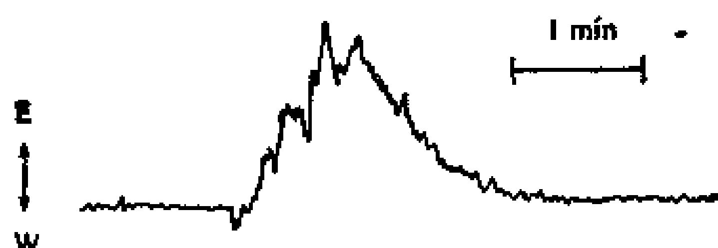
总响应是各部件的响应的乘积，当采用对数(响应)图时，就成了求和。一般可发现，对所谓"速度传感器"(即线圈)，总响应如图中(d)部分所示。如惯性传感器使其位移输出(代替其速度输出)直接转换为电信号，则最后的响应仅仅是(a)部分和(c)部分的和。现代仪器中，地震仪输出(惯性传感器加上线圈)可能成为具有不同频率特性的各种电子放大器的输入，在这种情况下(a)和(b)部分的曲线必须迭加到放大器响应中去。

当 ω 经由 ω_s 增加时，惯性传感器的相位延迟谱近似为从 $-\pi$ 到 0 的阶跃。(假设地面运动的方向，如在方程(10.3)之后所讨论的那样，已适当标明。)对线圈，相位延迟恒为$-\pi/2$，对电流计，当 ω 由 ω_g 开始增加时，相位延迟是从 0 到 π 的阶跃。这些延迟在图中以浅色表示。

10.3.5 地震传感器的非线性

除非输入极小，任一实际系统的响应都是非线性的，地震仪亦不例外。让我们从 10.3.3 节中所描述的标准地震仪的非线性谈起。Berckhemer 和 Schneider (1964) 在斯图加特理工学院的模拟计算机上解了 Galitzin-Wilip 地震仪 (T_s 地震计摆的周期)$=12$ 秒，T_g(电流计周期)$=12$ 秒和 50 秒)和 Press-Ewing 地震仪 ($T_s=30$ 秒，$T_g=100$ 秒) 的四阶微分方程，从而对地位移作了仔细研究。

远距离地震的记录表示地震波通过后回到初始位置的地位移。此外，来自附近地震的波形表示残留位移，或更精确地说，表示成抛物线型增加的位移，此位移与加速度的永久性变化相对应。图 10.21 表示这样的长周期瞬态波形的典型记录。为了解释这些记录，要求一个 5 级地震在距离约为 100 公里处产生加速度的永久变化在 10^{-7} 到 10^{-8} g 的量级。这意味着垂直分向的重力变化为 0.01—0.1 毫伽，水平分向的倾斜为 10^{-7}—10^{-8} 弧度。Press (1965) 怀疑这是仪器的滞后引起的，因为观测的倾斜比他对那样大小地震所计算的要大三到四个量级。然而 Berckhemer 和 Schneider 认为倾斜是存在的，但否定了重力变化的真实性。他们认为这是由于垂直分向地震仪的非线性产生的。



$\Delta = 164$ km　$M = 5$

图 10.21

用标准长周期地震仪对近震作的典型记录

他们考虑的非线性是螺旋弹簧的弧形效应引起的。短矩离的强震会使地震仪强烈地振动，如图 10.22 所描绘的，可能引起弹簧振荡。假设一振荡的正弦基阶振型，在中心处其振幅为 a，弹簧长度就变为

$$l \sim l_0\left[1+\frac{1}{4}\left(\frac{a\pi}{l_0}\right)^2\right].$$

另一方面，角 $\delta\theta$ 为

$$\delta\theta \sim \frac{a\pi}{l_0}.$$

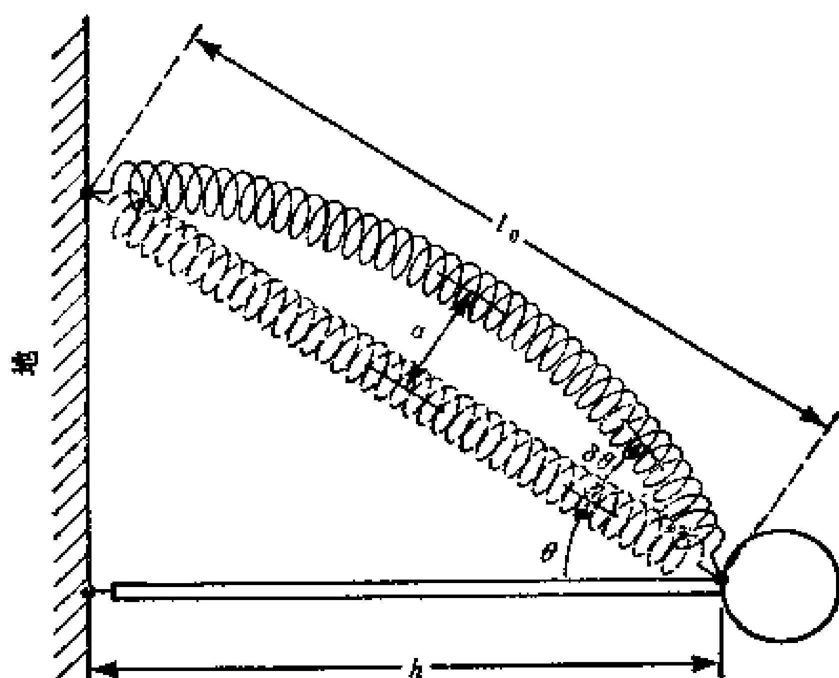


图 10.22

螺旋弹簧的弧形

弹簧所施的扭矩是

$$(T+\delta T)h\sin(\theta+\delta\theta)\sim Th\sin\theta+\delta Th\sin\theta$$

$$+Th\cos\theta\,\delta\theta-Th\sin\theta\frac{(\delta\theta)^2}{2}.$$

式中T是弹簧为保持本身处于长度l_0所施的张力，δT是由弹簧的弧形引起的T的变化。

对于零长弹簧，发现有另一种奇怪的效应。令弹簧常数为k，对零长弹簧，我们有

$$T=kl_0$$

且

$$\delta T-k\frac{l_0}{4}\left(\frac{a\pi}{l_0}\right)^2.$$

于是

$$(T+\delta T)h\sin(\theta+\delta\theta)=Th\sin\theta\left[1-\frac{1}{4}\left(\frac{a\pi}{l_0}\right)^2\right]+Th\cos\theta\delta\theta.$$

由于 $\delta\theta$ 是以弧形快速振荡的项，平均值为零，对时间取平均的弧形效应会减少弹簧的扭转，并降低摆锤位置。该效应把高频干扰转换为低频假信号。对 LaCoste 型的垂直向地震仪，该效应看来总是如重力的阶跃增加一样。

Block-Moore 加速仪优于 LaCoste 重力仪的一个特点是其摆的结构简单，这就把非线性效应减到最小。他们的摆只是与单片熔石英相连的一块黄铜板，石英的一部分拉出两根丝如图 10.23 所示。这种结构完全消除了弧形，但可能具有振荡的其它高频振型，以致可能使迭加在主要振型上的假低频信号增加。

Block 和 Moore 讨论了引起非线性度的几种可能的原因。首先，他们使用反馈迫使摆停留在一固定位置上。这消除了探测器件方面不均匀性的影响，也消除了 $\sin\theta \sim \theta$ 近似，这里 θ 为摆围绕轴点的转动角。他们接着讨论了会产生假长周期信号的扭转型(图 10.24)和摆动型(图 10.25)的交叉耦合的效果。

非线性对应变地震仪也是个严重的问题。Sacks 等 (1971) 具体设计了一种不受非线性和滞后影响的应变仪；把其中三个安放在日本的松代，并使它们靠近一个石英管应变仪。他们的仪器由一装满液体的有弹性回复力的管子组成。将其埋在井下并贴紧岩壁。采用膨胀水泥使井壁和管子密接起来。假设该管子能真实地反映井下微小的形变，直至 10^{-6} 微米。该仪器只测量膨胀应变。他们的主要观测结果是与附近地震有关的许多应变变化，由石英伸缩仪，而不是由新的应变仪记录下来。后者的灵敏度通过比较标准摆式地震仪的 P 波振幅以及 Rayleigh 波而得到检验。该结果表明由石英伸缩仪观测到的很多应变变化可能是虚假的。

目前，正在执行一个计划，在选择好的地点安装一套新的仪器，称为地震研究观测站 (SRO)，以便改善世界标准地震台网 (Peterson *et al.*, 1976)。为了减少水平向的噪声(10.2.5 节)，地震仪安放在直径 7 英寸、深约 100 米的井下。传感器的机械构型比之 Block和 Moore 的传感器要更为通用。LaCoste 摆用于垂

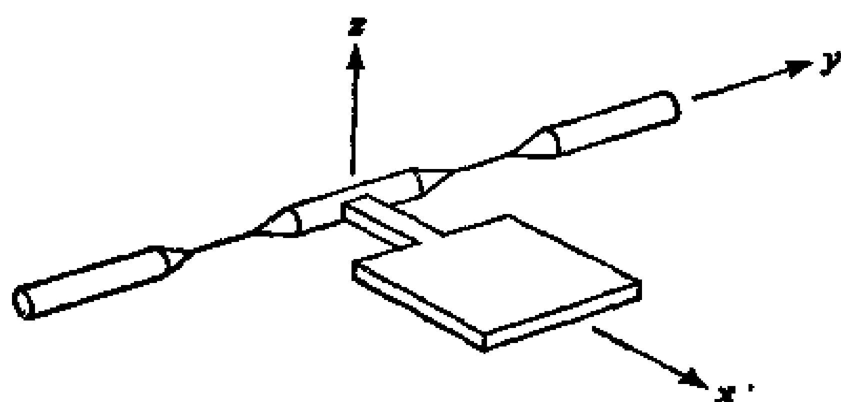


图 10.23
与一短石英杆相连的金属板。石英杆的两部分拉成丝。该板很小(~10 厘米^2)，由丝的扭力水平地支持着。在 Block-Moore 加速仪中，它起着一个垂直摆的作用(引自 Block and Moore, 1970)

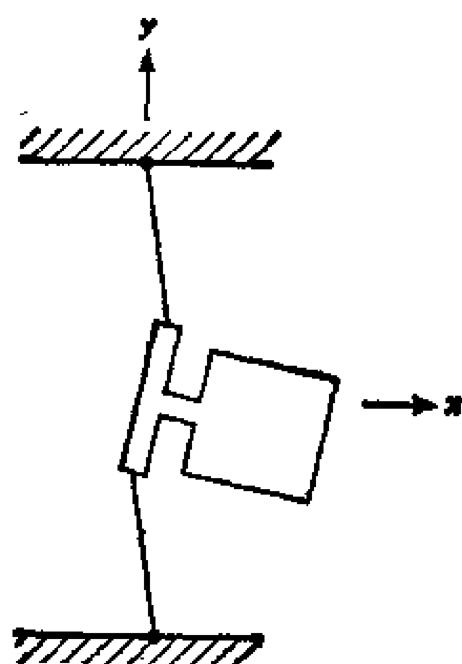


图 10.24
扭转型(引自 Block and Moore, 1970)

直分向以及水平向的“花园大门式”悬挂(图 10.4 b)。为了得到线性和稳定性，该传感器通过一电容换能器达到力平衡。传感器密封于一容器中，然后烘烤，抽空以驱走潮气和空气，避免内部对流。另一种新的计划称为 IDA（国际加速仪部署计划），由加利福尼亚大学圣迭戈分校管理，计划在世界范围设 20 个台站(Agnew *et al.*, 1976)。每个台站需有一个数字化记录的 La Coste-Romberg 重力仪，记录的动态范围为 120 分贝。信号在记录前被滤波，一道用于研究地球固体潮，将 1—30 周/小时带宽予以放大的另一道，用于研究简正振型。

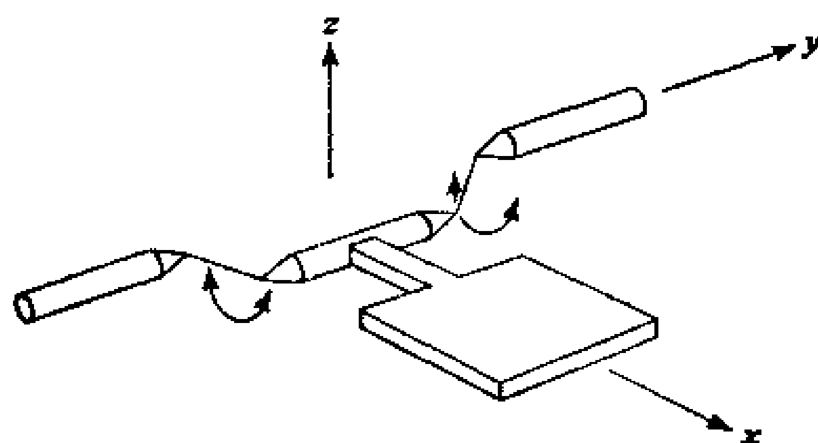


图 10.25
悬丝型(引自 Block and Moore, 1970)

建议进一步阅读的文献

Beauchamp, K. G. (editor). *Exploitation of Seismograph Networks*. Leiden, Noordhoff: International Publishing, 1975.

Berger, J. Application of laser techniques to geodesy and geophysics. *In* H. E. Landsberg (editor), *Advances in Geophysics* (Vol. 16). New York: Academic Press, 1973.

Hagiwara, T. A note on the theory of the electromagnetic

seismograph. *Bulletin of the Earthquake Research Institute*, **36**, 139-164, 1958.

Kosminskaya, I. P., N. N. Ruzyrev, and A. S. Alekseyev. Explosion seismology, its past, present, and future. *Tectonophysics*, **13**, 309-323, 1972.

Murphy, A., J. Savino, J. Rynn, G. Choy, and K. McCamy. Observations of long period (10s-100s) seismic noise at several worldwide locations. *Journal of Geophysical Research*, **77**, 5042-5049, 1972.

Rodgers, P. W. The response of the horizontal pendulum seismometer to Rayleigh and Love waves, tilt, and free oscillations of the earth. *Bulletin of the Seismological Society of America*, **58**, 1384-1406, 1968.

Sax, L. R. Stationarity of seismic noise. *Geophysics*, **33**, 668-674, 1968.

Shapiro, I. I., and C. A. Knight. Geophysical applications of long baseline radio interferometry. *In* L. Mansinha, D. E. Smylie, and A. E. Beck (editors), *Earthquake Displacement Fields and the Rotation of the Earth*. New York: Springer-Verlag, 284-301, 1970.

Willmore, P. L. The detection of earth movements. *In* S. K. Runcorn (editor), *Methods and Techniques in Geophysics* (Vol. 1). New York: Interscience, 1960.

问 题

10.1 证明褶积(10.11)也可写成下列形式：

$$\xi(t)=\int_0^\infty u(t-\tau)\ddot{f}(\tau)d\tau.$$

10.2 证明用一弹簧垂直悬挂的摆锤的周期为 $T=2\pi[(l-l_0)/g]^{1/2}$，其中 l 为弹簧的平衡长度(处于重力负载下)，l_0 为初始长度(无张力情况下)。

10.3 由于需要知道大气干扰引起的地面运动有多大，把地震仪

埋到某一深度，该地面运动(在多数研究中是噪声)可减少多少(Sorrells，1971)，因此产生下列问题：

(a) 考虑有一个其表面在 $z=0$ 的均匀半空间 假设一移动的压力施于此表面，并以边界条件 $\tau_{zx}=\tau_{yz}=0$，$\tau_{zz}=-P\exp[i\omega(x/c-t)]$加以模拟。

(b) 求证半空间中 P-SV 运动由运动应力矢量 $\boldsymbol{f}=\boldsymbol{F}\boldsymbol{w}$ 给定，其中$\boldsymbol{f}$和$\boldsymbol{F}$ 由(5.60)和(5.65)给出，

$$\boldsymbol{w}=\frac{iP}{\omega\rho\beta^2R(p)}\begin{pmatrix}\left(\frac{1}{\beta^2}-2p^2\right)\frac{1}{\alpha}\\ -\frac{2p\xi}{\beta}\\ 0\\ 0\end{pmatrix},$$

式中 $p=c^{-1}$，$R(p)$是 Rayleigh 函数 (5.54)，$\xi=(1/\alpha^2-p^2)^{1/2}$。

(c) 若 $c\ll\beta$，$\omega zc/\partial\beta^2\ll1$，求证位移的水平分量和垂直分量分别为

$$u_x=\frac{icP}{\omega\rho\beta^2}\left[\frac{\beta^2}{\alpha^2-\beta^2}-\frac{\omega z}{c}\right]e^{-\omega z/c}\exp\left[i\omega\left(\frac{x}{c}-t\right)\right]$$

和

$$u_z=\frac{cP}{\omega\rho\beta^2}\left[\frac{\alpha^2}{\alpha^2-\beta^2}+\frac{\omega z}{c}\right]e^{-\omega z/c}\exp\left[i\omega\left(\frac{x}{c}-t\right)\right].$$

10.4 怎样从同一地点的摆和应变仪输出得到面波频散？（这就是说，当 c 可根据频率和水平波数由 $c=\omega/k$ 给出时，怎样研究相速度的频率依赖关系 $c(\omega)$？）

附录 1 与波有关的术语

空气波(Air waves)

地震有时产生能听得到的声音；一次地方震听来可象遥远的雷声。仪器测量结果表明，这些声音与最初的 P 波同时到达(Hill *et al.*, 1976)。长周期（几分钟到几小时）的声-重力波是由大地震激发的，也可由火山爆发、陨星流和大气层核爆炸所激发(Harkrider, 1964)。

与空气耦合的面波(Air-coupled surface waves)

虽然空气和地的密度差别很大，但倘若相速度等于空气中的声速，则在地球表面传播的大气压扰动能增强面波。对海洋上浮冰块中的挠曲波以及地表低速层中的 Rayleigh 波，可观测到与空气的这种耦合(Press *et al.*, 1951)。著名的 1883 年喀拉喀托火山爆发后，观测到同时到达的空气波和潮汐扰动。

Airy 震相(Airy Phase)

与群速度(作为频率的函数)的极大或极小相关联的频散波列部分。稳相近似对它们不适用，但在问题 7.8 中所述的方法仍然是精确的。换言之，Airy 函数可用于波形的近似计算(Savage, 1969 b)。其实例是周期约为 15 秒的大陆 Rayleigh 波和周期为 200—250 秒的地幔 Rayleigh 波。

体波(Body waves)

在无限连续体中传播的波称为体波。与沿界面传播的面波是相对立的。

c

这个符号用于表示由地幔入射的波在核-幔边界的反射。如入射 S 波表示为 ScS。Frasier 和 Chowdury(1974) 叙述了有关 PcP 的主要研究情况。

地方震的尾波(Coda waves of a local earthquake)

地方震的地震图通常表示在体波和面波通过之后很久的某些振荡。地震图的这一部分一直到其结束叫做尾波。它们被认为是分布于地壳和上地幔的横向不均匀性引起的散射的波（Aki and Chouet，1975）。

转换波(Converted waves)

从P到S和从S到P的转换发生于非法向入射的间断面处。这些转换波有时在地震图的P波和S波到时之间表现为清楚的到达波，并且可用来确定间断面的位置。

Crary 波(Crary waves)

Crary 波是在浮冰上观测到的频率几乎不变的正弦波列。它们是水平相速度与冰中纵波速度相近的多次反射 SV 波。

深度震相（*pP*，*pS*，*sP*，*sS*）（Depth phases（pP，pS，sP，sS））：

符号 pP 用于从震源往上传播的 P 波，经自由面反射变为向下传播的 P 波，并且是在远距离上观测到的。sS，sP 和 pS 具有类似的意义。例如，sP 相应于这样的震相：它从震源上行至地表为S波，反射后，作为P波传播到记录台站。这些震相对精确测定震源深度很有用。请看图 9.15 中的sS波。

衍射*P*波(Diffracted P)

从地表震源又掠过地核的P波射线，出现在震中距约为103°处。虽然几何光学预测在超出此距离的阴影区中没有P波的直接到达，但我们在距离至少到 130°处仍继续观测到P波，尤其是长周期的P波。它们在地核边界处衍射。见图 9.23 b。

挠曲波(Flexural waves)

真空中无限板块内，其运动相对于板块中间面为反对称的简正振型。自然界中的例子是浮冰中的波。（对于短波，简正振型的周期方程简化为由于有水而略有改变的板块中挠曲波的周期方程。但对于长波，周期方程中重力项占优势，其振型接近于水中重力波的振型。）

凝结波(Frozen waves)

在大地震的震中区，墙体、堤坝以及诸如此类的建筑物有时保有波形。这些“凝结波”被认为是由于波峰处地面裂开而造成的，有时伴随着喷沙和冒水。

重力波(Gravity waves)

具有很低剪切波速的表层（如未固结的沉积层）中的简正振型，可能在长周期处受重力严重影响（Gilbert，1967）。除了由重力缩短简正振型的波长外，还可能有类似于流体层中重力波的波。在大地震的震中区观测到的具有大振幅和较长周期的所谓“可见波”被认为是重力波(Lomnitz，1970)。

地滚(Ground roll)

这是勘探地震学中的一个术语，指的是爆炸产生的面波。其特征为低速、低频和大振幅，在由高速的较强岩层上固结较差的低速沉积层组成的分层地表附近区域内可观测到，因此地滚通常由Rayleigh波组成。

导波(Guided waves)

导波由于射线在顶界面和底界面的全反射或挠曲而被限制在波导中。一个突出的例子是在SOFAR通道，即海洋内低速通道中的声波。由于对每秒几百周数量级的频率，声音在海水中的吸收系数相当小，所以穿过海洋进行传输是容易做到的。若我们把地球表面当作波导顶面，则面波，如Rayleigh波，Love波，及其高阶振型，便都是导波。与地壳或地幔中的低速通道有关的波可解释为能量在通道中集中的简正振型。凡是它们能存在的地方，导波就能传播到相当远的距离，因为它们实际上只在二维空间中传播。

G波(*Gn*)(*G*-waves(*Gn*))：

这是长周期Love波的另一名称。因为地球中Love波的群速度在大约40秒到300秒的周期范围内几乎是常数（4.4公里/秒），所以其波形相当尖锐，于是他们得到这个额外的名称。它

们是以Gutenberg命名的而被简称为G波。G波绕地球一周约需$2\frac{1}{2}$小时。大地震后，可观测到一系列G波，按其到时称为$G1$，$G2$，…，Gn。奇数指从震中向台站传播的G波，偶数指沿相反方向离开震中，并从震中对蹠点回到台站的G波。请参看问题7.9和图8.5。

首波(Head waves)

首波是在半空间中观测到的，该半空间与另一具有较高速度的半空间密接，而震源位于较低速度的介质中。首波的射线路径沿着界面，低速半空间中的波阵面是扩大着的锥面的一部分。由于这一原因，首波也称为"锥形波"。首波的一个实例是其射线路径沿着地幔顶面的P_n波。

I*, *i

符号I用来表示地球内核里P波的那部分射线路径。例如，$PKIKP$指穿透内核、在整个路径上都不转换为S波而回到地表的P波。另一方面，与用c表示在核-幔界面上反射的方式相同，用i表示在内外核界面上的反射。

非均匀平面波(Inhomogeneous plane waves)

这是其振幅在与传播方向不同的方向上变化的平面波。传播速度低于正规平面波的速度。它们也称为"损耗波"。

J

符号J表示射线路径作为S波处于地球内核中的那一部分。

K

外核中的P波用K表示。例如，从地幔射入的S波在地核边界转换为P波在外核中传播，在再进入地幔时又转换回S波。这样的S波称为SKS，正如PP，PPP等用来表示地表反射，KK，KKK等用来表示从下面在核幔界面反射的地核中的P波。

***L*(*LQ*, *LR*)**

用符号 L 表示长周期面波。当面波类型已知时，LQ 和 LR 分别用于 Love 波和 Rayleigh 波。

漏能模式(Leaking modes)

一般说，在分层半空间的简正振型具有这样的截止频率，低于该频率时，相速度大于半空间的 P 波和 S 波速，能量作为体波通过半空间时损耗。由于这种损耗，漏能模式的振幅随距离按指数衰减。

***Lg* 波**(*Lg*-waves)

主要为横向运动的短周期(1—6 秒)大振幅的到达波 (Ewing *et al.*, 1957)。*Lg* 波沿地表以与大陆地壳上部的平均剪切速度相近的速度传播 (Herrin and Richmond, 1960)。这种波只在波的路径完全是大陆性的情况下才被观测到。进入海洋的部分甚至小到 2° 就足以消除这种波。当 *Lg* 波有明显的两组到达波时，它们被叫作 *Lg* 1 和 *Lg* 2。

***Li* 波**(*Li*-waves)

这些波与 *Lg* 波相似，但它们的存在不如 *Lg* 波那样广为人们所承认。*Li* 波速为 3.8 公里/秒(*Lg* 波速为 3.5 公里/秒)，并可能与大陆地壳的下部有关(Båth, 1954, 1957)。

纵波(Longitudinal waves)

均匀各向同性体中远场 P 波的位移和传播方向平行。因此，P 波也叫作"纵波"。

Love 波(Love waves)，

这是限制在弹性体表面附近的、具有其最大振幅的 SH 波。它们的存在首先是由 A. E. H. Love 针对一均匀层置于均匀半空间之上，而半空间中的 S 波速大于层内 S 波速这一情况导出的。一般说，在竖向不均匀介质中，它们可以存在，但在均匀半空间中，只要表面是平坦的，则它们不能存在。

M

该符号表示地震图上振幅最大的波组。

M1波和M2波 (M 1 and M 2 waves)

M 1和M 2是真空中无限平板内对称与反对称的简正振型。每组有一系列基阶和高阶振型，用M 11，M 12，…或M 21，M 22，…表示。也尝试过对半空间之上一层中的基阶和高阶振型的Rayleigh波进行同样的分类。但分层半空间的M 1和M 2(有时称为妹泽波）之间的差别并不如平板中两者间差别那么明显。

地幔 Rayleigh 波 (Mantle Rayleigh waves)

正如长周期Love波有另一名称"G波"一样，长周期Rayleigh波有时也称为地幔Rayleigh波。

脉动(Microseisms)

这是指对任一地震实验，构成背景噪声的连续地动。频率高于1赫的脉动通常是由人为的原因，如交通和机器引起的，有时称为微动 (microtremor)，以便区别于天然扰动产生的长周期脉动。在典型的大陆内部台站上，脉动的卓越周期约为6秒。这是由海洋驻波的压力引起的，而这些驻波则可能是在风暴发源区或海岸附近沿相反方向传播的波形成的(Longuet-Higgins, 1950)。

简正振型(Normal modes)

简正振型起初定义为自由度数目有限的系统的自由振动，如由无质量弹簧所连接的有限个质点。每个振型是在称为本征频率的某一频率处的简谐振动。独立振型的数目与自由度数一样多。此系统的任意运动可表达为简正振型的迭加。有限连续体（如地球）的自由振动也称为简正振型。在这种情况下，有无限多个简正振型，该物体的任意运动可用它们的叠加来表示。简正振型的概念已被扩大到波导中，其中具有某一相速度的自由波可在无外力情况下存在。实例就是半空间中的Rayleigh波和分层半空间中的Love波。然而在这种情况下，不能用简正振型的迭加表达任意运动。

P^*

表示通过其速度约为6.5公里/秒的地壳中间层折射的P波。

该层的上界面称为 Conrad 间断面。见补充 6.4。

P'

PKP 波的另一种符号。

P 尾波(P coda)

原生初至波后的 P 波部分。它们可能是由界面上 P 转换为 S，或层中的多次反射，或由三维不均匀性产生的散射造成的。

PdP

这种波与地表反射波 PP 相似，只是其反射发生在深度为 d 的界面上(以公里表示，如 $P_{600}P$)，而不是在地表。

P_d，P_u，P_r

$\Delta=20°$ 附近 P 波的走时表现出由于低速层下的上地幔速度迅速增长产生的三重值。三个分支以 $dt/d\Delta$ 逐渐减少的顺序表示为 P_d(直达)，P_u(上地幔)和 P_r(折射)。

平板波(Plate waves)

真空中无限平板内简正振型的周期方程可分成两个。方程之一决定着相对于平板中间面为对称的运动振型，另一方程决定着反对称运动的振型。前者有时称为 M 1 波，后者有时称为 M 2 波。例如 M 11 和 M 12 分别为 M 1 的基阶振型和第一高阶振型。对很短的波，M 11 和 M 21 在平板物质组成的弹性半空间中都接近 Rayleigh 波。对与平板厚度相比比较长的波长，M 21 称为挠曲波。它们是频散的，其相速度随着波长的增加而减少到零(Satô，1951)。

PL 波(PL-waves)

在距离小于约 30°时，P 波和 S 波间的间隔中观测到长周期波列(30—50 秒)。这种波周期较长、到达较早。它被解释为壳幔波导的漏能振型 (Oliver and Major，1960；Su and Dorman，1965)。

P_n

在某一临界距离（一般从 100 至 200 公里）以外，来自地壳

中震源的初至波相应于从地幔顶部折射的波。称为 P_n 的这种波相当小，运动周期长；后面是周期较短的较大较尖、在地壳中传播的波，称为 $\bar{P}$。P_n 波很久以来被解释成沿两种均匀介质——即地壳和地幔——交界面的首波(锥形波)。但所观测的振幅通常大于所预测的首波振幅，这意味着速度变化并不正好是阶梯式的，而是在过渡带上或过渡带下面有一有限的梯度。符号 P_n 近年来应用于在相当大距离（甚至可达 20°）上以水平相速度 7.8—8.3 公里/秒传播的短周期 P 波。因而 Herrin(1969)定义 P_n 为“从几度到走时函数开始显示相当大曲率的距离范围内地震能量的最初到达。”这里用 Moho 面的首波加以解释是不能令人满意的（虽然能解释水平速度和走时），因为首波必定随距离迅速衰减。用地幔顶部几十公里厚的高 Q 值层内的导波加以解释，似乎比较合理。

$\bar{P}(Pg)$

对地壳中的震源来说，短距离上（直至几百公里）的走时曲线通常由两条相交直线组成：一条是较短距离上速度约 6 公里/秒的直线；另一条是较长距离上速度约 8 公里/秒的直线。前一条是在地壳中传播、并用 $\bar{P}$ 或 Pg 来表示（g 代表花岗石层）的直达 P 波所形成的。

P 波(P waves)

压缩弹性波在地震学中称为 P 波，P 代表“最初”(primary)。均匀各向同性体中，P 波速度等于 $\sqrt{\left(k+\frac{3}{4}\mu\right)/\rho}$，式中 k，μ 和 ρ 分别表示体积模量、刚性系数和密度。与 P 波有关的质点位移通常平行于波传播的方向。因此，P 波有时称为纵波。

Rayleigh 波(Rayleigh waves)

这是面波中最基本的一种，在弹性体平坦自由表面附近具有最大振幅。对均匀体，传播速度为剪切波速度乘以 0.88 至 0.95，

这取决于 Poisson 比。竖向不均匀半空间中 Rayleigh 波的相速度和群速度与频率有关。竖向不均匀半空间中可存在高阶振型。

Rg

大陆路径所观测的短周期基阶振型 Rayleigh 波(8—12 秒)，有时表示为 *Rg*(Ewing *et al.*, 1957)。

***S* 波(*S* waves)**

弹性剪切波在地震学中称为 *S* 波，*S* 表示“第二的”(secondary)。在均匀各向同性体中，*S* 波速度等于$\sqrt{\mu/\rho}$，这里 μ 和 ρ 分别表示刚性系数和密度。与 *S* 波有关的质点位移通常垂直于波的传播方向，因而，*S* 波有时也称为横波。

***S*(*Sg*)**

在地壳中传播的与 $\bar{P}$ 或 *Pg* 类似的 *S* 波。

***Sa* 波(*Sa* waves)**

Sa 波的典型周期为 10—30 秒，沿地表测量的群速度为 4.4—4.5 公里/秒，可具有 *SV* 和 *SH* 两种运动分量。其波形一般很复杂，并且不规则地因台而异 (Brune, 1965)。

湖面波 (Seiche)

这些波是不流动的水体，如湖泊、水塘或进口很窄的海湾的表面的自由振荡，有时是由地震或海啸激起的。振荡周期从几分钟到几小时，振荡可能持续几小时到一两天。

与剪切波耦合的 *PL* 波 (Shear-coupled *PL* waves)：

这是跟随 *S* 波，距离可达 80°左右的长周期波列。一般认为，这是由 *S* 波与壳-幔波导的漏能模式耦合引起的，即 *PL* 波。还观测到 *PL* 波与 *SS* 波及 *SSS* 波的耦合 (Chander *et al.*, 1968; Poupinet and Wright, 1972)。

***SH* 波 (*SH* waves)**

这是只具有水平向位移的 *S* 波。对竖向不均匀介质，*SH* 波不与 *P* 波相互作用，比 *SV* 波简单些。

S_n

符号 S_n 用来指与沿地幔顶部传播首波一样的短周期 S 波。现在这符号经常用于可在震中距大到 40°处观测到的（走时曲线为一直线)显著短周期剪切波(Molnar and Oliver, 1969)。Stephens 和 Isacks (1977) 认为这种波在地幔顶部的波导中传播。短周期波的传播较为有效，因为长周期波的大部分能量是在较深处的低 Q 物质中，因而被滤掉。Walker 等 (1978) 提供了长距离的 S_n 实例。

Stoneley 波 (Stoneley waves)

这是其最大振幅被限制在两种弹性介质平坦界面附近的界面波。在固体与流体交界面处总可能存在，但在固体与固体交界面处，则只在两种介质的剪切波速度几乎相等的严格条件下方能存在。

表面 *P* 波 (Surface *P* waves)

表面 P 波的射线路径由两部分组成：一段是从震源到自由表面其水平视速度等于 P 波速度的 S 波路径；另一段是沿自由表面到接收点的 P 波路径。表面 P 波在临界距离出现，并且尽管随距离的衰减很快，仍能够比直达 S 波有更尖锐的到达。

表面反射 (*PP*, *SS*, *SP*, *PS*, *PPP*, *SSS*) (Surface reflections (*PP*, *SS*, *SP*, *PS*, *PPP*, *SSS*))

以下行方向离开震源（与以上行方向离开震源的 pP 波相反)，在到达记录台站前在地表经受过一次反射的 P 波表示为 PP。在表面反射过两次的 P 波表示为 PPP。同样，PS 波是反射过一次，并在反射后由 P 波转换为 S 而到达台站的波。见图 9.15。

***SV* 波** (*SV* waves)

对一各向同性均匀体，与远场 S 波有关的位移被限制于垂直于传播方向的平面内。平面内的质点运动可用两个正交矢量来描述，一个矢量在水平方向，另一个矢量垂直于它。后一分量是 SV 波。SV 波在竖向非均匀介质中与 P 波相互作用。

T 震相 (T-phase)

T 代表第三的（Tertiary）波（P 和 S 之后），指迟到周期小于 1 秒的震相，是在岛屿或沿海的台站上对于其传播路径主要为海洋路径的地震观测到的。这种波以水中声速通过路径的海洋部分，可能穿过 SOFAR 通道（Linehan, 1940; Ewing *et al.*, 1952)。

海啸或潮汐波 (Tsunami, 或 Tidal wave)

由海底扰动在海面形成的重力波。这种扰动可以是海底地震、海底滑坡或火山爆发产生的隆起或沉陷。

钻孔中的管状波 (Tube waves in a bore hole)

在一空的柱状孔内，一种面波可以沿该孔的轴传播而将能量限制在孔附近。它显示有频散，其相速度随波长而增加。在远远小于孔半径的波长上，它接近于 Rayleigh 波。在约为半径三倍的波长上，相速度达到剪切波速度。超出该截止波长，它由于幅射 S 波而迅速衰减。在一充满流体的柱状孔内，除了在流体中传播的一系列多重反射的锥形波外，管状波在整个周期内存在而无截断。在短波长上，它接近于流体与固体间平界面的 Stoneley 波。对大于孔半径约 10 倍的波长，管状波的速度变为常数，由流体的体积模量 k 和固体刚性系数 μ 给出为 $v=c(1+k/\mu)^{1/2}$，这里 c 是流体中的声速（Bolt, 1952; White, 1965)。

可见的地震波 (Visible earthquake waves)

在大地震震中地区肉眼可见的长周期短波长的慢波（Lomnitz, 1970)。

火山振动 (Volcanic tremors)

火山活动产生的地震信号在性质上变化相当大。从类似于构造地震的振动到具有尖锐峰值谱的连续振动。连续振动被认为是火山振动、或简谐振动（Minakami 1974; Aki *et al.*, 1977)。

附录 2　震级的定义

地震震级起初由 Richter（1935）定义为：其摆周期为 0.8 秒、放大倍数为 2800、阻尼因子为 0.8，置于离震中 100 公里处的标准扭力地震仪记录上，以微米量度的最大振幅的对数。该标准仪器以其设计者的姓名命名为 Wood-Anderson 地震仪后，已为人们熟知。它由与垂直金属丝相连的一个铜制小圆柱体（质量小于 1 克，其轴是垂直的）构成。金属丝处于张力下，因此回复力由张力提供。该仪器整个说来对通过圆柱体内小镜反射的光所检测的水平运动是灵敏的。为了把任意震中距上所观测的振幅化到 100 公里处预期的振幅，已作成一标定曲线。这种震级标度现在称为地方震震级 M_L。

Gutenberg 和 Richter（1936）根据远震面波提出一种震级标度。Gutenber（1945）又进一步对此进行了研究，对距离为 $15°<\Delta<130°$ 的浅源地震，他发现以下公式：

$$M_s=\log A+1.656\log\Delta+1.818, \qquad (A.1)$$

式中 A 是周期 20 秒的面波产生的最大地位移的水平分量（单位为微米）。

Gutenberg 公式以后提出了许多 M_s 的公式。Vaněk 等（1962）总结了这些公式，提出：

$$M_s=\log(A/T)_{max}+1.66\log\Delta+3.3, \qquad (A.2)$$

这已为 IASPEI（国际地震学和地球内部物理学协会）正式采用。式(A.2)中 $(A/T)_{max}$ 是记录图上所有波群的 A/T（振幅/周期）值的极大值。$T=20$ 秒时，式（A.2）变得几乎与(A.1)相同。

另一种重要的震级标度是根据远震体波的振幅制定的。它定义为

$$m_b=\log(A/T)+Q, \qquad (A.3)$$

式中 Q 是 Gutenberg 和 Richter（1956）为了从所观测振幅中消

除路径效应，凭观测确定的震中距和震源深度的函数（参见图10.9）。A/T 或是 P，PP 波组或是 SH 波组中的极大值，并有每个震相分别具有的 Q 的图表。Vaněk 等（1962）后来总结了 m_b 的公式，提出改进的 Q 的标定函数。

但美国地质调查局在目前日常报告中确定 m_b 的工作大大不同于 Gutenberg 和 Richter 曾进行的工作。最重要的差别在于测定时所采用的仪器特性曲线不同。Gutenberg 和 Richter 使用的是能记录大事件和较长周期 P 波（4—10 秒）的宽带仪器，而美国地质调查局目前测定时采用的是短周期全球标准地震台网仪器，它能显示周期几乎总在 1 秒左右的 P 波。而且，美国地质调查局要求（A/T）必须在记录图的最初 5 秒中被测出。但在早期工作中，极大值可在信号持续时间高达 10 秒才被观测到，以便能记到具有平缓初动的地震。

参　考　文　献

Abe, K.

1970　Determination of seismic moment and energy from the Earth's free oscillation. *Physics of the Earth and Planetary Interiors* 4:49–61.

Abramowitz, M., and I. A. Stegun

1964　*Handbook of Mathematical Functions*. U.S. National Bureau of Standards.

Adams, R. D.

1972　Multiple inner core reflections from a Novaya Zemlya explosion. *Bulletin of the Seismological Society of America* 62:1063–1071.

Agnew, D., J. Berger, R. Buland, W. Farrell, and F. Gilbert

1976　International deployment of accelerometers: A network for very long period seismology. *EOS, Transactions of the American Geophysical Union* 57:180–188.

Aki, K.

1966　Generation and propagation of *G* waves from the Niigata earthquake of June 16, 1964. 2. Estimation of earthquake moment, released energy, and stress-strain drop from *G* wave spectrum. *Bulletin of the Earthquake Research Institute* 44:23–88.

Aki, K., and L. B. Chouet

1975　Origin of coda waves: Source, attenuation, and scattering effects. *Journal of Geophysical Research* 80:3322–3342.

Aki, K., M. Fehler, and S. Das

1977　Source mechanism of volcanic tremor; fluid-driven crack models and their application to the 1973 Kilauea eruption. *Journal of Volcanology and Geothermal Research* 2:259–287.

Alekseyev, A. S., and B. G. Mikhaylenko

1976　Solution of Lamb's problem for a vertically inhomogeneous elastic halfspace. *Izvestiya, Physics of the Solid Earth*. December: pp. 11–25.

Alsop, L. E., G. H. Sutton, and M. Ewing

1961a　Free oscillations of the Earth observed on strain and pendulum seismographs. *Journal of Geophysical Research* 66:631–641.

1961b　Measurement of *Q* for very long period free oscillations. *Journal of Geophysical Research* 66:2911–2915.

Alterman, Z., H. Jarosch, and C. L. Pekeris

1959　Oscillations of the Earth. *Proceedings of the Royal Society of London* A252:80–95.

Anderson, D. L., and C. B. Archambeau
1964 The anelasticity of the Earth. *Journal of Geophysical Research* 69:2071–2084.

Anderson, D. L., A. Ben-Menahem, and C. B. Archambeau
1965 Attenuation of seismic energy in the upper mantle. *Journal of Geophysical Research* 70:1441–1448.

Andrianova, Z. S., V. I. Keilis-Borok, A. L. Levshin, and M. G. Neiganz
1967 *Seismic Love Waves.* New York: Consultants Bureau.

Ansell, J. H.
1978 On the scattering of *SH* waves from a point source by a sphere. *Geophysical Journal of the Royal Astronomical Society* 54:359–387.

Archambeau, C. B., E. A. Flinn, and D. G. Lambert
1969 Fine structure of the upper mantle. *Journal of Geophysical Research* 74: 5825–5865.

Arons, A. B., and D. R. Yennie
1950 Phase distortion of acoustic pulses obliquely reflected from a medium of higher sound velocity. *Journal of the Acoustical Society of America* 22:231–237.

Azimi, Sh. A., A. V. Kalinin, V. V. Kalinin, and B. L. Pivovarov
1968 Impulse and transient characteristics of media with linear and quadratic absorption laws. *Izvestiya, Physics of the Solid Earth,* February: pp. 88–93.

Backus, G.
1958 A class of self-sustaining dissipative spherical dynamos. *Annals of Physics* (N.Y.) 4:372–447.
1965 Possible forms of seismic anisotropy in the uppermost mantle under oceans. *Journal of Geophysical Research* 70:3429–3439.

Backus, G., and F. Gilbert
1961 The rotational splitting of the free oscillations of the earth. *Proceedings of the National Academy of Science* 47:362–371.
1967 Numerical applications of a formalism for geophysical inverse problems. *Geophysical Journal of the Royal Astronomical Society* 13:247–276.
1968 The resolving power of gross Earth data. *Geophysical Journal of the Royal Astronomical Society* 16:169–205.
1970 Uniqueness in the inversion of inaccurate gross Earth data. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London* A266:123–192.

Backus, G., and M. Mulcahy
1976 Moment tensors and other phenomenological descriptions of seismic sources. I. Continuous displacements. *Geophysical Journal of the Royal Astronomical Society* 46:341–361.
1976 Moment tensors and other phenomenological descriptions of seismic sources. II. Discontinuous displacements. *Geophysical Journal of the Royal Astronomical Society* 47:301–329.

Båth M.

1954 The elastic waves *Lg* and *Rg* along Eurasiatic paths. *Arkiv Geophysik* 2:295–342.
1957 A continental channel wave guided by the intermediate layer in the crust. *Geofisica pura e applicata* 38:19–31.

Beavan, J., and R. Bilham
1977 Thermally induced errors in fluid tube tiltmeters. *Journal of Geophysical Research* 82:5699–5704.

Benioff, H.
1932 A new vertical seismograph. *Bulletin of the Seismological Society of America* 22:155–169.
1958 Long waves observed in the Kamchatka earthquake of November 4, 1952. *Journal of Geophysical Research* 63:589–593.
1959 Fused-quartz extensometer for secular, tidal, and seismic strain. *Bulletin of the Geological Society of America* 70:1019–1032.

Benioff, H., B. Gutenberg, and C. F. Richter
1954 Progress report. *Transactions of the American Geophysical Union* 35:979–987.

Benioff, H., F. Press, and S. W. Smith
1961 Excitation of the free oscillations of the Earth by earthquakes. *Journal of Geophysical Research* 66:605–620.

Ben-Menahem, A., S. W. Smith, and T.-L. Teng
1965 A procedure for source studies from spectrums of long-period seismic body waves. *Bulletin of the Seismological Society of America* 55:203–235.

Ben-Menahem, A., M. Rosenman, and D. G. Harkrider
1970 Fast evaluation of source parameters from isolated surface-wave signals. I. Universal tables. *Bulletin of the Seismological Society of America* 60:1337–1387.

Berckhemer, H., and G. Schneider
1964 Near earthquakes recorded with long-period seismographs. *Bulletin of the Seismological Society of America* 54:973–985.

Berry, M. J., and G. F. West
1966 Reflected and head wave amplitudes in a medium of several layers. In *The Earth Beneath Continents* (Geophysical Monograph 10). American Geophysical Union.

Bessonova, E. N., V. M. Fishman, M. G. Shnirman, G. A. Sitnikova, and L. R. Johnson
1976 The tau method for inversion of travel times. II. Earthquake data. *Geophysical Journal of the Royal Astronomical Society* 46:87–108.

Biot, M. A.
1952 Propagation of elastic waves in a cylindrical bore containing a fluid. *Journal Applied Physics* 23:997–1005.

Biswas, N. N., and L. Knopoff
1970 Exact earth-flattening calculation for Love waves. *Bulletin of the Seismo-*

logical Society of America 60:1123–1137.

Block, B., J. Dratler, and R. D. Moore
1970 Earth and normal modes from a 6.5 magnitude earthquake. *Nature* 226: 343–344.

Block, B., and R. D. Moore
1966 Measurements in the earth mode frequency range by an electrostatic sensing and feedback gravimeter. *Journal of Geophysical Research* 71:4361–4375.
1970 Tidal to seismic frequency investigations with a quartz accelerometer of new geometry. *Journal of Geophysical Research* 75:1493–1506.

Borcherdt, R. D.
1973 Energy and plane waves in linear viscoelastic media. *Journal of Geophysical Research* 78:2442–2453.
1977 Reflection and refraction of type. II. *S* waves in elastic and anelastic media. *Bulletin of the Seismological Society of America* 67:43–67.

Bortfeld, R.
1961 Approximation to the reflection and transmission coefficients of plane longitudinal and transverse waves. *Geophysical Prospecting* 9:485–502.

Bracewell, R. B.
1965 *The Fourier Transform and Its Applications.* New York: McGraw-Hill.

Brekhovskikh, L. M.
1960 *Waves in Layered Media* (Chapter 4). New York: Academic Press.

Bromwich, T. J. I'A.
1898 On the influence of gravity on elastic waves, and, in particular, on the vibrations of an elastic globe. *Proceedings of the London Mathematical Society* Vol. 30.

Brune, J. N.
1962 Attenuation of dispersed wave trains. *Bulletin of the Seismological Society of America* 52:109–112.
1965 The *Sa* phase from the Hindu Kush earthquake of July 6, 1962. *Pure and Applied Geophysics* 62:81–95.
1968 Seismic moment, seismicity, and rate of slip along major fault zones. *Journal of Geophysical Research* 73:777–784.

Brune, J. N., and J. Dorman
1963 Seismic waves and Earth structure in the Canadian Shield. *Bulletin of the Seismological Society of America* 53:167–210.

Brune, J. N., J. E. Nafe, and L. E. Alsop
1961 The polar phase shift of surface waves on a sphere. *Bulletin of the Seismological Society of America* 51:247–257.

Brune, J. N., J. E. Nafe, and J. Oliver
1960 A simplified method for the analysis and synthesis of dispersed wave trains. *Journal of Geophysical Research* 65:287–304.

Buchbinder, G. G. R.

1972 Travel times and velocities in the outer core from *PmKP*. *Earth and Planetary Science Letters* 14:161–168.

Buchen, P. W.
1971 Plane waves in linear viscoelastic media. *Geophysical Journal of the Royal Astronomical Society* 23:531–542.

Buck, S. W., F. Press, D. Shepard, M. N. Toksöz, and H. Trantham
1971 Development of a mercury tiltmeter for seismic recording. Final Technical Report to the Advanced Research Projects Agency on Contract No. F44620-69-C-0126, Massachusetts Institute of Technology.

Buland, R. P., and F. Gilbert
1976 The theoretical basis for the rapid and accurate computation of normal mode eigenfrequencies and eigenfunctions. In *Retrieving the Seismic Moment Tensor*, Ph.D. thesis of R. P. Buland, University of California, San Diego.
1980 The rapid and accurate computation of normal mode eigenfrequencies and eigenfunctions. *Journal of Computational Physics* (in press).

Bullen, K. E.
1937 The ellipticity correction to travel-times of *P* and *S* earthquake waves. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society, Geophysical Supplement* 4:143–157.
1960 Notes on cusps in seismic travel-times. *Geophysical Journal of the Royal Astronomical Society* 3:354–359.

Burridge, R., and L. Knopoff
1964 Body force equivalents for seismic dislocations. *Bulletin of the Seismological Society of America* 54:1875–1888.

Byrne, C. J.
1961 Instrument noise in seismometers. *Bulletin of the Seismological Society of America* 51:69–84.

Cagniard, L.
1962 *Reflection and Refraction of Progressive Seismic Waves*. Trans. by E. A. Flinn and C. H. Dix. New York: McGraw-Hill.

Červený, V.
1972 Seismic rays and ray intensities in inhomogeneous anisotropic media. *Geophysical Journal of the Royal Astronomical Society* 29:1–13.
1974 Reflection and transmission coefficients for transition layers. *Studia Geophysica et Geodaetica* 18:59–68.

Červený, V., and R. Ravindra
1971 *Theory of Seismic Head Waves*. University of Toronto Press.

Chander, R., L. E. Alsop, and J. Oliver
1968 On the synthesis of shear-coupled *PL* waves. *Bulletin of the Seismological Society of America* 58:1849–1877.

Chapman, C. H.
1971 On the computation of seismic ray travel times and amplitudes. *Bulletin of*

the Seismological Society of America 61:1267–1274.

1972 Lamb's problem and comments on the paper, 'On Leaking Modes' by Usha Gupta. *Pure and Applied Geophysics* 94:233–247.

1973 The Earth flattening transformation in body wave theory. *Geophysical Journal of the Royal Astronomical Society* 35:55–70.

1974 The turning point of elastodynamic waves. *Geophysical Journal of the Royal Astronomical Society* 39:613–621.

1976a Exact and approximate generalized ray theory in vertically inhomogeneous media. *Geophysical Journal of the Royal Astronomical Society* 46:201–233.

1976b A first motion alternative to geometrical ray theory. *Geophysical Research Letters* 3:153–156.

1978a A new method for computing seismograms. *Geophysical Journal of the Royal Astronomical Society* 54:481–518.

1978b Body waves in seismology. *In* J. Miklowitz and J. D. Achenbach (editors), *Modern Problems in Elastic Wave Propagation.* New York: Wiley.

Chapman, C. H., and R. A. Phinney

1972 Diffracted seismic signals and their numerical solution. *In* B. A. Bolt (editor), *Seismology: Body Waves and Sources* (Methods in Computational Physics, Vol. 12), New York: Academic Press.

Choy, G. L.

1977 Theoretical seismograms of core phases calculated by a frequency-dependent full wave theory, and their interpretation. *Geophysical Journal of the Royal* Astronomical Society, 51:275–311.

Choy, G. L., and Paul G. Richards

1975 Pulse distortion and Hilbert transformation in multiply reflected and refracted body waves. *Bulletin of the Seismological Society of America* 65:55–70.

Cisternas, A., O. Betancourt, and A. Leiva

1973 Body waves in a "real Earth." Part I. *Bulletin of the Seismological Society of America* 63:145–156.

Coddington, E. A., and N. Levinson

1955 *Theory of Ordinary Differential Equations.* New York: McGraw-Hill.

Cormier, V., and P. G. Richards

1977 Full-wave theory applied to a discontinuous velocity increase: The inner core boundary. *Journal of Geophysics* 43:3–31.

Crampin, S.

1970 The dispersion of surface waves in multi-layered anisotropic media. *Geophysical Journal of the Royal Astronomical Society* 21:387–402.

1971 The propagation of surface waves in anisotropic media. *Geophysical Journal of the Royal Astronomical Society* 25:71–87.

1975 Distinctive particle motion of surface waves as a diagnostic of anisotropic

layering. *Geophysical Journal of the Royal Astronomical Society* 40:177–186.

1977 A review of the effects of anisotropic layering on the propagation of seismic waves. *Geophysical Journal of the Royal Astronomical Society* 49:9–27.

Crampin, S., and D. Bamford

1977 Inversion of *P*-wave anisotropy. *Geophysical Journal of the Royal Astronomical Society* 49:123–132

Crampin, S., and D. W. King

1977 Evidence for anisotropy in the upper mantle beneath Eurasia from the polarization of higher mode surface waves. *Geophysical Journal of the Royal Astronomical Society* 49:59–85.

Crossley, D. J., and D. Gubbins

1975 Static deformation of the Earth's liquid core. *Geophysical Research Letters* 2:1–4.

Currie, R. G.

1974 Period and Q_w of the Chandler wobble. *Geophysical Journal of the Royal Astronomical Society* 38:179–185.

Dahlen, F. A.

1968 The normal modes of a rotating elliptical Earth. *Geophysical Journal of the Royal Astronomical Society* 16:329–367.

1969 The normal modes of a rotating, elliptical Earth. II. Near-resonance multiplet coupling. *Geophysical Journal of the Royal Astronomical Society* 18:397–436.

1972 Elastic dislocation for a self-gravitating elastic configuration with an initial static stress field. *Geophysical Journal of the Royal Astronomical Society* 28:357–383.

1973 Elastic dislocation theory for a self-gravitating elastic configuration with an initial static stress field. II. Energy release. *Geophysical Journal of the Royal Astronomical Society* 31:469–484.

1976a Seismic faulting in the presence of a large compressive stress. *Geophysical Research Letters* 3:245–248. (Correction, p. 506.)

1976b The passive influence of the oceans upon the rotation of the Earth. *Geophysical Journal of the Royal Astronomical Society* 46:363–406.

1977 The balance of energy in earthquake faulting. *Geophysical Journal of the Royal Astronomical Society* 48:239–261.

Dahlen, F. A., and M. L. Smith

1975 The influence of rotation on the free oscillations of the Earth. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London* A279:583–629.

Davies, D., and D. P. McKenzie

1969 Seismic travel-time residuals and plates. *Geophysical Journal of the Royal Astronomical Society* 18:51–63.

Dewey, J., and P. Byerly

1969 The early history of seismometry (to 1900). *Bulletin of the Seismological Society of America* 59:183–227.

Dorman, J., and M. Ewing
1962 Numerical inversion of seismic surface wave dispersion data and crust-mantle structure in the New York Pennsylvania area. *Journal of Geophysical Research* 67:5227–5241.

Dunkin, J. W.
1965 Computation of modal solutions in layered, elastic media at high frequencies. *Bulletin of the Seismological Society of America* 55:335–358.

Dziewonski, A. M., A. L. Hales, and E. R. Lapwood
1975 Parametrically simple Earth models consistent with geophysical data. *Physics of the Earth and Planetary Interiors* 10:12–48.

Dziewonski, A. M., and F. Gilbert
1976 The effect of small aspherical perturbations on travel-times and a re-examination of the corrections for ellipticity. *Geophysical Journal of the Royal Astronomical Society* 44:7–17.

Eaton, J. P.
1957 Theory of the electromagnetic seismograph. *Bulletin of the Seismological Society of America* 74:37–75.

Eshelby, J. D.
1957 The determination of the elastic field of an ellipsoidal inclusion, and related problems. *Proceedings of the Royal Society of London* A241:376–396.

Ewing, M., W. Jardetzky, and F. Press
1957 *Elastic Waves in Layered Media.* New York: McGraw-Hill.

Ewing, M., F. Press, and J. L. Worzel
1952 Further study of the *T* phase. *Bulletin of the Seismological Society of America* 42:37–51.

Ewing M., and J. L. Worzel
1948 Long-range sound transmission. *Geological Society of America Memoir* 27.

Farrell, W. E.
1969 A gyroscopic seismometer: measurements during the Borrego earthquake. *Bulletin of the Seismological Society of America* 59:1239–1246.

Forsyth, D. W.
1975 The early structural evolution and anisotropy of the oceanic upper mantle. *Geophysical Journal of the Royal Astronomical Society* 43:103–162.

Frasier, C. W.
1970 Discrete time solution of plane *P-SV* waves in a plane layered medium. *Geophysics* 35:197–219.

Frasier, C. W., and D. K. Chowdury
1974 Effect of scattering on *PcP/P* amplitude ratios at LASA from 40° to 84° distance. *Journal of Geophysical Research* 79:5469–5477.

Frazer, L. N.
1977 Synthesis of shear-coupled *PL*. Ph.D. Thesis, Princeton University.

Friedman, B.
1951 Propagation in a non-homogeneous atmosphere. *Communications of Pure and Applied Mathematics* 4:317–350.

Fuchs, K.

1968 The reflection of spherical waves from transition zones with arbitrary depth-dependent elastic moduli and density. *Journal of Physics of the Earth*, Special Issue, 16:27–41.

1970 On the determination of velocity depth distributions of elastic waves from the dynamic characteristics of the reflected wave field. *Zeitschrift für Geophysik* 36:531–548.

1971 The method of stationary phase applied to the reflection of spherical waves from transition zones with arbitrary depth-dependent elastic moduli and density. *Zeitschrift für Geophysik* 37:89–117.

Fuchs, K., and G. Müller

1971 Computation of synthetic seismograms with the reflectivity method and comparison of observations. *Geophysical Journal of the Royal Astronomical Society* 23:417–433.

Fuchs, K., and K. Schulz

1976 Tunneling of low-frequency waves through the subcrustal lithosphere. *Journal of Geophysics* 42:175–190.

Futterman, W. I.

1962 Dispersive body waves. *Journal of Geophysical Research* 67:5279–5291.

Galitzin, B.

1914 *Vorlesungen uber Seismometrie*. Leipzig: Teubner.

Gantmacher, F. R.

1959 *The Theory of Matrices* (2 vols). New York: Chelsea Publishing Co.

Gerver, M., and V. Markushevitch

1966 Determination of a seismic wave velocity from the travel time curve. *Geophysical Journal of the Royal Astronomical Society* 11:165–173.

1967 On the characteristic properties of travel time curves. *Geophysical Journal of the Royal Astronomical Society* 13:241–246.

Gilbert, F.

1967 Gravitationally perturbed elastic waves. *Bulletin of the Seismological Society of America* 57:783–794.

1971 Excitation of the normal modes of the Earth by earthquake sources. *Geophysical Journal of the Royal Astronomical Society* 22:223–226.

1976 The representation of seismic displacements in terms of travelling waves. *Geophysical Journal of the Royal Astronomical Society* 44:275–280.

Gilbert, F., and G. Backus

1966 Propagator matrices in elastic wave and vibration problems. *Geophysics* 31:326–332.

Gilbert, F., and A. M. Dziewonski

1975 An application of normal mode theory to the retrieval of structural parameters and source mechanisms from seismic spectra. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London* A278:187–269.

Gilbert, F., and D. V. Helmberger

1972 Generalized ray theory for a layered sphere. *Geophysical Journal of the Royal Astronomical Society* 27:57–80.

Gilbert, F., and S. J. Laster
1962 Experimental investigation of *PL* modes in a single layer. *Bulletin of the Seismological Society of America* 52:59–66.

Gilbert, F., S. J. Laster, M. M. Backus, and R. Schell
1962 Observations of pulses on an interface. *Bulletin of the Seismological Society of America* 52:847–868.

Gladwin, M. T., and F. D. Stacey
1974 Anelastic degradation of acoustic pulses in rock. *Physics of the Earth and Planetary Interiors* 8:332–336.

Green, G.
1839 On the laws of reflexion and refraction of light. *Transactions of the Cambridge Philosophical Society* (Vol. 7). (Reprinted in Mathematical Papers of George Green, pp. 245–269, London, 1871.)

Gutenberg, B.
1913 Über die Konstitution des Erdinnern, erschlossen aus Erdbebenbeobachtungen. *Zeitschrift für Geophysik* 14:1217–1218.

Gutenberg, B.
1945 Amplitudes of surface waves and magnitudes of shallow earthquakes. *Bulletin of the Seismological Society of America* 35:3–12.

Gutenberg, B., and C. F. Richter
1936 Magnitude and energy of earthquakes. *Science* (New Series) 83:183–185.
1956 Earthquake magnitude, intensity, energy, and acceleration. *Bulletin of the Seismological Society of America* 46:105–145.

Haddon, R. A. W.
1972 Corrugations on the mantle-core boundary or transition layers between inner and outer cores? *EOS, Transactions of the American Geophysical Union* 53:600.

Hagiwara, T.
1958 A note on the theory of the electromagnetic seismograph. *Earthquake Research Institute Bulletin of Tokyo University* 36:139–164.

Hales, A. L., and J. L. Roberts
1974 The Zoeppritz amplitude equations: More errors. *Bulletin of the Seismological Society of America* 64:285.

Harkrider, D. G.
1964 Theoretical and observed acoustic-gravity waves from explosive sources in the atmosphere. *Journal of Geophysical Research* 69:5295–5321.

Harkrider, D. G., and D. L. Anderson
1966 Surface wave energy from point sources in plane layered Earth models. *Journal of Geophysical Research* 71:2967–2980.

Harrison, J. C.
1976a Cavity and topographic effects in tilt and strain measurements. *Journal of Geophysical Research* 81:319–328.
1976b Tilt observations in the Poorman Mine near Boulder, Colorado. *Journal of Geophysical Research* 81:329–336.

Haskell, N. A.
1953 The dispersion of surface waves in multilayered media. *Bulletin of the Seismological Society of America* 43:17–34.
1960 Crustal reflection of plane *SH* waves. *Journal of Geophysical Research* 65:4147–4150.
1962 Crustal reflection of plane *P* and *SV* waves. *Journal of Geophysical Research* 67:4751–4767.
1964 Radiation pattern of surface waves from point sources in a multi-layered medium. *Bulletin of the Seismological Society of America* 54:377–394.

Hasselman, K.
1963 A statistical analysis of the generation of microseisms. *Review of Geophysics* 1:177–210.

Haubrich, R. A.
1967 Microseisms. *In* S. K. Runcorn (editor), *International Dictionary of Geophysics*. London: Pergamon Press.

Helmberger, D. V.
1968 The crust-mantle transition in the Bering Sea. *Bulletin of the Seismological Society of America* 58:179–214.

Helmberger, D. V., and D. A. Harkrider
1978 Modeling earthquakes with generalized ray theory. *In* J. Miklowitz and J. D. Achenbach (editors), *Modern Problems in Elastic Wave Propagation*. New York: Wiley.

Helmberger, D. V., and S. D. Malone
1975 Modelling local earthquakes as shear dislocations in a layered half space. *Journal of Geophysical Research* 80:4881–4888.

Herrera, I.
1964 A perturbation method for elastic wave propagation. 1. Non-parallel boundaries. *Journal of Geophysical Research* 69:3845–3851.

Herrin, E., and J. Richmond
1960 On the propagation of the *Lg* phase. *Bulletin of the Seismological Society of America* 50:197–210.

Hess, H.
1964 Seismic anisotropy of the uppermost mantle under oceans. *Nature* 203:629–631.

Hildebrand, F. B.
1952 *Methods of Applied Mathematics* (2nd ed.). Englewood Cliffs, New Jersey: Prentice-Hall.

Hill, D. P.
1971a Velocity gradients and anelasticity from crustal body wave amplitudes. *Journal of Geophysical Research* 76:3309–3325.
1971b Velocity gradients in the Earth's crust from head-wave amplitudes. *American Geophysical Union Monograph*, Ed. by J. G. Heacock. 14:71–75.

Hill, D. P., F. G. Fischer, K. M. Lahr, and J. M. Coakely
1976 Earthquake sounds generated by body-wave ground motion. *Bulletin of the Seismological Society of America* 66:1159–1172.

Hobson, E. W.
1955 *The Theory of Spherical and Ellipsoidal Harmonics.* New York: Chelsea Publishing Co.

Hoop, A. T. de,
1958 Representation theorems for the displacement in an elastic solid and their applications to elastodynamic diffraction theory. D.Sc. Thesis, Technische Hogeschool, Delft.
1960 A modification of Cagniard's method for solving seismic pulse problems. *Applied Science Research* B8:349–356.

Hron, F.
1971 Criteria for selection of phases in synthetic seismograms for layered media. *Bulletin of the Seismological Society of America* 61:765–779.
1972 Numerical methods of ray-generation in multilayered media. *In* B. A. Bolt (editor), *Seismology: Body Waves and Sources* (Methods in Computational Physics, Vol. 12). New York: Academic Press.

Hudson, J. A.
1962 The total internal reflection of *SH* waves. *Geophysical Journal of the Royal Astronomical Society* 6:509–531.
1969a A quantitative evaluation of seismic signals at teleseismic distances. I. Radiation from seismic sources. *Geophysical Journal of the Royal Astronomical Society* 18:233–249.
1969b A quantitative evaluation of seismic signals at teleseismic distances. II. Body waves and surface waves from an extended source. *Geophysical Journal of the Royal Astronomical Society* 18:353–370.

Isacks, B., J. Oliver, and L. R. Sykes
1968 Seismology and the new global tectonics. *Journal of Geophysical Research* 73:5855–5899.

Jackson, D. D., and D. L. Anderson
1970 Physical mechanisms of seismic-wave attenuation. *Review of Geophysics and Space Physics* 8:1–63.

Jeffreys, H.
1926 On compressional waves in two superposed layers. *Proceedings of the Cambridge Philosophical Society* 23:472–481.
1931 On the cause of oscillatory movement in seismograms. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society, Geophysical Supplement* 2:407–416.
1958 Rock creep, tidal friction and the Moon's ellipticities. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* 118:14–17.
1961 Small correction in the theory of surface waves. *Geophysical Journal of the Royal Astronomical Society* 6:115–117.
1965 *Cartesian Tensors.* Cambridge University Press.

Jeffreys, H., and B. S. Jeffreys
1972 *Methods of Mathematical Physics* (3rd ed.). Cambridge University Press.

Johnson, L. E., and F. Gilbert
1972 Inversion and inference for teleseimic ray data. *In* B. A. Bolt (editor), *Seismology: Body Waves and Sources* (Methods in Computational Physics, Vol. 12). New York: Academic Press.

Jordan, T. H., and D. L. Anderson
1974 Earth structure from free oscillations and travel times. *Geophysical Journal of the Royal Astronomical Society* 36:411–459.

Jordan, T. H., and L. N. Frazer
1975 Crustal and upper mantle structure from S_p phases. *Journal of Geophysical Research* 80:1504–1518.

Julian, B. R., and D. L. Anderson
1968 Travel times, apparent velocities and amplitudes of body waves. *Bulletin of the Seismological Society of America* 58:339–366.

Julian, B. R., and M. K. Sengupta
1973 Seismic travel time evidence for lateral inhomogeneity in the deep mantle. *Nature* 242:443–447.

Kanamori, H.
1976 Re-examination of the Earth's free oscillations excited by the Kamchatka earthquake of November 4, 1952. *Physics of the Earth and Planetary Interiors* 11:216–226.
1977 The energy release in great earthquakes. *Journal of Geophysical Research* 82:2981–2987.

Karal, F. C., and J. B. Keller
1959 Elastic wave propagation in homogeneous and inhomogeneous media. *Journal of the Acoustical Society of America* 31:694–705.

Keilis-Borok, V. I., and T. B. Yanovskaya
1962 Dependence of the spectrum of surface waves on the depth of the focus within the Earth's crust. *Bulletin of the Academy of Sciences, U.S.S.R., Geophysic Series* (English translation) 11:1532–1539.

Keith, C., and S. Crampin
1977 Seismic body waves in anisotropic media; reflection and refraction at a plane interface. *Geophysical Journal of the Royal Astronomical Society* 49:181–208.

Kennett, B. L. N., N. J. Kerry, and J. H. Woodhouse
1978 Symmetries in the reflection and transmission of elastic waves. *Geophysical Journal of the Royal Astronomical Society* 52:215–229.

Kind, R.
1976 Computation of reflection coefficients for layered media. *Journal of Geophysics* 42:191–200.
1978 The reflectivity method for a buried source. *Journal of Geophysics* 44:603–612.

Knopoff, L.
1956 Diffraction of elastic waves. *Journal of the Acoustical Society of America* 28:217–229.
1964a Q. *Review of Geophysics* 2:625–660.
1964b A matrix method for elastic wave problems. *Bulletin of the Seismological Society of America* 54: 431–438.

Knott, C. G.
1899 Reflection and refraction of elastic waves with seismological applications. *Philosophical Magazine*, Series 5, 48:64–97.

Kostrov, B. V.
1974 Seismic moment and energy of earthquakes, and seismic flow of rock. *Izvestiya, Physics of the Solid Earth*, January, 13–21.

LaCoste, L. J. C.
1935 A simplification in the conditions for the zero-length-spring seismograph. *Bulletin of the Seismological Society of America* 25:176–179.

Lamb, H.
1904 On the propagation of tremors over the surface of an elastic solid. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London* A203:1–42.

Landisman, M., T. Usami, Y. Satô, and R. Massé
1970 Contributions of theoretical seismograms to the study of modes, rays, and the Earth. *Review of Geophysics and Space Physics* 8:533–589.

Langer, R. E.
1951 Asymptotic solutions of a differential equation in the theory of microwave propagation. *Communications of Pure and Applied Mathematics* 3:427–438.

Langston, C. A., and D. V. Helmberger
1975 A procedure for modelling shallow dislocation sources. *Geophysical Journal of the Royal Astronomical Society* 42:117–130.

Lapwood, E. R.
1949 The disturbance to a line source in a semi-infinite elastic medium. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London* A242:63–100.

Latham, G., M. Ewing, J. Dorman, D. Lammlein, F. Press, N. Toksöz, G. Sutton, F. Duennebier, and Y. Nakamura
1971 Moonquakes. *Science* 174:687–692.

LePichon, X.
1968 Sea-floor spreading and continental drift. *Journal of Geophysical Research* 73:3661–3697.

Linehan, D.
1940 Earthquakes in the West Indian region. *Transactions of the American Geophysical Union* 21:229–232.

Liu, H.-P., D. L. Anderson, and H. Kanamori
1976 Velocity dispersion due to anelasticity; implications for seismology and mantle composition. *Geophysical Journal of the Royal Astronomical Society* 47:41–58.

Lomnitz, C.
1956 Creep measurements in igneous rocks. *Journal of Geology* 64:473–479.
1957 Linear dissipation in solids. *Journal of Applied Physics* 28:201–205.
1970 Some observations of gravity waves in the 1960 Chile earthquake. *Bulletin of the Seismological Society of America* 60:669–670.

Longman, I. M.
1963 A Green's function for determining the deformation of the Earth under surface mass loads. 2. Computations and numerical results. *Journal of Geophysical Research* 68:485–496.

Longuet-Higgins, M. S.
1950 A theory of the origin of microseisms. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London* A243:1–35.

Love, A. E. H.
1911 *Some Problems of Geodynamics.* Cambridge University Press.
1944 *A Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity.* New York: Dover Publications. [First published by Cambridge University Press, 1892.]

Luh, P. C., and A. M. Dziewonski
1975 Theoretical seismograms for the Colombian earthquake of 1970 July 31. *Geophysical Journal of the Royal Astronomical Society* 43:679–695.

McHugh, S., and M. J. S. Johnston
1976 Short-period nonseismic tilt perturbations and their relation to episodic slip. *Journal of Geophysical Research* 81:6341–6346.

McKenzie, D. P.
1969 The relation between fault plane solutions for earthquakes and the directions of the principal stresses. *Bulletin of the Seismological Society of America* 59:591–601.

Major, M. W., G. H. Sutton, J. E. Oliver, and P. Metsger
1964 On elastic strain of the Earth in the period range 5 seconds to 100 hours. *Bulletin of the Seismological Society of America* 54:295–346.

Malvern, L. E.
1969 *Introduction to the Mechanics of a Continuous Medium.* Englewood Cliffs, New Jersey: Prentice-Hall.

Mantovani, E., F. Schwab, and L. Knopoff
1977 Generation of complete theoretical seismograms for *SH*-II. *Geophysical Journal of the Royal Astronomical Society* 48:531–536.

Maruyama, T.
1963 On the force equivalents of dynamic elastic dislocations with reference to the earthquake mechanism. *Bulletin of the Earthquake Research Institute, Tokyo University* 41:467–486.

Mason, W. P.
1958 *Physical Acoustics and the Properties of Solids.* London: D. Van Nostrand.

Melchior, P.
1966 *The Earth Tides.* London: Pergamon Press.

Mellman, G. R., and D. V. Helmberger
1974 High-frequency attenuation by a thin high-velocity layer. *Bulletin of the Seismological Society of America* 64:1383–1388.

Mendiguren, J.
1973 Identification of free oscillation spectral peaks for 1970 July 31, Colombian deep shock using the excitation criterion. *Geophysical Journal of the Royal Astronomical Society* 33:281–321.

Michelson, A. A., and H. G. Gale
1919 The rigidity of the Earth. *Astrophysical Journal* 50:330–345.

Minakami, T.
1974 Seismology of volcanoes in Japan. *In* L. Civetta, P. Jasparini, G. Luongo, and A. Rapolla (editors), *Physical Volcanology*. Amsterdam: Elsevier.

Molnar, P., and J. Oliver
1969 Lateral variations of attenuation in the upper mantle and discontinuities in the lithosphere. *Journal of Geophysical Research* 74:2648–2682.

Müller, G.
1973 Amplitude studies of core phases. *Journal of Geophysical Research* 78: 3469–3490.
1977 Correction. *Journal of Geophysical Research* 82:2541–2542.

Müller, G., and R. Kind
1976 Observed and computed seismogram sections for the whole Earth. *Geophysical Journal of the Royal Astronomical Society* 44:699–716.

Musgrave, M. J. P.
1970 *Crystal Acoustics*. San Francisco: Holden-Day.

Nafe, J. E.
1957 Reflection and transmission coefficients at a solid-solid interface of high velocity contrast. *Bulletin of the Seismological Society of America* 47:205–219.

Nakanishi, K., F. Schwab, and L. Knopoff
1977 Generation of complete theoretical seismograms for *SH*-I. *Geophysical Journal of the Royal Astronomical Society* 48:525–530.

Ness, N. F., J. C. Harrison, and L. B. Slichter
1961 Observations of the free oscillations of the Earth. *Journal of Geophysical Research* 66:621–629.

Nowick, A. S., and B. S. Berry
1972 *Anelastic Relaxation in Crystalline Solids*. New York: Academic Press.

Nussenzveig, H. M.
1965 High-frequency scattering by an impenetrable sphere. *Annals of Physics* (N. Y.) 34:23–95.
1972 *Causality and Dispersion Relations* (Mathematics in Science and Engineering, Vol. 95) R. Bellman, series editor. New York: Academic Press.

O'Connell, R. J., and B. Budiansky
1978 Measures of dissipation in viscoelastic media. *Geophysical Research Letters* 5:5–8.

Okal, E., and P. Mechler
1973 On the problem of the convergence of the eikonal expansion for synthetic seismograms. *Bulletin of the Seismological Society of America* 63:1315–1319.

Oliver, J.
1961 On the long-period character of shear waves. *Bulletin of the Seismological Society of America* 51:1–12.

Oliver, J., and M. Major
1960 Leaking modes and the *PL* phase. *Bulletin of the Seismological Society of America* 50:165–180.

Olver, F. W. J.
1954a The asymptotic solution of linear differential equations of the second order for large values of a parameter. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London* A247:307–327.
1954b The asymptotic expansion of Bessel functions of large order. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London* A247:328–368.

Orcutt, J. A., B. L. N. Kennett, and L. M. Dorman
1976 Structure of the East Pacific Rise from an ocean bottom seismometer survey *Geophysical Journal of the Royal Astronomical Society* 45:305–320.

Page, R. A., J. A. Blume, and W. B. Joyner
1975 Earthquake shaking and damage to buildings. *Science* 189:601 608.

Pao, Y.-H., and R. R. Gajewski
1977 The generalized ray-theory and transient responses of layered elastic solids. *In* W. P. Mason (editor), *Physical Acoustics* (Vol. 13). New York: Academic Press.

Pekeris, C. L.
1948 Theory of propagation of explosive sound in shallow water. *Geological Society of America Memoirs* No. 27.

Pekeris, C. L., Z. Alterman, and H. Jarosch
1961 Rotational multiplets in the spectrum of the Earth. *Physics Review* 122: 1692–1700.

Pekeris, C. L., and Y. Accad
1972 Dynamics of the liquid core of the Earth. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London* A273:237–260.

Peterson, J., H. M. Butler, L. G. Holcomb, and C. R. Hutt
1976 The seismic research observatory. *Bulletin of the Seismological Society of America* 66:2049–2068.

Phinney, R. A.
1961 Leaking modes in the crustal wave-guide. 1. The oceanic *PL* wave. *Journal of Geophysical Research* 66:1445–1469.

Phinney, R. A., and S. Alexander
1966 *P* wave diffraction theory and the structure of the core mantle boundary. *Journal of Geophysical Research* 71:5943–5958.

Phinney, R. A., and L. M. Cathles
1969 Diffraction of *P* by the core: A study of long-period amplitudes near the edge of the shadow. *Journal of Geophysical Research* 74:1556–1574.

Pomeroy, P. W., G. Hade, J. Savino, and R. Chander
1969 Preliminary results from high-gain wide-band long-period electromagnetic seismograph systems. *Journal of Geophysical Research* 74:3295–3298.

Poupinet, G., and C. Wright
1972 The generation and propagation of shear-coupled *PL* waves. *Bulletin of the Seismological Society of America* 62:1699–1710.

Press, F.
1965 Displacements, strains, and tilts at teleseismic distances. *Journal of Geophysical Research* 70:2395–2412.

Press, F., A. P. Crary, J. Oliver, and S. Katz
1951 Air-coupled flexural waves in floating ice. *Transactions of the American Geophysical Union* 32:166–172.

Rayleigh, Lord
1887 On waves propagated along the plane surface of an elastic solid. *Proceedings of the London Mathematical Society* 17:4–11.
1910 The problem of the whispering gallery. *Philosophical Magazine* 20:1001–1004.
1912 On the propagation of waves through a stratified medium, with special reference to the question of reflection. *Proceedings of the Royal Society of London* A86:207–226.
1945 *The Theory of Sound* (2 vols.). New York: Dover Publications.

Richards, P. G.
1971 An elasticity theorem for heterogeneous media, with an example of body wave dispersion in the Earth. *Geophysical Journal of the Royal Astronomical Society*. 22:453–472.
1973 Calculation of body waves, for caustics and tunnelling in core phases. *Geophysical Journal of the Royal Astronomical Society* 35:243–264.
1974 Weakly coupled potentials for high-frequency elastic waves in continuously stratified media. *Bulletin of the Seismological Society of America* 64:1575–1588.
1976 On the adequacy of plane-wave reflection/transmission coefficients in the analysis of seismic body waves. *Bulletin of the Seismological Society of America* 66:701–717.

Richards, P. G., and C. W. Frasier
1976 Scattering of elastic waves from depth-dependent inhomogeneities. *Geophysics* 41:441–458.

Richter, C. F.
1935 An instrumental earthquake magnitude scale. *Bulletin of the Seismological Society of America* 25:1–32.
1958 *Elementary Seismology*. San Francisco: W. H. Freeman and Company.

Rihn, W. J
1969 The design of electromagnetic damping circuits. *Bulletin of the Seismological Society of America* 59:967–972.

Robin, L.
1957 *Fonctions Sphériques de Legendre et Fonctions Sphéroidales* (3 vols.). Paris: Gautier-Villars.

Rodgers, P. W.
1968 The response of the horizontal pendulum seismometer to Rayleigh and Love waves, tilt and free oscillations of the Earth. *Bulletin of the Seismological Society of America* 58:1384–1406.

Rodi, W. L., P. Glover, T. M. C. Li, and S. S. Alexander
1975 A fast, accurate method for computing group-velocity partial derivatives for Rayleigh and Love modes. *Bulletin of the Seismological Society of America* 65:1105–1114.

Rosenbaum, J. H.
1960 The long-time response of a layered elastic medium to explosive sound. *Journal of Geophysical Research* 65:1577–1613.

Sacks, I. S., S. Suyehiro, and D. W. Evertson
1971 Sacks-Evertson strainmeter, its installation in Japan and some preliminary results concerning strain steps. *Proceedings of the Japanese Academy* 47:707–712.

Saito, M.
1967 Excitation of free oscillations and surface waves by a point source in a vertically heterogeneous Earth. *Journal of Geophysical Research* 72:3689–3699.
1968 Synthesis of rotational and dilatational seismograms. *Journal of Physics of the Earth* 16:53–62.

Satô, Y.
1951 Study on surface waves. II. Velocity of surface waves propagated upon elastic plates. *Bulletin of the Earthquake Research Institute* 29:223–261.
1959 Numerical integration of the equation of motion for surface waves in a medium with arbitrary variation of material constants. *Bulletin of the Seismological Society of America* 49:57–77.

Satô, Y., T. Usami, and M. Ewing
1962 Basic study on the oscillation of a homogeneous elastic sphere. IV. *The Geophysical Magazine* 31:237–242.

Savage, J. C.
1966 Radiation from a realistic model of faulting. *Bulletin of the Seismological Society of America* 56:577–592.
1969a Steketee's paradox. *Bulletin of the Seismological Society of America* 59:381–384.
1969b A new method of analyzing the dispersion of oceanic Rayleigh waves. *Journal of Geophysical Research* 74:2608–2617.
1976 Anelastic degradation of acoustic pulses in rock—comments. *Physics of the Earth and Planetary Interiors* 11:284–285.

Savage, J. C., and M. E. O'Neill
1975 The relation between the Lomnitz and Futterman theories of internal friction. *Journal of Geophysical Research* 80:249–251.

Savino, J., K. McCamy, and G. Hade
1972 Structures in Earth noise beyond twenty seconds—A window for earthquakes. *Bulletin of the Seismological Society of America* 62:141–176.

Scholte, J. G. J.
1947 The range of existence of Rayleigh and Stoneley waves. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society, Geophysical Supplement* 5:120–126.
1956 On seismic waves in a spherical Earth. *Koninkl. Ned. Meteorol. Inst. Publ.* 65:1–55.

Schwab, F., and L. Knopoff
1970 Surface wave dispersion computations. *Bulletin of the Seismological Society of America* 60:321–344.

Seckler, B. D., and J. B. Keller
1959 Asymptotic theory of diffraction in inhomogeneous media. *Journal of the Acoustical Society of America* 31:206–216.

Shimshoni, M., and A. Ben-Menahem
1970 Computation of the divergence coefficient for seismic phases. *Geophysical Journal of the Royal Astronomical Society* 21:285–294.

Smith, M. L.
1977 Wobble and nutation of the Earth. *Geophysical Journal of the Royal Astronomical Society*, 50:103–140.

Smith, M. L., and F. A. Dahlen
1973 The azimuthal dependence of Love and Rayleigh wave propagation in a slightly anisotropic medium. *Journal of Geophysical Research* 78:3321–3333.

Smith, W. D.
1974 A non-reflecting plane boundary for wave propagation problems. *Journal of Computational Physics* 15:492–503.
1975 The application of finite element analysis to body wave propagation problems. *Geophysical Journal of the Royal Astronomical Society* 42:747–768.

Solomon, S. C.
1972 Seismic-wave attenuation and partial melting in the upper mantle of North America. *Journal of Geophysical Research* 77:1483–1502.
1973 Shear wave attenuation and melting beneath the Mid-Atlantic Ridge. *Journal of Geophysical Research* 78:6044–6059.

Sorrels, G. G.
1971 A preliminary investigation into the relationship between long-period seismic noise and local fluctuations in the atmospheric pressure field. *Geophysical Journal* 26:71–82.

Spencer, T. W.
1960 The method of generalized reflection and transmission coefficients. *Geophysics* 25:625–641.
1965 Long-time response predicted by exact elastic ray theory. *Geophysics* 30:363–368.

Spudich, P. K. P., and D. V. Helmberger
1979 Synthetic seismograms from model ocean bottoms. *Journal of Geophysical Research* 84:189–204.

Stacey, F. D., M. T. Gladwin, B. McKavanagh, A. T. Linde, and L. M. Hastie
1975 Anelastic damping of acoustic and seismic pulses. *Geophysical Survey* 2:133–157.

Stacey, F. D., J. M. W. Rynn, E. C. Little, and C. Croskell
1969 Displacement and tilt transducers of 140 db range. *Journal of Scientific Instrumentation* (*J. Phys., E*) Series 2. 2:945–949.

Stauder, W.
1968 Mechanism of the Rat Island earthquake sequence of February 4, 1965, with relation to island arcs and sea-floor spreading. *Journal of Geophysical Research* 73:3847–3858.

Stein, S., and R. J. Geller
1978 Time domain observation and synthesis of split spheroidal and torsional free oscillations of the 1960 Chilean earthquake: Preliminary results. *Bulletin of the Seismological Society of America*, 68:325–332.

Steketee, J. A.
1958 Some geophysical applications of the elasticity theory of dislocations. *Canadian Journal of Physics* 36:1168–1197.

Stephens, C., and B. L. Isacks
1977 Toward an understanding of *Sn*: Normal modes of Love waves in an oceanic structure. *Bulletin of the Seismological Society of America* 67:69–78.

Sternberg, E.
1960 On the integration of the equations of motion in the classical theory of elasticity. *Archive for Rational Mechanics* 6:34–50.

Stoneley, R.
1924 Elastic waves at the surface of separation of two solids. *Proceedings of the Royal Society of London* A106:416–428.

Strick, E.
1959 Propagation of elastic wave motion from an impulsive source along a fluid/solid interface. II. Theoretical pressure pulse. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London* A251:465–523.
1970 A predicted pedestal effect for pulse propagation in constant-*Q* solids. *Geophysics* 35:387–403.

Su, S. S., and J. Dorman
1965 The use of leaking modes in seismogram interpretation and in studies of crust-mantle structure. *Bulletin of the Seismological Society of America* 55:989–1021.

Sykes, L. R.
1967 Mechanism of earthquakes and nature of faulting on the mid-oceanic ridges. *Journal of Geophysical Research* 72:2131–2153.

Takeuchi, H., and N. Kobayashi
1959 Surface waves propagating along a free surface of a semi-infinite elastic medium of variable density and elasticity. Part I. *Journal of the Seismological Society of Japan* (Series 2) 12:115–121.

Takeuchi, H., and M. Saito

1972 Seismic surface waves. *In* B. A. Bolt (editor), *Seismology: Surface Waves and Earth Oscillations* (Methods in Computational Physics, Vol. 11). New York: Academic Press.

Thomson, W. T.

1950 Transmission of elastic waves through a stratified solid. *Journal of Applied Physics* 21:89–93.

Titchmarsh, E. C.

1926 Conjugate trigonometrical integrals. *Proceedings of the London Mathematical Society* (Series 2) 24:109–130.

1939 *The Theory of Functions* (2nd ed.). Oxford University Press.

Tsai, Y. B., and K. Aki

1971 Amplitude spectra of surface waves from small earthquakes and underground nuclear explosions. *Journal of Geophysical Research* 76:3440–3452.

Vaněk, J., A. Zápotek, V. Kárník, N. V. Kondorskaya, Yu. V. Rizmichenko, E. F. Savarensky, S. L. Solov'yov, and N. V. Shebalin

1962 Standardization of magnitude scales. *Izvestiya Akad. Nauk S.S.S.R., Ser. Geofiz.* 2:153–158.

Vered, M., and A. Ben-Menahem

1974 Application of synthetic seismograms to the study of low-magnitude earthquakes and crustal structure in the northern Red Sea region. *Bulletin of the Seismological Society of America* 64:1221–1237.

Vlaar, N. J.

1966 The field from an *SH*-point source in a continuously layered inhomogeneous medium. 1. The field in a layer of a finite depth. *Bulletin of the Seismological Society of America* 56:715–724.

1968 Ray theory for an anisotropic inhomogeneous elastic medium. *Bulletin of the Seismological Society of America* 58:2053–2072.

Vvedenskaya, A. V.

1956 The determination of displacement fields by means of dislocation theory. *Izvestiya Akad. Nauk. S.S.S.R., Ser. Geofiz.* pp. 227–284.

Walker, D. A., C. C. McCreery, G. H. Sutton, and F. K. Dunnebier

1978 Spectral analyses of high frequency P_n and S_n phases observed at great distances in the western Pacific. *Science* 199:1333–1335.

Wesson, R. L.

1970 A time integration method for computation of the intensities of seismic rays. *Bulletin of the Seismological Society of America* 60:307–316.

White, J. E.

1965 *Seismic Waves.* New York: McGraw Hill.

Wideman, C. J., and M. W. Major

1967 Strain steps associated with earthquakes. *Bulletin of the Seismological Society of America* 57:1429–1444.

Wiechert, E.

1904 Ein astatische Pendel höher Empfindlichkeit zur mechanischen Registrierung von Erdbeben. *Beitr. Geophys.* 6:435–450.

Wiggins, R. A.

1976a Body wave amplitude calculations. II. *Geophysical Journal of the Royal Astronomical Society* 46:1–10.

1976b A fast, new computational algorithm for free oscillations and surface waves. *Geophysical Journal of the Royal Astronomical Society* 47:135–150.

Wiggins, R. A., and D. V. Helmberger

1974 Synthetic seismogram computation by expansion in generalized rays. *Geophysical Journal of the Royal Astronomical Society* 37:73–90.

Wiggins, R. A., and M. Saito

1971 Evaluation of computational algorithms for the associated Legendre polynomials by internal analysis. *Bulletin of the Seismological Society of America* 61:375–381.

Willmore, P. L.

1960 The detection of Earth movement. *In* S. K. Runcorn (editor), *Methods and Techniques in Geophysics*. New York: Interscience, pp. 230–276.

Woodhouse, J. H.

1976 On Rayleigh's principle. *Geophysical Journal of the Royal Astronomical Society* 46:11–22.

1978 Asymptotic results for elastodynamic propagator matrices in plane stratified and spherically stratified Earth models. *Geophysical Journal of the Royal Astronomical Society*, 54:263–280.

Wyss, M., and J. N. Brune

1968 Seismic moment, stress and source dimensions for earthquakes in the California-Nevada region. *Journal of Geophysical Research* 73:4681–4694.

1971 Regional variations of source properties in Southern California estimated from the ratio of short- to long-period amplitudes. *Bulletin of the Seismological Society of America* 61:1153–1167.

Young, G. B., and L. W. Braile

1976 A computer program for the application of Zoeppritz's amplitude equations and Knott's energy equations. *Bulletin of the Seismological Society of America* 66:1881–1885.

Zener, C. M.

1948 *Elasticity and Anelasticity of Metals*. The University of Chicago Press.

Zöllner, F.

1869 Veber eine neue Methode zur Messung anziehender und abstossender Kräfte. *Ber. sächs. Akad. Wis. Math.-nat. Klasse* 21:280–284.

译 后 记

«定量地震学»的英文版于 1980 年出版，这部两卷本的专著受到地震学界的重视。为满足广大专业工作者的需要，我们把它翻译成中文。这是第一卷，其中第一章至第六章由李钦祖译，第七章至第九章由邹其嘉译，第十章由唐美华译，全部译稿由邹其嘉整理。姜维岐为本书的翻译出版做了许多工作。

限于译者水平，译文中一定有错误及不妥之处，恳请广大读者批评指正。